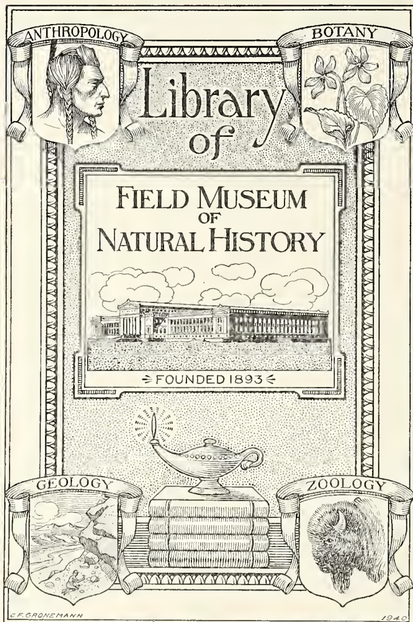

THE FIELD MUSEUM LIBRARY
3 5711 00073 7396


ANTHROPOLOGY
BOTANY
Library of
FIELD MUSEUM OF NATURAL HISTORY
FOUNDED 1893
GEOLOGY
ZOOLOGY
C.F. GRONEMANN
1940

KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

VAN 28 DECEMBER 1918
- TOT 3 MEI 1919 -

DEEL XXVII
(2DE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
:═══: SEPTEMBER 1919 :═══:

INHOUD.

ERRATA.

In het Verslag der Vergaderingen:

Deel	XXVII,	p.	688	regel 5	van boven, *lees* Supplement N°. 42*e* in plaats van Supplement N°. 43*a*.
,,	,,	,,	1316	,, 5	van boven, *lees* XX in plaats van XIX.
,,	,,	,,	1316	,, 13	van onder, *lees* 75,9488 in plaats van 74,9488.
,,	,,	,,	1324	noot 1),	*lees* Comm. N°. 152*e* in plaats van Comm. N°. 152*c*.
,,	XXVIII,	,,	67	regel 4	van boven, *lees* Supplement N°. 43*a* in plaats van Supplement N°. 44.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 28 DECEMBER 1918.

DEEL XXVII.

N°. 6.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.

Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1. Bericht van de Heeren W. de Sitter, H. Kamerlingh Onnes en S. Hoogewerff, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2. Eene kennisgeving van het „Ministère de l'Instruction publique et des beaux-arts" te Parijs, dat de Regeering van de Fransche Republiek eene commissie heeft ingesteld, welke belast zal zijn met het onder hare bescherming nemen van die voorwerpen van kunstwaarde, welke de vijandelijke legers gedurende de afgeloopen oorlogsjaren mochten hebben onttrokken aan openbare of bijzondere collecties of weggevoerd uit kerkelijke en burgerlijke gebouwen in het toen door hen bezette gebied.

Medewerking en hulp wordt ook van onze Akademie en hare leden persoonlijk verzocht bij het opsporen en aanhouden van zulke kunstvoorwerpen of overblijfsels daarvan, als deze hier te lande mochten te koop aangeboden worden of hunne bergplaats ontdekt mocht zijn, in welke gevallen daarvan aangifte en mededeeling gevraagd wordt aan de vertegenwoordigers der Fransche Regeering in Nederland of rechtstreeks aan den daarvoor te Parijs ingestelden dienst.

3. Eene kennisgeving namens vereerders, vrienden en leerlingen van Prof. Julius von Hann te Weenen, met verzoek door geldelijke bijdragen het plan te steunen om dezen geleerde op zijn 80sten verjaardag, den 23 Maart 1919, als een hulde aan zijne groote wetenschappelijke verdiensten, een bedrag in geld aan te bieden, waarvan, onder toezicht van de Akademie van Wetenschappen te Weenen, een fonds zal gesticht worden, dat den naam zal krijgen van „Hann-Preis" en ten doel zal hebben het bevorderen van wetenschappelijke onderzoekingen op het gebied van meteorologie en klimatologie. Op bepaalde tijden zullen, uit de rente van dit fonds, prijzen worden uitgeloofd ter mededinging voor binnen- en buitenlandsche geleerden.

Beide kennisgevingen worden ter visie gelegd voor de leden en in hunne belangstelling aanbevolen.

Physiologie. — De Heer J. K. A. WERTHEIM SALOMONSON doet een mededeeling betreffende: *„Een nieuwe demonstratie oogspiegel"*.

In een vroegere mededeeling in de vergadering van 27 April 1917 (zie Verslagen Dl. XXV p. 1399) werd door mij bericht over het photographeeren van het menschelijke netvlies. Het tweede der in bovengenoemde mededeeling beschreven toestellen is sedert regelmatig gebruikt en levert bevredigende resultaten op. Uit den aard der zaak was dit toestel ook geschikt om als demonstratie-ophthalmoscoop gebruikt te worden. Hiermede immers kon de instelling op den fundus van den patiënt door een derden persoon geschieden, terwijl de onderzoeker niets anders behoefde te doen dan het reeds zichtbare beeld zoo scherp mogelijk instellen voor zijn eigen oog. Indien evenwel een dergelijk toestel uitsluitend als demonstratie-instrument had moeten dienst doen, dan zou de bouw en samenstelling met voordeel belangrijk gewijzigd kunnen worden. Onder de mogelijke verbeteringen en vereenvoudigingen behoort in de eerste plaats het gebruik van verschillende vergrootingen. Bij den omvang van het geprojecteerde beeld, dat 40 millimeter doorsnede bezit kan dit laatste bezwaarlijk meer dan 3.5 maal vergroot worden, welke vergrooting in het vastaangebrachte oculair inderdaad aangewend wordt. Onder bepaalde omstandigheden kan echter een grootere of kleinere totaalvergrooting dan een 15-malige, welke met dit oculair van 3.5-malige eigenvergrooting bereikt wordt, gewenscht zijn.

In de tweede plaats wordt als lichtbron een booglamp gebruikt waarvan de lichtsterkte, althans voor ons doel, alleen door absorbeerende lichtfilters zoude kunnen worden geregeld en verminderd.

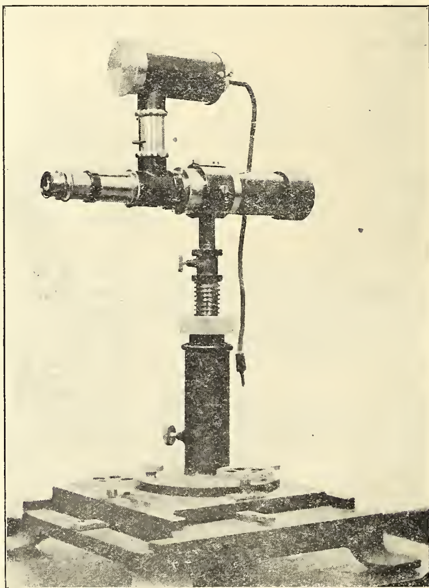
Verder bleek het mogelijk om de in den photographischen oogspiegel gebruikte schermpjes, waarmede de lichtreflexen van de ophthalmoscooplens onschadelijk gemaakt worden, door een beter hulpmiddel te vervangen, zoodra niet naar photographische doch alleen naar visueele waarneming van den fundus gestreefd wordt.

Ten slotte lag het voor de hand de afmetingen van den geheelen toestel te reduceeren wanneer van de photographie afgezien werd. Hierdoor moest in ieder geval het toestel veel handiger in het gebruik worden.

Op grond van deze overwegingen ging ik over tot de samen-

stelling van den demonstratie ophthalmoscoop, dien ik heden nader bespreek.

Bij dit toestel is het beginsel van de beschouwing van het omgekeerde beeld toegepast evenals bij den photographischen oogspiegel. Als lichtbron dient een halfwattlampje met rechte gloeispiraal, van 8 Volt klemspanning en ongeveer 25 kaarsen lichtsterkte. Het wordt aangesloten aan een kleine accumulatorbatterij of wel aan een kleinen transformator; de lichtsterkte wordt geregeld door een



schuifrheostaat. De gloeispiraal wordt door een condensor afgebeeld op een enge spleet. Een lensje van passende brekende kracht 't welk op de spleet ligt, beeldt de opening van de condensorlens af op de opening van de ophthalmoscooplens. Een totaal reflecteerend prisma onmiddellijk tegen de spleet geplaatst, maakt het mogelijk dat de verlichtingstubus loodrecht ten opzichte van de waarnemingsrichting geplaatst is.

Onmiddelijk onder het prisma bevindt zich de opening van het lensenstelsel voor de visueele waarneming van het door de ophthal-

moscooplens gevormde netvliesbeeld. Het genoemde lensenstelsel bestaat uit een objectiefje van 55 millimeter brandpuntsafstand en een HUYGENS-oculair, welke samen een soort van verrekijkerloupe vormen. De vergrooting kan nu op eenvoudige wijze veranderd worden door het gebruik van andere oculairen.

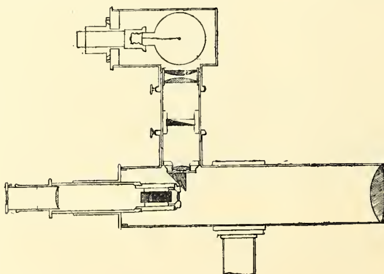
Om de lichtreflexen op de ophthalmoscooplens weg te maken is tusschen den condensor en de spleet een achromatisch kalkspaatprisma aangebracht. Feitelijk ontstaan hierdoor twee naast elkaar liggende beelden van de gloeispiraal in het vlak van de spleet. Doch slechts één dier beelden, nl. dat gevormd door de gewone stralen valt in de spleet terwijl het tweede van de buitengewone stralen afkomstige beeld niet doorgelaten wordt. Het oog wordt dus feitelijk verlicht met rechtlijnig gepolariseerd licht, terwijl ook de reflexbeeldjes op de ophthalmoscooplens door gepolariseerd licht tot stand komen. In de verrekijkerloupe is nu nog een kleine analysator aangebracht die zoo gedraaid wordt, dat alle in een bepaalde richting gepolariseerd licht gedoofd wordt. Op deze wijze gelukt het de hinderlijke reflexbeeldjes geheel uit te dooven. Het licht echter dat doordringt tot de retina, wordt aldaar volkomen gedepolariseerd teruggezonden, zoodat het ongestoord het oog van den waarnemer kan bereiken. Deze ziet inderdaad de retina volkomen helder en zonder hinderlijke reflexen. Ook de netvliesreflexen, die vooral bij jeugdige individuen zeer lastig kunnen zijn schijnen hierbij iets verminderd te worden.

Aan deze inrichting is nog een klein voordeel van anderen aard verbonden. Volgens de theorie van HELMHOLTZ-GULLSTRAND dient een gedeelte van de pupilopening in het onderzochte oog voor de doorlating van den lichtkegel die de retina verlicht. Een ander gedeelte van de pupil laat den stralenkegel door die, uitgaande van de retina, ten slotte den waarnemer bereikt. Deze beide stralenkegels moeten door een geheel vrije ruimte gescheiden zijn zoowel daar waar zij de cornea als daar waar zij de achtervlakte van de lens doorsnijden. Immers alleen op deze wijze wordt het ontstaan van reflexbeelden vermeden, terwijl evenmin diffuus licht uitgaande van het verlichte deel van cornea of lens den waarnemer kan bereiken. Met mijn oogspiegel zouden echter dergelijke reflexbeelden, indien zij ontstonden den waarnemer toch niet kunnen bereiken daar zij door het nicol-prisma onschadelijk gemaakt zouden worden. Wij behoeven daarom uitsluitend rekening te houden met het diffuse licht uitgaande van de verlichte gedeelten van cornea en lens. Terwijl nu het verstrooide licht van de lens zeer hinderlijk is, is dat met het diffuse licht van de cornea in eenigszins mindere mate het geval. Daarom bestaat theoretisch de mogelijkheid de vrije tusschenruimte

tusschen verlichtings- en waarnemingskegel nog eenigszins te verkleinen. Hieruit volgt verder, dat zelfs bij een vrij nauwe pupil nog de ophthalmoscopische waarneming mogelijk zou zijn, althans bij nauwere pupillen dan bij welke andere demonstratie ophthalmoscopen nog juist bruikbare beelden opleveren. Bij het justeeren van den oogspiegel is evenwel vastgehouden aan de ietwat grootere tusschenruimte, daar vooral bij ondere patienten het diffuse cornealicht wèl hinderlijk is. Bovendien wenschte ik een toestel waaraan na de eenmaal uitgevoerde justeering niets meer behoefde te worden veranderd, dan de scherpstelling voor het oog van den waarnemer.

Met den oogspiegel zooals deze nu is wordt de fundus bij emmetrope oogen over een uitgestrektheid van ruim 27°, beantwoordende aan $4^1/_2$ pupildoorsneden gelijktijdig scherp waargenomen. De vergrooting bedraagt daarbij ongeveer 14 maal, beantwoordend aan de vergrooting die wij verkrijgen bij het oogspiegelen in het rechte beeld terwijl een beeldveld zooals bij het onderzoek in het omgekeerde beeld bereikt wordt. Door sterkere of zwakkere oculairen kan de vergrooting gewijzigd en tot ruim 50 maal opgevoerd worden, waarbij natuurlijk het gezichtsveld door diaphragmeering in het oculair eenigszins beperkt moet worden. Door de bereikbare groote intrinsieke helderheid van de lichtbron kan zelfs bij deze sterke vergrooting een zeer voldoende lichtsterkte van het ophthalmoscopische beeld verkregen worden.

Als laatste, niet te onderschatten voordeel van het instrument



mag aangevoerd worden, dat bij het oogspiegelen de afstand van het instrument tot het oog van den patient ongeveer 90 millimeter bedraagt; dat geen enkele wijziging aan de instelling of justeering behoeft te worden aangebracht, welk oog ook onderzocht wordt: alleen het eigenlijke scherpstellen door verschuiving van het oculair

moet natuurlijk bij elk oog door den waarnemer geschieden. Ten slotte moge vermeld worden dat patienten die buitengewoon sterke refractieanomaliën bezitten even gemakkelijk onderzocht worden: in dit geval kan n.l. het onderzoek geschieden terwijl de patient zijn gewone bril draagt. Bij sterk astigmatisme is deze wijze van correctie wel de meest eenvoudige.

In dezen oogspiegel is als ophthalmoscooplens een der fraaie door Zeiss vervaardigde asphèrische lenzen van 6 cM. brandpuntsafstand aangewend, welke een goed aplanatisch beeld leveren. Het behoeft wel nauwelijks vermeld te worden dat elk saamgesteld aplanatisch lensstelsel van genoegzaam groote apertuur en passenden brandpuntsafstand hier evengoed gebruikt zou kunnen worden: immers of hier één paar reflexbeelden of wel talrijke reflexbeelden ontstaan is volkomen onverschillig, daar zij steeds door het analysator-prisma onschadelijk gemaakt worden.

Physiologie. — De Heer J. K. A. Wertheim Salomonson biedt, mede namens Mevr. Ratu Langi—Houtman eene mededeeling aan over: "*Tonus en faradische tetanus.*".

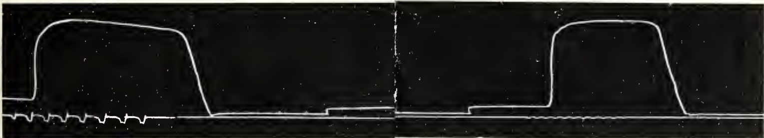
Wordt een spier met snel opeenvolgende inductiestooten geprikkeld, dan geraakt in het algemeen de spier in tetanus. Bij genoegzame frequentie van de onderbrekingen van het inductie-apparaat is de tetanus daarbij zeer regelmatig, zoodat geen wisseling in den contractie-toestand waargenomen kan worden. Bij geringe frequentie zien wij, dat de tetanus niet meer volmaakt regelmatig is, doch dat synchroon met de onderbrekingsfrequentie spanningsveranderingen optreden. Deze kunnen graphisch gemakkelijk opgeteekend worden, zoowel bij het onderzoek van de lengte-, dikte- als van de spanningsverandering van de spier. Wordt, uitgaande van deze geringe frequentie het aantal onderbrekingen per seconde vermeerderd, dan worden de wisselingen in den contractie-toestand tijdens de samentrekking voortdurend kleiner, totdat deze door mechanische hulpmiddelen niet meer aangetoond kunnen worden. Wij hebben dan een *gladden* tetanus verkregen, waarvoor dus steeds een zekere minimale frequentie noodig is. Deze kritische frequentie verschilt bij de meeste normale menschelijke spieren slechts zeer weinig van 18 prikkels per seconde,

Zijn er nu omstandigheden, die op deze grenswaarde eenigen invloed kunnen uitoefenen?

De opvatting, die wij in het algemeen hebben van het ontstaan van den tetanus geeft, op zich zelf genomen, geen antwoord op die vraag. Wij nemen toch aan, dat een tetanus „glad" wordt wanneer de onderbrekingen op elkander volgen met een tusschenruimte die volgens Burdon Sanderson gelijk is, volgens Hermann, Marey e.a. een weinig korter is dan de tijd, dien de spier behoeft om bij een enkelvondigen spierschok zich zoo sterk mogelijk te verkorten.

Verandering in den duur der periode van toenemende verkorting bij een enkelvoudigen spierschok zou in staat zijn wijziging in te voeren. Nu kennen wij wel twee factoren die wijzigend optreden, n.l. de temperatuur van de spier en de vermoeienis, doch deze eerste factor komt bij menschelijke spieren practisch in het geheel niet in aanmerking, terwijl invloed van de vermoeienis bij menschelijke spieren zeer gering is en als factor bij ons onderzoek buiten beschouwing blijft.







Physiologie. — De Heer J. K. A. WERTHEIM SALOMONSON biedt, mede namens Mevr. RATU LANGI—HOUTMAN eene mededeeling aan over: "*Tonus en faradische tetanus.*".

Wordt een spier met snel opeenvolgende inductiestooten geprikkeld, dan geraakt in het algemeen de spier in tetanus. Bij genoegzame frequentie van de onderbrekingen van het inductie-apparaat is de tetanus daarbij zeer regelmatig, zoodat geen wisseling in den contractie-toestand waargenomen kan worden. Bij geringe frequentie zien wij, dat de tetanus niet meer volmaakt regelmatig is, doch dat synchroon met de onderbrekingsfrequentie spanningsveranderingen optreden. Deze kunnen graphisch gemakkelijk opgeteekend worden, zoowel bij het onderzoek van de lengte-, dikte- als van de spannings-verandering van de spier. Wordt, uitgaande van deze geringe frequentie het aantal onderbrekingen per seconde vermeerderd, dan worden de wisselingen in den contractie-toestand tijdens de samentrekking voortdurend kleiner, totdat deze door mechanische hulpmiddelen niet meer aangetoond kunnen worden. Wij hebben dan een *gladden* tetanus verkregen, waarvoor dus steeds een zekere minimale frequentie noodig is. Deze kritische frequentie verschilt bij de meeste normale menschelijke spieren slechts zeer weinig van 18 prikkels per seconde,

Zijn er nu omstandigheden, die op deze grenswaarde eenigen invloed kunnen uitoefenen?

De opvatting, die wij in het algemeen hebben van het ontstaan van den tetanus geeft, op zich zelf genomen, geen antwoord op die vraag. Wij nemen toch aan, dat een tetanus „glad" wordt wanneer de onderbrekingen op elkander volgen met een tusschenruimte die volgens BURDON SANDERSON gelijk is, volgens HERMANN, MAREY e.a. een weinig korter is dan de tijd, dien de spier behoeft om bij een enkelvoudigen spierschok zich zoo sterk mogelijk te verkorten.

Verandering in den duur der periode van toenemende verkorting bij een enkelvoudigen spierschok zou in staat zijn wijziging in te voeren. Nu kennen wij wel twee factoren die wijzigend optreden, n.l. de temperatuur van de spier en de vermoeienis, doch deze eerste factor komt bij menschelijke spieren practisch in het geheel niet in aanmerking, terwijl invloed van de vermoeienis bij menschelijke spieren zeer gering is en als factor bij ons onderzoek buiten beschouwing blijft.



Fig. 1. Musc gastrocnemius. Commotio cerebri.



Fig. 3. Rolafstand 5 c.M. Musc gastrocnemius sinister, indirect. Sclerosis multiplex.



Fig. 2. M. Gastrocnemius indirect. Rolafstand 4 c.M. Tabes dorsalis.

De beide genoemde factoren werken zeker op het opstijgend deel von het myogram en zouden in staat moeten zijn de kritische prikkelingsfrequentie voor den gladden tetanus te wijzigen. Zouden wij kunnen aantoonen dat er behalve deze invloeden nog een andere invloed is, die niet op het opstijgend gedeelte werkt, dan zoude daarmede aangetoond zijn dat ook de vorm van het afdalende stuk van het myogram van beteekenis is voor het tot stand komen van den tetanus.

Nu is echter, dank zij de onderzoekingen van Dr. DE BOER een nieuwe factor op den voorgrond getreden en dat is de *tonus* der spieren. DE BOER toonde aan dat spieren met normaal tonus-mechanisme een langeren contractieduur bezitten dan spieren bij welke de reflectorische tonus ontbreekt. Dit feit wordt veroorzaakt, doordien in de eerstgenoemde spieren bij elken spierschok reflectorisch een tonusschommeling optreedt. Deze tonus-schommeling wordt zichtbaar even nadat de top van de spiercurve bereikt is en veroorzaakt een eigenaardige verheffing van de dalende lijn, die naar den eersten beschrijver van dat feit bekend is als de „neus" van FUNKE. De tonusschommeling oefent echter voor zoover wij weten geen duidelijken invloed uit op het opstijgend deel van de curve.

Wij wenschen nu na te gaan of de tonus voor den faradischen tetanus beteekenis heeft. Door CASH en YEO is uitgesproken, dat de tonus als 't ware het cement is dat de enkele spierschokken tot een tetanus verbindt. BOTAZZI stelde zich voor, dat de tonus het substraat is, waarop de tetanus zich opbouwt, terwijl COUSTENSOUX en ZIMMERN eveneens een eng verband tusschen beide aannemen.

Het scheen ons daarom nuttig toe na te gaan of in verschillende klinische gevallen, waarbij de tonus normaal, verminderd of verhoogd is, veranderingen optreden in de frequentie, waarbij een gladde tetanus voor 't eerst voor den dag komt. Hierbij deden zich enkele technische moeilijkheden voor zoowel bij het prikkelen als bij het registreeren. Deze werden overwonnen door het gebruik van een stel onderbrekers welke met groote nauwkeurigheid op 10, 12, 14, 16, 18, 20 en 22 onderbrekingen per seconde waren afgestemd en die door hunne constructie bijzonder constant en gelijkmatig bleken te zijn.

De moeilijkheid bij het registreeren deed zich voor, omdat steeds verdikkingscurven werden opgeschreven, waarbij de dikteveranderingen tijdens een niet geheel gladden tetanus buitengewoon klein zijn. Om zeker te zijn, dat onder deze omstandigheden toch de registreerkapsel van MAREY op betrouwbare wijze deze dikteschommelingen opteekende, moest het traagheidsmoment en de vergrooting van het

schrijvende hefboompje zooveel mogelijk verminderd worden. Dit voerde voor den schrijfhefboom ten slotte tot een gewichtsvermindering tot op 11 milligram, een lengte ongeveer van 6.5 c.m. en een hefboomvergrooting van 6 maal. Vergelijking met een spiegelkapseltje van Frank leerde dat hiermede werkelijk voldoende nauwkeurigheid bereikt was. Ons onderzoek betrof verschillende spieren en spiergroepen zoowel in normale als in pathologische gevallen. Reeds bij normale menschen vonden wij, dat physiologische verschillen bij de verschillende spiergroepen voorkwamen.

Intusschen bleek het wel, dat bij de meeste gezonde spieren de tetanuscurven bij 16 of minder onderbrekingen per seconde verkregen, steeds glad waren. Bij de tetanuscurven bij 18 prikkels per seconde verkregen bestond vaak verschil, zoodat bij sommige spieren hierbij reeds een gladde curve, bij andere vaak nog een getande curve verkregen werd. Als voorbeeld van een normale spiergroep moge de curve N°. 1 dienen, welke bij een gezonde vrouw van 53 jaar aan den gastrocnemius verkregen werd. Wij zien 5 korte tetani, die met 12, 14, 16, 18 en 20 prikkels per seconde verkregen zijn. De afzonderlijke primaire stroomsluitingen zijn steeds mede geregistreerd. Hier vertoonde de curve van 18 nog een duidelijke tanding, terwijl eerst de curve van 20 als een gladde tetanus mag worden bestempeld.

Er dient op gewezen te worden dat zelfs dan nog de eerste twee of hoogstens drie prikkels in den regel min of meer duidelijk te herkennen zijn. Als regel werd aangenomen, dat alleen een curve waarbij na den 3den prikkelstoot geen tanding meer te herkennen was, glad genoemd werd.

Wij vergelijken nu deze curve 1 met de in fig. 2 afgebeelde curve, waar achtereenvolgens 12, 14, 16, 18, 20, 22 prikkels voor het verwekken van den tetanus gediend hebben.

Het gold in dit tweede geval de gastrocnemius van een vrouw van 46 jaar, lijdende aan vergevorderde tabes dorsalis, waarbij de spieren bijzonder atonisch geworden waren. Wij zien dat zelfs bij 22 trillingen per seconde nog geen gladde tetanus verkregen werd, en elke afzonderlijke prikkel zich scherp in de spiercurve afteekent,

Als tegenhanger moge fig. 3 dienen, waarin de tetanuscurve van den gastrocnemius verkregen bij 12, 16, 18, 20 en 22 gereproduceerd is. De patient was een man van 45 jaar, welke aan sclerosis cerebrospinalis multiplex leed. Bij hem ontstaat reeds bij 12 prikkelingen per seconde een volkomen gladde tetanus. Bij dezen patient vonden wij een zeer sterke hypertonie der spieren met lichte contractuur, reflexverhooging enz.

Als onmiddellijk resultaat komt dus voor den dag, dat inderdaad tonusverhooging een vroegtijdige en gemakkelijke versmelting der spierschokken tot een geheel gladde tetanische curve teweegbrengt; dat bij hypotonien daarentegen de tanding zelfs bij niet onbelangrijke verhooging der prikkelfrequentie nog blijft bestaan.

Bij het voortgezette onderzoek van talrijke patienten zijn bovendien nog enkele bijzonderheden voor den dag gekomen die althans gedeeltelijk in een spoedig verschijnende uitvoerige verhandeling van een onzer zal worden beschreven. Hier behoeft slechts aangestipt te worden, dat daarbij eenerzijds vermoeienis-verschijnselen van het tonusmechanisme zijn waargenomen en omgekeerd ook curven geregistreerd zijn welke een langzame, zich onder den invloed der prikkeling ontwikkelende tonusreflex-verhooging doen vermoeden, en welke een nieuwe aanwijzing inhouden voor het bestaan van hoogere tonus-reflexbanen en centra naast een zuiver peripheere reflexbaan.

Wiskunde. — De Heer L. E. J. BROUWER biedt een mededeeling aan: *„Opmerking over de vlakke translatiestelling"*.

De door mij in Deel XVIII van deze Verslagen (p. 117) uitgesproken en in Band 72 van de Mathematische Annalen (p. 37—54) voor het eerst volledig bewezen *vlakke translatiestelling* luidt als volgt:

Een éénéénduidige continue transformatie van het Cartesische vlak Γ in zichzelf met invariante indicatrix, doch zonder invariant punt, is over het geheele vlak een translatie.

Hiermee wordt bedoeld, dat *elk* punt van Γ is gelegen in een *translatieveld*, d. w. z. in een gebied, dat buiten zijn beeldgebied ligt en begrensd wordt door twee elkaar niet ontmoetende enkelvoudige open lijnen, waarvan de eene het beeld van de andere is.

Zij t de gegeven transformatie, T een bij haar behoorend translatieveld, ${}_nT$ voor ieder positief of negatief geheel getal n inclusief 0 het beeld van T voor de transformatie t^n. De puntverzameling $T' = \underset{n}{\mathfrak{S}}({}_nT)$ kan op zoodanige wijze éénéénduidig en continu op een Cartesisch vlak C afgebeeld worden, dat daarbij de transformatie t van T' wordt afgebeeld op een *translatie* van C. *Indien dus T zoo kan worden gekozen, dat T' het geheele vlak Γ vult, kan Γ op zoodanige wijze éénéénduidig en continu op een Cartesisch vlak C afgebeeld worden, dat daarbij de transformatie t van Γ wordt afgebeeld op een translatie van C.*

De vraag of een dergelijke keuze van T voor elke transformatie t mogelijk is, moet echter in ontkennenden zin beantwoord worden, zooals ik in de noot op p. 37 van het aangehaalde opstel der Mathematische Annalen reeds heb aangeduid, en zooals uit het volgende voorbeeld blijkt:

We brengen in Γ een Euclidische maatbepaling en in overeenstemming daarmee een rechthoekig Cartesisch assenstelsel aan. De door dit assenstelsel bepaalde lijnen $y = 1$ en $y = -1$ verdeelen Γ in drie gebieden g_1 $(y > 1)$, g_2 $(1 > y > -1)$ en g_3 $(y < -1)$. We vullen g_1 en g_3 elk op met een bundel van lijnen $y = c$ en g_2 met een bundel van lijnen $y^2 = \frac{x-c}{1+x-c}$. Deze drie bundels vormen tezamen met de lijnen $y = 1$ en $y = -1$ een Γ geheel overdekkenden bundel β van elkaar niet snijdende enkelvoudige open lijnen.

Onder t verstaan we nu de transformatie, die ieder punt P van Γ over een vaste booglengte l langs de door P gaande lijn van den bundel β verschuift, en wel, als P in g_1 of op de grens van g_1 ligt, *naar links*; als P in g_2 ligt, *omhoog*; als P in g_3 of op de grens van g_3 ligt, *naar rechts*. De op deze wijze gedefinieerde transformatie t is inderdaad ééneénduidig en continu, heeft geen invariant punt en laat de indicatrix invariant. Stellen we echter voor ieder positief of negatief geheel getal n inclusief 0 het beeld van het punt P voor de transformatie t^n voor door ${}_nP$ en $\underset{n}{\Xi}({}_nP)$ door P', dan *hangt P' niet continu af van P* (convergeert n.l. de fundamentaalreeks van in g_2 gelegen punten $P_1, P_2, P_3, \ldots$ tot het op de lijn $y = -1$ gelegen punt P, dan convergeert de fundamentaalreeks $P_1', P_2', P_3', \ldots$ niet uitsluitend tot P', doch bovendien tot andere punten van Γ).

Derhalve kan Γ ook niet op zoodanige wijze ééneénduidig en continu op een Cartesisch vlak C afgebeeld worden, dat daarbij de transformatie t van Γ wordt afgebeeld op een translatie van C. Immers ware een dergelijke afbeelding mogelijk, dan zou P' continu van P moeten afhangen.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „*Quadratische involuties in de stralenruimte*".

In een mededeeling opgenomen in deel XXVII (bl. 256) der „Verslagen" heb ik de involutie beschouwd, waarvan de paren bestaan uit de transversalen van viertallen rechten, die uit de stralen van vier willekeurige waaiers worden gekozen. Nu wil ik eenige hiermede verwante involuties beschouwen.

§ 1. Ik ga vooreerst uit van twee waaiers $(A, \alpha) \equiv (a)$, $(B, \beta) \equiv (b)$ en een quadratische regelschaar $(c)^2$, gelegen op de hyperboloïde Γ^2. Een willekeurige rechte t ontmoet een straal a, een straal b en twee stralen c. Wordt aan t toegewezen de tweede transversaal t' der vier genoemde stralen, dan is daarmede een *quadratische involutie in de stralenruimte* bepaald.

Als t een waaier doorloopt, ontstaat in $(c)^2$ een involutie, waarvan de paren projectief overeenkomen met de stralen der waaiers (a) en (b).

Ik beschouw nu, meer algemeen, het geval, dat een quadratische involutie in $(c)^2$ op eenige wijs in projectief verband is gebracht tot de waaiers (a) en (b). De transversalen t, t' van de viertallen stralen a, b, c, c' zullen een regelvlak (t) vormen, waarvan ik den graad zal bepalen door na te gaan, hoeveel rechten t op de doorsnede van α en β rusten.

De projectieve waaiers $(a), (b)$ bepalen op $\alpha\beta$ twee projectieve puntenreeksen. Door elk der beide dekpunten (coïncidenties) gaat een rechte t. De overige op $\alpha\beta$ rustende rechten t liggen in α of in β.

Op de doorsnede van Γ^2 met α vormen de doorgangen der paren c, c' een involutie; de dragers der paren vormen een waaier (C, α), die projectief is met de puntenreeks welke de waaier (b) op α bepaalt, dus tevens met den waaier, welke die puntenreeks uit C projecteert. Daar elke der beide dekstralen (coïncidenties) op vier overeenkomstige stralen a, b, c, c' rust, liggen in α (en dan ook in β) twee stralen van (t). *Het regelvlak* (t) *is dus van den zesden graad.*

Het vlak α snijdt $(t)^6$ nog in een kromme α^4, die in A een dubbelpunt moet hebben, omdat een willekeurige straal a slechts door twee transversalen t, t' wordt gesneden. Daar de rechte AB, buiten

A en B, twee rechten t ontmoet,[1]) dus in A twee punten met $(t)^6$ gemeen heeft, moet A, en dan ook B, een *dubbelpunt* van het regelvlak wezen.

De kromme α^4 zendt zes raaklijnen door A; dus bevat $(t)^6$ zes dubbelstralen $t = t'$ der involutie (t,t').

De transversalen der stralenparen a, b vormen een quadratischen stralencomplex; immers, in een willekeurig vlak bepalen (a) en (b) twee projectieve puntenreeksen, en de verbindingslijnen van overeenkomstige punten omhullen een kegelsnede. Deze complex heeft vier stralen gemeen met de tweede op Γ^2 gelegen regelschaar $(\gamma)^2$; elk dier stralen rust op twee overeenkomstige stralen a, b, en tevens op de daaraan toegevoegde stralen c, c'. Het regelvlak $(t)^6$ heeft dus vier rechten gemeen met de hyperboloïde Γ^2.

§ 2. Laat men t den waaier (T,τ) beschrijven, dan valt het regelvlak $(t)^6$ uiteen in dien waaier (t) en een regelvlak $(t')^5$. *De transformatie* (t, t') *zet dus een waaier om in een regelschaar van den vijfden graad.*

Van de beide dekpunten der op $\alpha\beta$ gelegen projectieve puntenreeksen ligt nu het eene in $\alpha\beta\tau$; door het andere gaat een straal t'. In α (en in β) liggen dus weer twee stralen t'. De restdoorsnede van $(t')^5$ met α is een nodale α^3, met dubbelpunt in A. Elk snijpunt van α^3 met τ is doorgang van een straal t', die met den overeenkomstigen straal t is samengevallen. *De dubbelstralen der involutie* (t, t') *vormen dus een kubischen complex.*

Dit laatste kan als volgt worden bevestigd. Met Γ^2 heeft $(t')^5$ vier stralen γ gemeen (§ 1) en verder een ruimtekromme γ^6. In een snijpunt C van γ^6 met τ wordt een straal t gesneden door den overeenkomstigen straal t'; dus ligt C op een dubbelstraal $t' = t$, en de tweede op dien dubbelstraal rustende rechte van $(c)^2$ ontmoet τ in een punt C', dat ook op γ^6 moet liggen. De zes doorgangen van γ^6 liggen dus in paren op drie tot (T, τ) behoorende dubbelstralen.

§ 3. Een straal t_A door A wordt gesneden door een straal b en door twee stralen c, c' van $(c)^2$. Elke rechte t', die b, c en c' snijdt, ontmoet op α een bepaalden straal a, is dus toegewezen aan t_A; derhalve is de straal t_A *singulier.*

Het raakvlak in A aan de hyperboloïde $(b\,c\,c')$ snijdt α volgens een rechte a, welke $(b\,c\,c')$ aanraakt. De transversalen der vier stralen a, b, c, c' vallen dus samen. Elke straal t_A is dus ook als dubbelstraal te beschouwen; de *kubische complex der dubbelstralen*

---

[1]) Zij liggen in de dekvlakken (coïncidenties) der projectieve vlakkenbundels, die (a) en (b) uit AB projecteeren

heeft dus in A en B *hoofdpunten* en, analoog, in α en β *hoofdvlakken*.

Uit het bovenstaande volgt, dat de *sterren* A en B, benevens de *velden* α en β, uit *singuliere stralen der involutie* (t, t') bestaan.

Een straal b bepaalt met A een waaier (t_A) en daardoor tevens een quadratische involutie I^2 in de regelschaar $(c)^2$. Zij nu in het vlak λ een waaier (l) met top L gegeven. Aan elk punt van $\beta\lambda$ wordt, door middel van I^2, op de kegelsnede $(\Gamma^2\lambda)$ een involutie J^2 bepaald. Door L gaat dus een straal l, die de doorgangen verbindt van twee stralen c, c', welke met b een transversaal t_A bepalen. Wordt deze straal l toegewezen aan den straal l', die b snijdt, dan ontstaat in (l) een projectiviteit. Elke der beide dekstralen is dan een straal t', die aan een straal t_A is toegewezen. Hieruit volgt dat de quadratische regelscharen $(t')^2$, die aan de *singuliere stralen* t_A zijn toegevoegd, een *quadratischen stralencomplex* vormen.

Drie andere *quadratische complexen* $\{t'\}^2$ behooren bij de ster $[t_B]$ en de stralenvelden $[t_\alpha]$ en $[t_\beta]$.

De waaier (T, τ) bevat van elken dezer complexen twee stralen; in verband hiermede dragen A, B, α en β ieder twee stralen t' van het regelvlak $(t')^5$, waarin (t) door de involutie (t, t') wordt omgezet. Hierdoor blijkt opnieuw, dat $(t')^5$ dubbelpunten in A, B, dubbelraakvlakken in α, β heeft.

De straal AB snijdt twee bepaalde stralen c, c', maar *alle* stralen a en b. Aan $t \equiv AB$ zijn dus toegewezen alle stralen der bilineaire congruentie, welke c en c' tot richtlijnen heeft [1]). Analoog is $t \equiv \alpha\beta$ toegevoegd aan ∞^2 stralen t'. De involutie (t, t') bezit dus *twee hoofdstralen*, AB en $\alpha\beta$.

§ 4. Ook de rechten der regelschaar $(\gamma)^2$ zijn *hoofdstralen*, want een rechte γ snijdt twee bepaalde stralen a en b, maar *alle* stralen c; elke transversaal t' van a en b rust op twee stralen c, is dus aan $t \equiv \gamma$ toegevoegd.

De involutie (t, t') heeft nog andere *singuliere stralen*. Wanneer het snijpunt S van twee stralen a en c gelegen is in het vlak σ door twee stralen b en c', dan bestaat de waaier (S, σ) uit stralen s, die aan elkaar zijn toegewezen, dus uit singuliere stralen. Nu wordt een vlak σ in twee punten S gesneden door de kegelsnede α^2, welke Γ^2 met α gemeen heeft. Elk raakvlak van Γ^2 bevat dus twee waaiers (s).

In een willekeurig vlak liggen twee punten S, dus twee stralen s; door een willekeurig punt gaan twee vlakken σ, dus vier stralen

[1]) De aan AB toegevoegde congruentie $[t']$ behoort tot de doorsnede der aan de sterren $[t_A]$ en $[t_B]$ toegewezen complexen.

s. Daar men een tweede stelsel van singuliere stralen vindt als men in de bovenstaande beschouwing *a* met *b* verwisselt, *vormen de waaiers van singuliere stralen twee congruenties* (4, 2).

De toppen der waaiers (*s*) liggen op de kegelsneden α^2 en β^2, hun vlakken omhullen de hyperboloïde Γ^2.

§ 5. Om tot een *andere involutie* in de stralenruimte te geraken, beschouw ik twee quadratische regelscharen $(c)^2$ en $(d)^2$, gelegen op de hyperboloïden Γ^2 en Δ^2. Elke twee stralen c, c' bepalen met elke twee stralen d, d' een paar transversalen t, t', en deze vormen een paar van de bedoelde involutie.

Ik onderstel nu, dat op Γ^2 een involutie (c, c') is gegeven, die op eenige wijs projectief overeenkomt met een op Δ^2 gegeven involutie (d, d').

De transversalen der paren d, d' vormen een lineairen stralencomplex; immers in een vlak λ bepalen de doorgangen D, D' dier paren een involutie op den doorgang van Δ^2 en de dragers der puntenparen D, D' vormen dus een waaier. Deze complex bevat twee rechten λ van de tweede op Γ^2 gelegen regelschaar. Er zijn dus twee transversalen t van paren d, d', die op *alle* rechten c rusten. Op een willekeurige rechte c rusten verder de beide transversalen van de paren in $(c)^2$ en $(d)^2$, die door c zijn bepaald. Dus vormen de transversalen t, t' der paren c, c' en d, d' een *regelvlak van den vierden graad.*

Blijkbaar bevat $(t)^4$ ook twee stralen der regelschaar $(\delta)^2$ van Δ^2.

§ 6. Met de stralen t van een *waaier* (T, τ) komt dus een *regelvlak* $(t')^8$ overeen, dat twee rechten γ en twee rechten δ bevat. Het snijdt de doorsnede ϱ^4 van Γ^2 en Δ^2 in 12 punten, waarvan 8 op de zooeven genoemde vier rechten liggen; de overige vier dragen ieder een straal c en een straal d, die τ in twee met T collineair gelegen punten snijden.

Dit kan als volgt worden bevestigd. Door elk punt van ϱ^4 gaat een rechte c en een rechte d. Hun doorgangen C en D op het vlak τ bepalen op de doorgangen γ^2 en δ^2 van Γ^2 en Δ^2 twee puntenreeksen in verwantschap (2, 2). Dus zijn de rechten TC en TD aan elkaar toegevoegd in een verwantschap (4, 4); van de 8 dekstralen gaan 4 naar de snijpunten van γ^2 met δ^2; de andere 4 snijden elk een paar c, d, waarvan het snijpunt op ϱ^4 ligt, dus een straal t' draagt, die aan een straal t is toegewezen.

Het regelvlak $(t')^8$ heeft met Γ^2, behalve de reeds genoemde twee rechten γ, een ruimtekromme γ^4 gemeen. Deze snijdt τ in 4 punten, die paarsgewijs met T collineair liggen (§ 2). Hieruit blijkt, dat de *dubbelstralen der involutie* (t, t') *een quadratischen complex vormen.*

De enkelvoudige richtlijn van $(t')^3$ ligt in τ, de dubbelrechte gaat door T.

§ 7. De rechten der regelscharen $(\gamma)^2$ en $(\delta)^2$ zijn blijkbaar (§ 4) *hoofdstralen* van (t, t'). Aan elke dier rechten is een *bilineaire congruentie* toegewezen, die twee rechten c of twee rechten d tot richtlijnen heeft. Daar elke rechte c richtlijn is voor twee (1, 1), gaan door elk van haar punten twee waaiers (t'). De congruenties (1, 1) behoorende bij de hoofdstralen vormen dus *twee quadratische complexen.*

Op analoge wijs als in § 4 vinden wij een congruentie van singuliere stralen. Elk punt van de doorsnede ϱ^4 der hyperboloïden Γ^2 en Δ^2 is de top van een waaier (S, σ) van aan elkaar toegewezen, dus singuliere, stralen s. Immers, het vlak σ door de rechten γ en δ, welke in S samenkomen, snijdt ϱ^4 nog in een punt C van γ, een punt D van δ en een punt E; blijkbaar behoort CE tot $(c)^2$, DE tot $(d)^2$. Elke straal van (S, σ) rust in S op twee rechten c', d' en snijdt de rechten $c \equiv CE$ en $d \equiv DE$; dus bestaat (S, σ) uit aan elkaar toegevoegde stralen s der involutie (t, t').

Daar de toppen der waaiers S op ϱ^4 liggen, terwijl de vlakken σ een ontwikkelbaar oppervlak der vierde klasse omhullen, *vormen de waaiers van singuliere stralen een congruentie* (4, 4).

§ 8. Elke drie stralen c van een *kubische regelschaar* $(c)^3$ bepalen met elken straal van een waaier (a) twee transversalen, die een paar vormen van een involutie der stralenruimte.

Door de stralen van een waaier (t) worden de stralen van $(c)^3$ in een I^3 gerangschikt, waarvan de groepen projectief aan de stralen a zijn toegewezen. Eerst worde weer ondersteld, dat zulk een toevoeging op een willekeurige wijs tot stand komt; de transversalen t, t' van de viertallen stralen vormen dan een nader te beschouwen regelvlak.

Op de nodale kromme γ^3, volgens welke het regelvlak Γ^3 door het vlak α wordt gesneden, bepalen de drietallen rechten c een I^3. De kegelsneden, welke twee groepen dezer I^3 met het dubbelpunt D en een ander punt B van γ^3 verbinden, hebben nog twee buiten γ^3 gelegen punten B', B'' gemeen. De groepen der I^3 worden dus ingesneden door den kegelsnedenbundel met basispunten D, B, B', B''. Alleen het lijnenpaar $DB, B'B''$ levert een groep die uit drie collineaire punten bestaat. Hieruit blijkt, dat het vlak α *een* rechte van het regelvlak (t) bevat; immers de rechte $t \equiv B'B''$ rust niet alleen op een drietal stralen c, maar ook op den daaraan toegewezen straal a.

Analoog gaat ook door A een rechte van (t). Daar elke straal

α nog door twee transversalen t, t' wordt gesneden, is *het regelvlak* (t) *van den vierden graad.*

De kromme α^3, welke $(t)^4$ nog met α gemeen heeft, zendt vier raaklijnen door A; op $(t)^4$ liggen dus vier dubbelstralen der involutie (t, t').

Laat men t een waaier (T, τ) beschrijven, dan valt $(t)^4$ uiteen in (t) en een kubische regelschaar $(t')^3$. Ook nu bevat α een der stralen t'; de doorgangen der overige rechten t' vormen een kegelsnede α^2, die door A gaat en τ op de dubbelstralen ontmoet, welke tot den waaier behooren.

De dubbelstralen der involutie (t, t') *vormen dus een quadratischen complex.*

§ 9. Zij a_e de straal van (A, α), die door de enkelvoudige richtlijn e van $(c)^3$ wordt gesneden. Elke rechte t', die op a_e rust, is in (t, t') aan e toegevoegd. Met de rechte $t \equiv e$ komen dus overeen alle stralen van een *specialen lineairen complex.*

Analoog is de dubbelrechte d van $(c)^3$ toegevoegd aan alle stralen van den *specialen lineairen complex*, die den op d rustenden straal a_d tot as heeft.

Ook in deze involutie (t, t') zijn de stralen t_A door A *singulier* en ieder toegevoegd aan de stralen van een regelschaar, welke drie rechten c tot richtlijnen heeft, en de rechten d en e zal bevatten.

Analoog zijn de stralen t_α, in het vlak α, *singulier*, en ieder toegevoegd aan de stialen van een regelschaar, waartoe d en e behooren.

Beschouwen wij nu het stelsel der hyperboloïden (H) die ieder door drie rechten c zijn bepaald. De exemplaren, welke door een punt P gaan, rangschikken de rechten c in de groepen van een kubische involutie van den tweeden rang. De involuties I^2_3, die aldus bij de punten P, P', P'' behooren, hebben *een* groep gemeen; derhalve vormen de hyperboloïden H een *complex.* De hyperboloïden, die bij de stralen t_A behooren, dus door A gaan, zijn dan tot een *net* vereenigd, waarvan alle exemplaren de rechten d, e en de transversaal t_0 van A over d, e gemeen hebben. Door een punt P gaan dus de exemplaren van een bundel, en deze hebben nog de transversaal door P over d, e gemeen; de rechten t' door P, toegevoegd aan stralen der ster $[A]$, vormen dus een waaier in het vlak $(P\, t_0)$.

§ 10. Er zijn nog andere singuliere stralen. Elk vlak ε door e bevat twee rechten c. In ε ligt een waaier van stralen t, die tot top heeft het snijpunt E van e met den straal a_e; deze stralen zijn *singulier*, omdat zij in E op een derde rechte c rusten, dus alle met elkaar overeenkomen.

De ster $[E]$ *is dus samengesteld uit* ∞^1 *waaiers van singuliere stralen.*

Het vlak δ door d en a_d bevat een rechte c_0; door elk punt D van d gaan twee rechten c, dus ∞^1 rechten t, die tevens op c_0 en a_d rusten. Hieruit volgt, dat het *stralenveld* $[\delta]$ *is samengesteld uit* ∞^1 *waaiers van singuliere stralen.* Deze hebben hun toppen op de rechte d.

§ 11. Ten slotte beschouwen we een regelvlak Γ^4 met dubbelkromme ϱ^3. De lineaire complex, welke door vijf rechten c van Γ^4 wordt gelegd, bevat alle rechten c. De vier stralen c, die op een rechte t rusten, ontmoeten tevens de rechte t', die door dien complex aan t wordt toegevoegd. De involutie (t, t') bestaat dan uit de paren toegevoegde richtlijnen van een lineairen complex; haar dubbelstralen zijn de stralen van dien complex.

Een andere bekende involutie (t, t') wordt gevormd door de paren wederkeerige poollijnen van een hyperboloïde. Haar dubbelstralen vindt men in de beide regelscharen der hyperboloïde.

Physiologie. — De Heer G. van Rijnberk biedt eene mededeeling aan: „*Kleinere bijdragen tot de vergelijkende physiologie.* IV. *Over de voortbeweging der landslak Helix aspersa.*" [1])

Inleiding.

Het heeft de natuuronderzoekers sedert onheuglijke tijden met verbazing en bewondering vervuld, te aanschouwen hoe slakken over den gladsten ondergrond, of zelfs aan den spiegel van het water, gelijkmatig kunnen voortkruipen, zonder dat men ergens aan haar lichaam iets aangaande de oorzaak van de beweging kan ontdekken. Laat men een landslak over een glazen plaat kruipen en beziet men daardoor heen, en dus van onderen, den „voet" van de slak, dan bemerkt men echter bij bijkans alle soorten, dat het tegen de glasplaat aangedrukte ondervlak daarvan, doorloopen wordt door strepen, welke loodrecht op de lengteas van den voet liggen. Deze strepen zijn klaarblijkelijk de uitdrukking van een in den voet golfsgewijze voortschrijdende spierwerking en worden daarom algemeen „kruipgolven" of kortweg „golven" genoemd. (De „pedal waves" der Engelsche, de „ondes pédieuses" der Fransche schrijvers). Reeds de oude natuuronderzoeker Lister (1694) heeft ingezien, dat deze golven in verband staan met de voortbeweging, en ook Bergmann en Leuckart hebben in 1855 dat verband nauwkeurig beschreven. In den loop der tijden hebben tal van onderzoekers hun aandacht aan deze golven gewijd. Eenige, voornamelijk Duitsche auteurs hebben vooral den physiologischen grondslag ontleed, en de werking, innervatie en coordinatie der dezelve voortbrengende spieren nagegaan. Andere, voornamelijk Fransche en Americaansche onderzoekers, hebben meer de aandacht gewijd aan de werktuigkundige beteekenis der golven en haar aard en voorkomen bij de verschillende soorten slakken beschreven. Daar ik hier slechts een zeer kleine bijdrage, over één enkel zéér bijzonder vragelijk punt kom brengen, schijnt het mij onevenredig de geheele literatuur hier uitvoerig te bespreken. Ik zal mij er dus toe bepalen, slechts die onderzoekingen hier aan te halen, welke rechtstreeks met mijn proeven in verband staan, en dat telkens daar te doen, waar de beschrijving dier proeven dat te

[1]) De bijdragen I en II verschenen Folia Neurobiologica V. 1911. 244—250. III verscheen in „Bijdragen tot de Dierkunde" uitgegeven door het Kon. Zool. Gen. Amsterdam. 1914.

pas brengt. Wèl zal ik echter aan het eind van deze bijdrage de literatuuropgaven, voorzien van een uiterst korte inhoudsontleding, zoo volledig mogelijk bijvoegen, opdat een ieder bij wien dit korte stukje belangstelling voor het onderwerp mocht wekken, gemakkelijk een overzicht van de voorhanden kennis kan krijgen. Ik acht mij hiertoe des te meer gerechtigd, aangezien in het groote handboek der vergelijkende physiologie, uitgegeven door WINTERSTEIN, hetwelk men als het eenige uitvoerige moderne naslagwerk op dit gebied pleegt te raadplegen, de bewerker van het onderwerp R. DUBOIS REYMOND, de moderne Fransche en Americaansche onderzoekers niet noemt.

Beschrijving der kruipgolven bij Helix aspersa.

Laat men een slak tegen een glazen plaat kruipen, en beziet men de voetzool daar door heen, dan bemerkt men het volgende.



Fig. 1. De voetgolven van Helix aspersa, door een glasplaat gezien.

Behalve de rand verschijnt de geheele oppervlakte van de voetzool gestreept, doordat de licht grijsroze kleur daarvan onderbroken is door donkere dwarsbanden welke van den eenen naar den anderen rand loopen. Bij een slak (N°. 4 van mijn materiaal) telt men gelijktijdig 8 van dergelijke dwarsbanden, elk ongeveer 2 m.M. breed (in de kop-staartrichting). In het midden van de voetzool liggen zij met ongeveer 7 m.M. tusschenruimte achter elkaar. (Vglk. fig. 1.).

Deze dwarsbanden liggen niet onbeweeglijk, doch verplaatsen zich van het uiterste staarteind, waar zij ontstaan, naar het kopeinde van den voet, waar zij tegen den kop te stranden komen, voort. In de terminologie van VLÈS (1907) zijn het rechtstreeksche golven van de eerste orde (ondes pédieuses monotaxiques directes).

Om een voorstelling te geven van de frequentie der golven en van de verhouding harer frequentie tot de snelheid van voortbeweging der slakken, geef ik enkele cijfers:

30 Mei 1918. 11 uur ochtend. Temp. 12° C.

Slak	N°. 3.	In 45″	stranden	23	golven	aan	den	kop
,,	,, 8.	In 30″	,,	17	,,	,,	,,	,,
,,	,, 1.	In 29″	,,	17	,,	,,	,,	,,
,,	,, 6.	In 31″	,,	18	,,	,,	,,	,,
,,	,, 2.	In 30″	,,	17	,,	,,	,,	,,
,,	,, 5.	In 24″	,,	17	,,	,,	,,	,, ;

De afgelegde weg is in het laatste geval 2 c.M.

30 Mei 1918. 2½ uur des namiddags. Temp. 19° C.

Slak N°. 4, legt in 22″ een afstand van 2.3 c.M. af. Gedurende dien tijd zijn 17 golven bij den kop aangekomen.

Slak N°. 10, legt in 23″ een afstand van 2.2 c.M. af. Gedurende dien tijd zijn 17 golven aan den kop gestrand.

Uit de vergelijking van het aantal golven, per eenheid van tijd, in de ochtenduren, bij een temperatuur van 12° C. (ongeveer 34 golven per 1′) en in den namiddag van denzelfden dag, bij een temperatuur van 19° C. (ongeveer 46 per 1′) blijkt dat de frequentie bij stijgende temperatuur toeneemt. De afgelegde weg is dan grooter. (5 c.M. bij 12° C.; 6.2 c,M. bij 19° C. per 1′).

Aard der kruipgolven.

De algemeene opvatting omtrent de kruipgolven is, dat in het dichte spiervezelnet van den voet, plaatselijke verkortingsgolven voortschrijden. Deze golven van contractie of vermeerderden tonus, betreffen de langspiervezels.

Locomotorische beteekenis der kruipgolven.

Er bestaan talrijke onderstellingen over de vraag op welke wijze de voetgolven de slak doen voortbewegen. De allereenvoudigste is die van VON UEXKÜLL (1909) welke aanneemt, dat het ondervlak van den voet met een mechanische inrichting, te vergelijken met de borstels van den aardworm, voorzien is, welke beweging in de voorwaartsche richting toelaten, in de achterwaartsche tegenwerken.

De plaatselijke spierverkortingen zouden dus elk voor zich, het naar achteren gelegen deel van den voet naar voren trekken, terwijl het naar voren gelegen deel belet zou worden, naar achteren te worden verplaatst. Von Uexküll steunt deze opvatting op de waarneming, dat men, wanneer men een slak welke op een glasplaat zit, heen en weer schuift, door haar bij haar huisje te pakken, men haar gemakkelijker naar voren, dan naar achteren kan doen verplaatsen. Parker (1911) ontkent dit bij Helix pomatia en Limax maximus. Ik zelf vind, dat het door v. Uexküll aangegeven verschil, bij Helix aspersa buitengemeen duidelijk is. En men kan ook objectieve gegevens voor dit verschil aanvoeren. Ik heb daartoe aan slakken aan het voorste en achterste gedeelte van het huisje, een aan een plaatje bevestigd haakje gelakt. Door middel van een eenvoudig briefwegertje met veer, kon men nu vaststellen, hoeveel kracht, uitgedrukt in grammen, er noodig was om de slakken achter- resp. vóóruit te trekken. Bij een kruipende slak vond ik dat minder dan 5 G. voldoende was om de slak sneller voorwaarts te trekken dan zij van te voren kroop. Haakte ik het toestelletje aan het achterste haakje, dan kon de slak de veer door haar voorwaartsche kruipbeweging en het met scheuten vooruittrekken der schelp tot op ± 20 G. spannen. Trok ik dan actief naar achteren dan gelukte het pas bij ± 40 G. om de slak van haar basis (een glasplaat) af te trekken. Bij een door een mechanischen prikkel onbeweeglijk gemaakte slak gelukte het bij ± 5 G. eveneens haar vooruit te trekken, terwijl om haar achteruit te trekken steeds van 25—45 G. noodig waren. Herhaalde contrôleproeven met verschillende exemplaren gaven steeds dezelfde uitkomst.

Op grond van dit verschil in beweegbaarheid, zou ik niet aarzelen v. Uexküll's onderstelling, behoudens een nader te vermelden voorbehoud, als juist te aanvaarden.

Ik voeg hier nog een ander feit aan toe, dat indirect v. Uexküll's waarneming en de beteekenis welke hij daaraan toekent, kan bevestigen. *De door mij bestudeerde slakkensoort kan niet achterwaarts kruipen.* Althans ik ben er nooit in geslaagd er een hiertoe te nopen. Brengt men aan het vooreinde van het dier een prikkel aan, welke het best door terugdeinzen van het geheele dier ontweken kon worden, dan bepaalde de slak zich er toe den kop terug te trekken, het lichaam te krommen en zóó den prikkel te ontwijken. Verhitte ik den bodem waar de slak op kroop, dan lichte deze den kop en het voorste einde op, zwaaide dat heen en weer, kromde het lichaam sterk ter zijde en kroop weer verder in een richting loodrecht op die welke zij volgde vóór zij aan de heete plek was genaderd. In

geen enkel geval heb ik ooit een achterwaarts kruipen kunnen bemerken. Deze onmogelijkheid om achteruit te kruipen moet wel samenhangen met het feit, dat de spierwerkingen der kruipgolven op zich zelve geen verplaatsing van het dier verwekken, doch dit slechts kunnen, door een zuiver passief mechanische inrichting welke een glijden van de voetzool over den bodem in één richting (de voorwaartsche) bevorderen, in de andere (de achterwaartsche) belemmeren. De richting waarin de kruipgolven zich in den voet voortplanten is hiervoor onverschillig: bij tal van slakken loopen deze van voren naar achteren, terwijl de slak zich toch voorwaarts beweegt. Juist dit feit, dat de richting waarin zich de kruipgolven voortplanten van geen beteekenis is voor de beweging van slakken in voorwaartsche richting pleit dunkt mij voor de aanwezigheid van een passief mechanisch hulpmiddel, dat de richting der verplaatsing van het lichaam bepaalt. Terloops mag hier nog even gewezen worden op het feit dat ik, afgezien van de kruiprichting, nooit achterwaarts gerichte golven in de voetzool zag. Blijkbaar kan in den slakkenvoet, evenmin als in den darm van zoogdieren, antiperistaltiek voorkomen.

Een andere vraag betreft de wijze waarop de slakken aan hun ondergrond bevestigd zijn en hoe deze bevestiging ter plaatste der kruipgolven mogelijk verschilt van die in de tusschenruimten tusschen de golven. In het algemeen is het duidelijk, dat zij er in zekeren zin tegen aan kleven, door het slijm dat zij afscheiden. Voorts is echter tevens duidelijk, dat de luchtdruk er een groot aandeel aan heeft. Een slak hangt en kruipt zonder bezwaar aan den onderkant van een glazen plaat; men kan, door een huisjesslak bij de schelp te pakken, een betrekkelijk zwaar voorwerp, waarop zij zich bevindt, mede op tillen. De voet werkt dus als zuiger. Het is echter zeker, dat dit als-zuiger-werken bevorderd wordt door de wijze waarop de slak haar voet op den ondergrond plaatst. Trekt men een stijf tegen een glasplaat aangezogen slak daarvan af, en drukt men haar dadelijk daarna er weer tegen aan, dan zuigt de voet zich volstrekt niet tegen den ondergrond vast. Dit geschiedt pas wanneer de slak zich actief daaraan gehecht heeft, welk oogenblik gekenmerkt is door het ontstaan der kruipgolven. Zoolang deze voortbestaan bevindt zich de voetzool krachtig tegen den achtergrond aangezogen. Met de kruipgolven gaat dus samen een aanzuiging van de voetzool aan den ondergrond.

Nu rijst hier echter de vraag, of bij het voortkruipen, alle plaatsen van den voet, even sterk tegen den ondergrond aandrukken of daarvan af getrokken zijn. En in het bijzonder heeft men zich afgevraagd, of de voet, op de plaatsen waar de golven er over heen

trekken, uitgebocht of ingetrokken is. Is het eerste het geval, zooals BIEDERMANN en v. UEXKÜLL meenen, dan zijn dus de tusschenruimten tusschen twee golven van den ondergrond afgetrokken en kunnen een zuigende werking ontvouwen. Is het laatste juist, (dat de voet ter plaatse der golven ingetrokken is) zooals PARKER meent, dan oefenen de golven zelve een zuigwerking uit.

Ik heb hieromtrent twee waarnemingen gedaan. Wanneer een slak onder aan een, ongeveer waterpas gehouden, glasplaat hangt en men haar door het glas heen, van boven bekijkt, verschijnt de teekening der kruipgolven verschillend, al naar de invalsrichting van het licht. Houdt men de slak zóó, dat de kop naar het licht toegewend is, dan verschijnt vlak vóór (d.i. kopwaarts van) elke donkere golf,

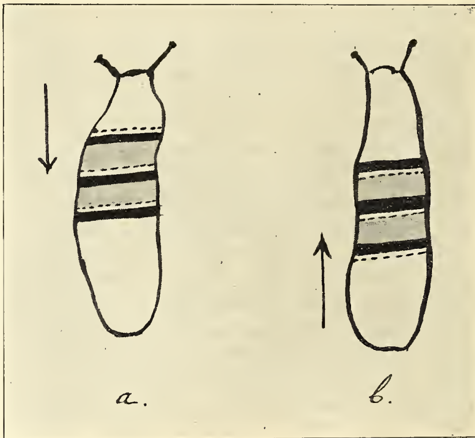


Fig. 2. Schema der voetgolven: *a*. bij van voren invallend licht, *b*. bij van achteren invallend licht. (Slechts drie golven zijn afgebeeld.)

een smalle zoom welke niet alleen lichter is dan de golf, maar ook duidelijk lichter dan de tusschenruimten tusschen twee golven. Houdt men daarentegen de slak met het staarteind gewend naar het licht, dan verschijnen deze smalle lichte randjes achter (d.i. staartwaarts van) de donkere golven. Hieruit blijkt, dat men de lichte tusschenruimten tusschen twee donkere golven, als dalletjes moet opvatten en de golven zelf als heuveltjes, waarvan, bij éénzijdige verlichting (loodrecht op hun verloop) de naar het licht gewende helling licht verschijnt. Het schema van fig. 2 verduidelijkt dit verschijnsel.

Een tweede waarneming betreft den druk waarmede de voetgolven en de tusschenruimten zich onderscheidelijk aan den ondergrond hechten. Ik nam hiervoor een glasplaat welke in één punt doorboord was. Op het gaatje was een glazen buisje gekit, dat dicht bij de kitplaats haaksch omgebogen was en dus verliep in een vlak ten naaste bij evenwijdig aan de glazen plaat. Plaatste men de glasplaat met het buisje naar boven, op drie pootjes rustend op een z.g. nivelleerplaat, dan kan men het buisje ten naaste bij waterpas brengen. Men kon dan een er in gebrachten druppel van een lichte vloeistof (bijv. alcohol) er onbeweeglijk in houden. Het stukje buis tusschen de uitmondingsplaats in het gaatje van de glasplaat en den druppel, vormde dan een soort luchtmanometer en de licht beweeglijke druppel vormde naar éene zijde de afsluiting ervan en diende tevens als index (Fig. 3). Liet men nu een slak van onderen tegen de glasplaat

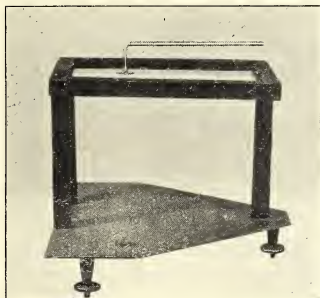


Fig. 3. Toestelletje om de drukverschillen onder de voetzool, ontstaan bij het voortkruipen, aan te kunnen toonen.

kruipen, dan begon de druppel heen weer te schommelen zoodra en zoolang de voet van de slak over het gaatje schoof. Dit duurde zoolang als de slak zich onder het gaatje kruipende bevond. Hieruit blijkt dus al vast duidelijk, dat tusschen het ondervlak van den voet en den ondergrond waarop een slak voortkruipt, de drukking plaatselijk en afwisselend verschilt.

Met een loep of een kijker beschouwd, waren de schommelingen niet alleen gemakkelijk te tellen, doch gelukte het ook gemakkelijk enkele eigenaardigheden ervan vast te stellen.

Wat het aantal schommelingen betreft kon ik zonder moeite vaststellen, dat dit in de eenheid van tijd gelijk was aan het aantal golven dat een ander waarnemer (Mej. L. Schut) tegelijkertijd onder

het gaatje kon zien heen trekken. De voortschrijdende golven verwekken dus voortschrijdende plaatselijke drukverschillen tusschen den ondergrond en het ondervlak van den voet.

Er bleef nu nog over, vast te stellen, of de donkere golven dan wel de lichtere tusschenruimten beantwoorden aan de gebieden van plaatselijke drukverlaging. De nauwkeurige beschouwing der schommelingen van den indexdruppel, hebben hieromtrent het volgende geleerd. De door den druppel vertoonde bewegingen zijn regelmatig en rhytmisch en bestaan achtereenvolgens in een snel zich iets in de richting van het gaatje af verwijderen, om onmiddellijk daarop wel weer in de richting naar het gaatje toe te naderen, om dan een oogenblik in rust te zijn. Daarna begint de zelfde cyclus van drie phasen opnieuw. Vertolkt men deze verplaatsingen van den druppel in de drukveranderingen welke dezelve teweegbrengen, dan blijken dus de phasen van lagere drukking langer te duren, dan die van hoogere. En waar de donkere, op den voet zichtbare golven, belangrijk smaller zijn, dan de lichte tusschenruimten, schijnt mij de gevolgtrekking gerechtvaardigd, dat ter plaatse der donkere golven het ondervlak van den voet convex uitgebocht is, en meer tegen den ondergrond drukt, terwijl het grondvlak van den voet in de lichte tusschenruimten iets van den ondergrond is afgezogen.

De beide hier beschreven reeksen van waarnemingen steunen elkander dus en vullen elkaar aan. De donkere contractiegolven zijn convex uitgebochte heuvelruggetjes en drukken tegen den ondergrond aan. De lichte tusschenruimten waar de langspieren slap zijn, zijn concave dalletjes, waar het voetvlak van den ondergrond is afgetrokken en een lagere drukking heerscht.

Samenvatting: de bewerktuiging der kruipbeweging.

Wanneer een *Helix Aspersa* voortglijdt, is het ondervlak van haar voet, behalve aan den rand, welke overal rondom tegen het grondvlak aansluit, slechts over enkele smalle strooken in aanraking met den bodem, en wel ter plaatse van de donkere golven. Deze liggen waarschijnlijk onder die afdeeling der langsspieren, welke zich in verkorting bevinden, dus plaatselijk verdikt zijn, en daardoor de voethuid een weinig convex naar buiten uitstulpen. In de tusschenruimten tusschen telkens twee golven raakt de voet den bodem niet.

De voortbeweging geschiedt nu gedeeltelijk doordat elke zich verkortende langsspierafdeeling, zich zelf en der achter gelegen afdeeling aan den rest van den voet naar voren (kopwaarts) trekt, daar deze richting den minsten weerstand aan de verplaatsing biedt.

Dit zich naar voren trekken van de gecontraheerde spierafdeelingen, verklaart het reeds door BIEDERMANN (1905) beschreven, door PARKER (1911) bevestigde verschijnsel, dat de huid, ter plaatse waar de donkere golven er onder door trekken, stootsgewijze voorwaarts schiet, terwijl zij zich in de tusschenruimten niet of veel langzamer verplaatst.

Het is echter duidelijk, dat men op deze wijze slechts het naar voren getrokken worden van elk meer naar achteren gelegen deel van den voet, ten opzichte van elk meer naar voren gelegen deel kan verklaren, en dat dus bijv. begrijpelijk wordt, hoe een langgerekte voet zich op deze wijze verkorten kan, waarbij het staarteinde het kopeind nadert. Dat echter dit kopeind en de geheele voet zelf zich naar voren verplaatsen, kan men zóó niet verklaren. Daarvoor moet men de onderstelling te hulp roepen, dat terwijl de kruipgolven door verkorting zich naar voren trekken, in de tusschenruimten zich een proces afspeelt waardoor deze zich verlengen, en dus wat vóór hen ligt, naar voren stuwen, in de richting van den minsten weerstand. Deze verlenging kan geschieden door de samentrekking der dwarsspieren. Dat een slak inderdaad zijn lichaam zeer sterk kan uitrekken, bemerkt men bijv. wanneer een slak, al kruipende aan den rand van een tafel is gekomen. Dan steekt zij den kop naar voren en zwaait dien heen en weer om een nieuw steunvlak te zoeken. Dat deel van het lichaam en den voet dat zich vlak achter den kop bevindt is dan smal en lang uitgestrekt als de hals van een giraffe, terwijl de rest van de voetzool nog aan het tafelblad vastgezogen zit.

Ik stel mij nu voor, dat men het kruipen van een slak door het samengaan van voortschrijdende contractiegolven der langsspieren met parallel daarmede voortschrijdende contractiegolven der dwarsspieren kan verklaren. De eerste trekken zich zelf en wat achter hen ligt, aan wat vóór hen ligt naar voren. De tweede stuwen zich zelf en wat vóór hen ligt, aan wat achter hen ligt, eveneens naar voren. Bovendien bewerken deze golven een plaatselijk zich iets van den bodem verheffen van de voetzool. Dat deze beide golfbewegingen het lichaam naar voren verplaatsen, wordt mogelijk gemaakt door de door VON UEXKÜLL ontdekte inrichting der voetzool, welke de verschuiving hiervan in voorwaartsche richting begunstigt. De voortbeweging wordt bovendien ongetwijfeld vergemakkelijkt door het feit, dat de voetzool slechts langs enkele smalle strooken aan het grondvlak raakt, waardoor de wrijving betrekkelijk gering moet zijn.

Ik sluit mij dus geheel bij de opvatting van CARLSON (1905) aan, welke de normale voortbeweging der landslakken als in beginsel geheel gelijkwaardig beschouwt met de bijna sprongsgewijze „galop”,

in bijzondere omstandigheden vertoond door Helix dupetitthouarsii. Bij diens „galop" blijkt ontwijfelbaar, dat de voortbeweging geschiedt doordat de voet op de strooken welke den bodem raken, wordt voortgetrokken, terwijl hij in de laag van den bodem opgetrokken, breede tusschenruimten, actief gestrekt wordt door contractie der dwarsche spieren, waardoor het lichaam plaatselijk langer en dunner wordt.

Bij de normale voortbeweging vindt geheel hetzelfde plaats. Alleen worden de ruimten tusschen twee verkortingsgolven der langsspieren niet zoover van het grondvlak opgetrokken en het lichaam daar niet zoo krachtig gestrekt. Vandaar dat de voortbeweging veel langzamer geschiedt en de voetzool schijnbaar nergens van den bodem af is. Dat zij ter plaatse der lichte tusschenruimten, toch inderdaad iets van den bodem is afgetrokken, bewijzen de hierboven weergegeven waarnemingen.

LITERATUUR.

1. M. Lister. *Excercitatio anatomica in qua de cochleïs, maxime terrestribus et limacibus agitur*. Londini. 1694. [Vlès, n⁰. 18, haalt een langen en belangwekkenden passus aan waaruit blijkt, dat Lister het verband tusschen voetgolven (undulationem quam in cochlearum limacumque pede observare licet) en voortbeweging duidelijk inzag Voorts, dat hij met doorsnijdingsproeven van den voet bewezen heeft, dat die golven niet bestaan uit, of voortgebracht worden door den omloop van een „geest" (spiritus) noch van een vloeistof (humor). Ten slotte, dat de voetzool slechts op enkele plaatsen aan den bodem raakt; deze plaatsen trekken die welke los van den grond zijn naar zich toe en daar de plaatsen die aan den bodem kleven door het slijm, en die welke er los van zijn, afwisselen, schuift het geheele dier als een getand rad vooruit en vervangt op die wijze het afwisselend zetten en heffen van voeten].

2. Bergmann und Leuckart. *Anatomisch physiologische Uebersicht des Tierreiches*. 1855. [Volgens Biedermann, n⁰. 12, geven deze schrijvers op blz. 380 van hun boek een uitmuntende beschrijving van het gebruik van den „voet" der slakken als bewegingsorgaan].

3. H. Simroth. *Die Tätigkeit der willkürlichen Muskulatur unserer Landschnecken*. Zeitschr. f. wiss. Zoologie. 1878. Bd. 30. Supplement. S. 166. [Onderstelt, zooals hij schrijft, „mehr aus allgemeiner Betrachtung lebender Tiere, denn aus eingehender mikroskopischer Forschung" dat zich twee soorten spieren aan den slakkenvoet bevinden: contractiele die in alle richtingen verloopen behalve in de langsrichting en extensiele „welche sich in der Tätigkeit nach vorn verlängern, in allen Sohlen die Längsrichtung einhalten, das Wellenspiel auf der Sohle erzeugen und durch Dehnung und stetige Verlängerung des Körpers nach vorn, die Locomotion ganz allein hervorrufen", De onderstelling van het bestaan van spieren, welker werking een actieve verlenging zijn zou, is door een halve eeuw van onderzoekingen over de algemeene eigenschappen van spierweefsel, onhoudbaar gebleken].

4. H. Simroth. *Die Bewegung unserer Landschnecken, hauptsächlich erörtert an der Sohle der Limax cinereoniger Wolf*. Zschr. f. wiss. Zool. 1879. Bd.

32. H. 2. S. 284—422. [Langdradig betoog, om op grond van microscopisch onderzoek het door hem in het vorige stuk ondersteIde bestaan van „extensiele" spieren in de voetzool van slakken te bewijzen].

5. H. Simroth. *Ueber die Bewegung der Weichtiere.* Zeitschrift f. d. ges. Naturwissenschaften. 1880.

6. L. Car. *Mechanismus der Locomotion bei den Palmonaten.* Biol. Centralblatt, 1897. Bd. 17, N°. 12, S. 426—438. [Nauwkeurige beschrijving der golven bij water (en land-)slakken. Een contractiegolf der langsspieren wordt voorafgegaan door een contractiegolf der dorsoventrale spieren. Deze laatste veroorzaakt een plaatselijk concaaf opgetrokken worden v. d. voetzool, met gedeeltelijke strekking].

7. H. Jordan. *Die Physiologie der Locomotion bei Aplysia limacina.* Zeitschr. f. Biologie. 1901. Bd. 41. S. 196—238. [Zoekt de oorzaak der verlenging der verslapte (atonisch geworden) spieren en dus van het zich strekken van het lichaam bij Aplysia, in de decompressie van huidblazen welke zich bij de verkorting der spieren (door uitdrijving van het bloed uit de intramusculaire lacunen) vormen en daarbij onder spanning geraakt zijn].

8. G. Bohn. *Des ondes musculaires respiratoires et locomotrices chez les Annélides et les Mollusques.* Bull. du Museé d'Hist. nat. à Paris. 1902. T. 8, n°. 2, p. 96—102. Goede détails over de golfbeweging bij Helix pomatia Geen beschouwing over het mechaniek der voortbeweging].

9. K. Künkel. *Zur Locomotion unserer Nacktschnecken.* Zool. Anzeiger. 1906. Bd. 26. N°. 703, S. 500—506. (Vindt, dat bij Arion en Limax, zelfs de kleinste stukjes voetzool zich onder beheersching van uit de plaatselijke zenuwvlechten, snel voort kunnen bewegen).

10. A. J. Carlson. *The physiology of locomotion in Gastropods.* Biol. Bull. of the Mar. biol. Lab. Woods Holl. May 1905. Vd 8. N°. 2. p. 85—92. [In den text aangehaald].

11. H. Jordan. *The physiology of Locomotion in gastropods.* Biol. Bull. 1905. Vol. 9. N°. 2. p. 138—140. [Scherpe polemiek tegen Carlson, die Jordan's inzichten niet juist weergegeven heeft. Carlson's opinie, dat de „galop" van Helix slechts een overdreven vorm van de normale voortbeweging is, en dat ook deze dus onder medewerking van de spieren van de dorsale en laterale lichaamswand tot stand komen is onjuist, want ook na wegname dezer spieren voert de voet bij Aplysia, normale kruipgolven uit].

12/13. W. Biedermann. *Studien zur vergl. Physiologie der peristaltischen Bewegungen. II. Die locomotorischen Wellen der Schneckensohle.* Pflüger's Archiv. f. d. ges. Physiol. 1905. Bd. 107. S 1—56 en *III. Die Innervation der Schneckensohle.* Ibidem. 1906. Bd. 111. S. 251—297. [Uitstekend uitvoerig onderzoek over de algemeene physiologie der werking der spieren in den slakkenvoet. Nauwkeurige beschrijving der kruipgolven en derzelver nerveuse coördinatie bij Helix van uit het Ganglion pedale, bij Arion en Limax van uit de plaatselijke zenuwvlechten].

14. R. Dubois et F. Vlès. *Locomotion des gastéropodes.* C. R. de l'Acad. d. Sciences. Paris. 1907. T. 144. 1e Serie, N°. 11. p. 658—659. [Bewijzen, dat slakken (Fissurella neglecta Desh) zich voortbewegen kunnen nadat de geheele huid van de voetzool is afgeschoren, en het dier bloedeloos is gemaakt. Noch trilharen noch bloedbeweging zijn dus voor de voortbeweging onontbeerlijk. Deze geschiedt door de spieren].

15. F. Vlès. *Sur les ondes pédieuses des mollusques reptateurs.* C. R. Acad. Sc. Paris. 1907. T. 145. 2e Serie N°. 4. p. 276—278. [Vergelijkend onderzoek

der kruipgolven, beschrijving en indeeling. Naar de richting van haar voortplanting onderscheidt Vlès: ondes directes (verloopend van achteren naar voren) en *ondes rétrogades* (verloopend in tegengestelden zin van de voortbeweging). Naar haar ligging in den voet onderscheidt Vlès een *type monotaxique* (dans le quel la sole est parcourue par un seul système d'ondes, een *type ditaxique* (Le pied est parcouru par deux systèmes d'ondes, occupant chacune une des moitiés latérales du pied et alternant regulièrement des deux cotés de la ligne médiane qui n'est pas intéressée par les ondes) en een *type tétrataxique* (présentant 4 systèmes d'ondes.)]

16/17. F. Vlès. *Quelques observations sur le bruit tres spécial que produisent parfois tes Helix en se déplaçant sur la vitre d'une fénêtre* — Bull-Société Zool. de France. 1908. Vol. **33**. p. 145. Sur les bruits émis par les Hélix pendant leur progression. — Ibidem 1909. Vol. **34**. p. 251—254. [Het geluid wordt veroorzaakt door het tegen het glas strijken van den scherpen rand van de schelp, welke stootsgewijze, synchroon met de in- en uitademingsbewegingen wordt meegesleept.]

18. F. Vlès. *Les notions de Martin Lister* (1644) *sur la locomotion des Gastéropodes*. — Bull.-Soc. Zool. de France 1908. Vol. **34**. p. 168—170. [Haalt o.a. den onder N⁰. 1 weergegeven passus aan.]

19. A. Robert. *Seconde note sur la progression des gastéropodes*. — Bull. Soc. Zool. de France — 1908. Vol. **33**. (pag. 151—157). [Bij Chiton (Acantochites discrepans Brown) gaat de voortbeweging ongeveer zoo, dat: „une certaine région du pied quitte le substratum et que cette région se déplace d'avant en arrière sous forme d'onde concave de la sole pédieuse Cette région écartée du sol, correspond .... à une région dilatée et ce sont les parties contractées qui sont fixées au substratum". Ook hier dus, op overdreven wijze, wat bij alle slakken het kenmerkende der voortbeweging is: afwisselende plaatsen van verkorting en strekking van de lichaamsas, met plaatselijke opheffing der zool van den bodem geheel zooals Carlson (N⁰. 10) dat in 1905 al ingezien had.]

20. Olshausen. *Geschwindigkeiten in der organischen und anorganischen Welt*. — Hamburg 1908. [De voortbewegingssnelheid van slakken gaat van 0,6 tot 3,3 m.M. per 1".]

21. Jousseaume. *Différents modes de locomotion chez les mollusques pulmonés*. Bull. Soc. Zool. de France. 1909. Vol. **34**. p. 109—115. [Nog al langdradig niet altijd duidelijk. Onderscheidt 3 soorten kruipgolven: 1. Ondulations cacheés en progression normale (n.l. tegen de ruit van een aquarium) apparentes en natation (n.l. tegen de oppervlakte van den waterspiegel): Limneé. 2. Ondulations de la plante n'intéressant pas le bord marginal: Hélix. 3. Ondes transversales dans la zone médiane de la plante qui semble divisée en 3 bandes longitudinales: Limax.].

22. J. van Uexküll. *Umwelt und Innenwelt der Tiere*. J. Springer. Berlin. 1909. [De in den text aangehaalde plaats op bl. 186].

23. H. Simroth. *Quelques remarques sur la locomotion des gastéropodes*. Bull. Soc. Zool. de France. 1910. Vol. **35**. p. 10—14. [Een vage verdediging van zijn oude opvatting tegen de theorie van Robert en Carlson].

24. G. H. Parker. *The mechanism of locomotion in Gastropods*. Contributions from the zool. Lab of the Mus. of Comp. Zool. at Harvard College. N⁰. 220. The Journal of Morphology 1911, Vol. **22**. N⁰. p. 155—170. [Aangehaald in den text. De hoofdzaak in Parker's opvatting is, dat de kruipgolf een *concave* golf is; „an area of the foot that is lifted off the substrate . . . and thereby freed more or less from adhesion". Dat een dergelijke golfreeks over de voetzool loopt is

zeker: naar mijn meening echter beantwoorden de contractiegolven der langsspieren aan de *convexe* golven].

25. G. H. Parker. *The locomotion of Chiton*. Contr. zool. Lab. Mus. Comp. Zool. Harvard. N⁰. 246. — (1914 ?) [Een retrograde concave golf verloopt over den voet welke 6 cM lang is, in 20″—30″; elke nieuwe golf begint aan het kopeinde te verschijnen, vóór de vorige van het staarteind verdwenen is. De zool is overal van den bodem gelicht, behalve ter plaatse van de golf; hier alleen schuift de voet naar voren: „On the free portion of the foot, that is, in the region of the wave, the substance of the foot is moved forward as much as 5 mM for each wave. This in the essential act in this type of locomotion and is characteristic apparently of al creeping gastropods"].

26. R. Dubois Reymond. *Bewegung der Schnecken*. Winterstein's Handb. d. vergl. Physiol. Jena 1914. Bd. III. Hälfte 1 Teil 1. [Korte oppervlakkige compilatie. Schrijver wijdt zijn aandacht voornamelijk aan de theorie van Car (n⁰. 7) en noemt de belangrijke onderzoekingen van Carlson, Robert, Dubois, Vlès en Parker niet].

27. G. H. Parker. *The pedal locomotion of the sea hare, Aplysia californica*. Contr. Zool. Lab. Mus. Comp. Zool. Harvard. N⁰. 297. The Journal of exp. Zoology 1917. Vol. **24**. N⁰. 1. p. 139—145. [Telkens 1 enkele retrograde concave golf schrijdt over den voet voort. Bij een exemplaar van 23 cM. lichaamslengte, 19 golven liepen in 2′ over den voet. Het dier kwam, in dien tijd 124 cM. vooruit. Dus elke 6.3″ verschijnt een golf en de slak schuift bij elke golf 6.5 cM vooruit. Op de plaats der concave golf is de slak smaller en strekt zij zich naar voren. Het is dus duidelijk, dat de concave golf niet samenvalt met een verkorting der langsspieren dus m. a. w. dat de concave golf niet de eigenlijke kruipgolf is; niet gelijkwaardig met de donkere golven van Helix].

Geologie. — De Heer A. WICHMANN biedt een mededeeling aan: *„Over de vulkanen van het eiland Tidore (Molukken).”*

Het fraaiste gezicht, dat men van uit den aanlegsteiger van de hoofdplaats Ternate heeft, is dat op den op 13½ K.M. afstand oprijzenden, ranken piek van Tidore, die als de meest regelmatig gevormde vulkaan der Molukken te beschouwen is. Al aanstonds ontwaart men echter, dat hij niet geïsoleerd staat, maar dat een gedeelte zijner hellingen zich verschuilt achter eenige kleinere bergen, die zich tot de noordkust van het eiland Tidore uitstrekken. Eene voortreffelijke voorstelling daarvan geeft de afbeelding in het werk der Siboga-expeditie, die hieronder (fig. 1) gereproduceerd is. [1]) Ook F. H. H. GUILLEMARD heeft eene duidelijke teekening vervaardigd [2]). Geheel anders is het gezicht op den vulkaan, dat zich voordoet,



Fig. 1. Het eiland Tidore, van N.-W. gezien.

wanneer men het eiland van de Zuid komend nadert. Het uitzicht op den geleidelijk van af het strand oprijzenden berg wordt door geenerlei andere bergvormingen belemmerd [3]) en evenmin is dit van

[1]) MAX WEBER. Introduction et description de l'expédition: Siboga-Expeditie 1. Leiden 1902. bldz. 63.

[2]) The Cruise of the Marchesa to Kamschatka and New-Guinea. 2. London 1886. blz. 228. De afbeelding van K. MARTIN (Reisen in den Molukken. Geolog. Theil. Leiden 1903, blz. 59) is minder juist.

[3]) Het berust derhalve op eene vergissing, wanneer A. R. WALLACE van gehakkelde heuvels ten *Zuiden* van den piek spreekt (The Malay Archipelago 2.

uit de westkust het geval. Van uit de oostzijde daarentegen verkrijgt men een goed overzicht van de aan den piek in N.N.O. zich aansluitende bergen en R. D. M. VERBEEK heeft getracht in een profiel (fig. 2) een voorstelling van hun onderling verband te geven.[1])

Zooals men ziet, volgt op den piek (4) — door de inlanders Kiè Matoeboe genaamd — een 903 M. hooge berg (3), waaraan zich een ander (2) van 661 M. hoogte aansluit. Het besluit vormt in het



Fig. 2. Het eiland Tidore, van O. gezien.

Noorden een van 2 toppen voorziene kegel (1), waarvan een top in het Zuiden 665 M. boven zee gelegen is. VERBEEK heeft den genoemden kegel als een ingestorten vulkaan beschouwd en daarbij getracht een voorstelling van diens oorspronkelijke gedaante te geven.

In de groote behoefte aan eene topographische kaart van het eiland Tidore werd kort geleden door een inlandschen opnemer in opdracht van de Topographische Inrichting te Batavia voorzien[2]). Zijn

2. London 1869, blz. 24. — A. R. WALLACE—P. J. VETH. Insulinde 2. Amsterdam. 1871, blz 30).

Reeds P. BLEEKER schreef (Reis door de Minahassa en den Molukschen Archipel 1. Batavia 1856, blz. 212): „De zuidelijke helft wordt gevormd door den piek van „Tidore, een regelmatige kegel, welks voet geheel de zuidelijke helft van het eiland „beslaat. De noordelijke helft daarentegen bestaat uit een bergachtig land, woest „dooreengeworpen, maar blijkbaar toch van vulkanischen aard en slechts een „verbindingslid, een schakel van de vulkanische keten, welke Halmaheira ten „westen omringt". Wat de laatste opmerking betreft, het valt nauwelijks te betwijfelen, dat de reeks vulkanen van de Molukken in de eerste plaats hare voortzetting vindt van af den vulkaan van Maftoetoe naar het eiland Maitara en van daar weder in noordelijke richting, nl. naar de eilanden Ternate en Hiri. Eerst daarna verplaatst zij zich in oostelijke richting naar Halmahera.

Niet uitgesloten is het overigens, dat van den vulkaan van Maftoetoe af eveneens eene voortzetting naar Halmahera plaats vindt en wel in een noordoostelijke richting naar de baai van Dodingah, die volgens R. D. M. VERBEEK (Molukken-Verslag. Jaarboek van het Mijnw. Ned. O. I. 37. Wetensch. ged. Batavia 1908, blz. 162) een oude ingestorte vulkaan met een straal van minstens 5 K.M. voorstelt. Ook aan de overkant der baai, in de baai van Bobane, die een inham van de Kau-baai vormt, vindt men volgens E. GOGARTEN (Geologie van Noord-Halmahera. Verhandel. Geolog. Mijnbouwk. Genootsch. 2. 's-Gravenhage 1918, blz. 269) andesietbrecciën en grofkorrelige tuffen, waarin witte puimsteenbrokken.

[1]) Molukken-Verslag. Jaarboek v. h. Mijnwezen in N. O. I. 37 Wet. ged. Batavia 1908, blz. 144—146; Bijl. V, fig. 127.

[2]) Schetskaart van de eilanden Tidore en Maitara 1 : 20000. Batavia 1916 Topogr. Inrichting.

schetskaart geeft een voortreffelijk beeld van de tidorsche bergvormingen, dat ons tevens in staat stelt na te gaan in hoeverre de door VERBEEK gegeven voorstelling juist is.

De Kiè Matoeboe — de eigenlijke piek — werd voor het eerst op den 29 Augustus 1821 door C. G. C. REINWARDT [1]) van uit de aan de zuidoostzijde gelegen hoofdplaats Soa Sioe beklommen. Daarbij bleek, dat de kraterrand aan de NW-zijde doorbroken was. De hoogte van den westelijken rand werd op 5598 feet (5435 rh.vt.) bepaald. In den geheel begroeiden krater werden geen versche blijken van vulkanische werkzaamheid waargenomen. REINWARDT beschouwde het hoofdgesteente van den berg, alsmede van het geheele eiland, als bazalt.

Aangaande de beklimming van den vroegtijdig — in 1843 — overleden E. A. FORSTEN (1841) is niets naders bekend geworden dan dat hij de hoogte van den berg op 5376 rh. vt. bepaalde [2]). Sedert dien tijd is de vulkaan, behalve door den inlandschen opnemer in 1915, slechts door den kapitein der infanterie G. J. J. DE JONGH op den 9 September 1903 met eene patrouille van 19 fuseliers beklommen en wel van uit de zuidzijde. Uit de aanteekeningen, die deze zoo vriendelijk was mij te zenden, kon men opmaken, dat de top sedert het bezoek van REINWARDT geen wezenlijke veranderingen ondergaan had. De krater had eene wijdte ongeveer overeenkomende met die van den piek van Ternate, maar de wanden waren veel minder steil en geheel begroeid.

De bepaling der hoogte van den piek geschiedde verder alleen nog van uit zee, met uitzondering van die in het jaar 1915. Men verkrijgt van die bepalingen het volgende overzicht:

C. G. C. REINWARDT 1821	 1702	M.
E. A. FORSTEN 1841	 1687,26	,,
Challenger-expeditie 1874	 1798,3	,, [3])
Siboga-expeditie 1899	 1754	,, [4])
R. D. M. VERBEEK 1899	. . . 1717 en 1724	,, [5])
Inlandsche opnemer 1915	 1730	,,

Deze laatste bepaling zal de waarheid wel het meest nabij komen.

---

[1]) Reis naar het oostelijk gedeelte van den Indischen Archipel in het jaar 1821. Amsterdam 1858, blz. 497—501.

[2]) P. MELVILL VAN CARNBEÉ, Over de hoogte der bergen van den Oost-Indischen Archipel. Tijdschr. voor Neêrl. Indië 1844. 1. blz. 545.

[3]) Report on the Scientific Results of the Voyage of H. M. S. CHALLENGER. Narrative 1. 2. London 1885, blz. 594.

[4]) T. a. p. blz. 61.

[5]) T. a. p. blz. 149.

Zooals Reinwardt terecht heeft kunnen opmerken, zijn uitbarstingen in historischen tijd niet waarschijnlijk. Weliswaar wordt op de eerste bekende afbeelding van den berg in het werk van J. Th. en J. J. de Bry een rookwolk boven den top gevonden, maar in den tekst wordt aangaande eenige werkzaamheid van den vulkaan niets vermeld [1]).

Evenmin heeft in 1608 (einde Juni of begin Juli) de eruptie plaats gehad, die door J. Mercalli [2]) en K. Schneider [3]) opnieuw genoemd werd, niettegenstaande niet lang te voren er nog eens op gewezen werd [4]), dat het bericht op eene vergissing berustte. De toedracht der zaak is de volgende: In de oorspronkelijke uitgave van het werk van A. Fr. Prevost [5]) wordt gezegd, dat tijdens de tweede reis van Paulus van Caerden de bedoelde uitbarsting waargenomen werd. In diens reisverhaal wordt echter vermeld, dat de in den laten avond (tijdens de eerste wacht) van den 18den Juli 1608 werkzame vulkaan de piek van Ternate geweest was [6]). Het heeft niet mogen baten, dat reeds in de Haagsche uitgave van het werk van Prevost diens bericht gerectificeerd werd met de woorden: „Dans l'édition de Paris, il y a Tidor, ce qui est une faute" [7]), want Alexis Perrey had het onjuiste bericht uit de eerste editie overgenomen en daarnaast ook het juiste bericht aangaande de eruptie van Ternate geplaatst [8]). Uit diens aanteekeningen zijn beide in de bovengenoemde werken van Mercalli en Schneider overgegaan.

Hevige aardschokken werden op 14 Juli 1855 op Ternate en Tidore waargenomen. Op het laatstgenoemde eiland stortten 25 huizen in, waarbij 24 personen het leven verloren. Bovendien werden 4 door afstortende rotsblokken van den heuvel Dojado [9]) gedood [10]).

---

1) Indiae orientalis 8. Francofurti 1607, blz. 23, tab. XIII, XVIII.

2) I vulcani attivi della terra. Milano 1907, blz. 310.

3) Die vulkanischen Erscheinungen der Erde. Berlin 1911, blz. 242.

4) A. Wichmann. Der Wawani auf Amboina und seine angeblichen Ausbrüche. Tijdschr. Nederl. Aardr. Gen. (2) 16. 1899, blz. 16.

5) Histoire générale des Voyages 8. Paris 1750, blz. 385.

6) Loffelijcke Voyagie op Oost-Indien. Begin ende Voortgang van de Vereenigde Geoctroyeerde Oost Indische Compagnie 2. Amsterdam 1646, N⁰. 14, blz. 47. — F. Valentijn. Oud en Nieuw Oost Indien 1. 2. Dordrecht—Amsterdam 1724, blz. 5.

7) Histoire générale des Voyages 10. La Haye 1753, blz. 385.

8) Documents sur les tremblements de terre et les phénomènes volcaniques aux Molluques. Ann. Soc. d'Emulation des Vosges 10. 2. 1859 Epinal 1860, blz. 162—163.

9) De heuvel Dojado is gelegen aan den zuidoostvoet van den vulkaan van Maftoetoe ongeveer 1,6 K.M. bezuiden Akè Sahoe.

10) Aardbevingen in den Indischen Archipel. Natuurk. Tijdschr. Ned. Ind. 9. Batavia 1855, blz. 519. — P. van der Crab (De Moluksche Eilanden. Batavia 1862, blz. 290) verhaalt, dat het 32 personen waren, die door de afvallende

Daarna werd in 1856 bericht: „Men meende echter verschijnselen opgemerkt te hebben, die te kennen gaven, dat ook hij [n.l. de piek] in een niet ver verwijderd tijdstip zou ontbranden" [1]). Waarin deze verschijnselen hebben bestaan, werd niet vermeld; in ieder geval is de verwachte ontbranding uitgebleven.

Eene bergstorting, die in Juni 1857 plaats had gevonden aan den voet van den piek, 7 K.M. benoorden de hoofdplaats Soa Sioe [2]), staat evenmin als de slijkstroom van 6 September 1866, die zijn oorsprong had aan de helling van den piek, boven de kampoeng Toegoriha, in eenig verband met vulkanische werkzaamheid, want, zooals door F. S. A. de Clercq werd medegedeeld, werd de laatste veroorzaakt door eene aardschuiving, die een gevolg was van hevige regens [3]).

Wat verder betreft de mededeeling in het Aardrijkskundig en Statistiek Woordenboek van Nederlandsch Oost-Indië, volgens hetwelk de krater van tijd tot tijd rookende gevonden wordt [4]), F. S. A. de Clercq heeft er reeds op gewezen, dat die opmerking onjuist is [5]).

De piek met zijn breede basis heeft beslag gelegd op de geheele zuidelijke helft van het eiland, men zou haast kunnen zeggen op $^2/_3$ der oppervlakte, ware het niet, dat zijn regelmatige gedaante aan de noordoosthelling een belangrijke wijziging had ondergaan, doordien door latere erupties drie samenhangende kegels zich hebben gevormd, waarvan de het meest naar het oosten gelegene 820 M. hooge Kiè Kitji [6]) genoemd wordt. Dit is het door Verbeek vermelde eruptiepunt 3, met een hoogtecijfer van 903 M. [7]).

Achter den genoemden berg en westelijk daarvan verheft zich een top zonder naam en zonder vermelding van hoogte, die echter naar de hoogtekrommen te oordeelen 870 M. hoog geacht moet

steenen hunnen dood hadden gevonden. Ten onrechte meent F. S. A. de Clercq (Bijdragen tot de kennis der residente Ternate. Leiden 1890, blz. 69, aant. 1), dat die gebeurtenis op den 6 September 1866 plaats had. Het werk van van der Crab was reeds in 1862 verschenen.

1) Fragment uit een reisverhaal. Tijdschr. v. Ned. Indië 1856. 1, blz. 425.

2) J. H. Tobias. Aardstorting op Tidore. Natuurk. Tijdschr. Ned. Indië 15. Batavia 1858, blz. 352—358.

3) T. a. p. blz. 68—69.

4) 3. Amsterdam 1869, blz. 956.

5) Bijdragen tot de kennis der residentie Ternate. Leiden 1890, blz. 68, aanteek. 4.

6) Deze en de Kiè Matoeboe zijn de eenigen, die de Tidorezen de benaming van „berg" (Kiè) waardig keuren; de overigen zijn in hun oogen slechts „boekoe" (heuvels).

7) Zoolang men niet weet langs welken weg de opnemer de hoogte bepaald heeft, kan men niet zeggen aan welk cijfer eene grootere waarde toegekend mag worden.

worden. Recht ten N. daarvan ligt de 830 M. hooge Boekoe Tagafoera, die blijkbaar — evenals de vorige — van uit zee zichtbaar zal zijn. Van alle drie toppen gaan diepe ravijnen benedenwaarts en het lijdt geen twijfel of deze vormingen moeten als parasitische kegels beschouwd worden.

Aan den Boekoe Tagafoera sluiten zich aan twee, slechts 400 M. van elkander verwijderd liggende toppen, waarvan aan de Boekoe Goelili eene hoogte van 485 M. en aan de Boekoe Foeloeloe eene hoogte van 500 M. werd toegekend. Samen beantwoorden beiden aan het eruptiepunt 2 van Verbeek met een hoogtecijfer van 600 M.

Ten opzichte van Verbeek's vierde eruptiepunt, dat wij bij gebrek aan een afzonderlijken naam den vulkaan van Maftoetoe zullen noemen, heeft de kaart een verrassing gebracht. In fig. 3 vindt men het daarop betrekking hebbende gedeelte op verkleinde schaal gereproduceerd.

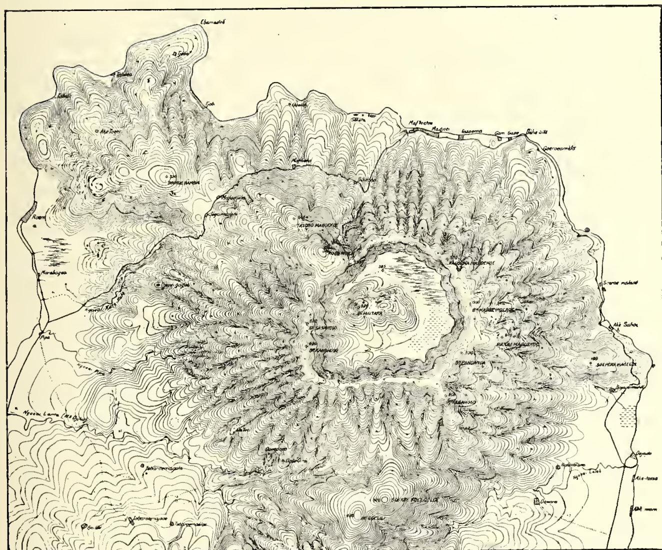


Fig. 3. De vulkaan van Maftoetoe.

duceerd. Zooals men onmiddellijk kan zien, is hetgeen Verbeek bij intuitie vermoedde, gebleken juist te zijn. Voor hem waren slechts zichtbaar de verhoogingen van den oostelijken kraterrand, n.l. de Boeloe Pandanga (570 M.), de Boeloe Mafoe Moeroe (560 M.) en de

Tasoema Maboeloe (500 M.). De hoogste toppen, die van uit zee in de nabijheid der oostkust niet zichtbaar zijn, verheffen zich wel boven den westrand. Het zijn de toppen Boekoe Kabahoso, waarvan de eene, meer naar het zuiden gelegen, een hoogte heeft van 680 M. de andere daarentegen slechts 570 M. hoog is.

Op den 325 M. boven zee gelegen bodem der instortingscaldera verheft zich de 570 M. hooge Boeloe Maitara,[1]) benevens twee andere lagere kegels. De kleine (oostelijke) helft van den kraterbodem is vlak en ten deele moerassig. De caldera is niet geheel cirkelrond, hare middellijn is in O.-W. 2.8 K.M., in N.-Z. 1.8 K.M. Hare diepte bedraagt 150 M., terwijl de kraterrand gemiddeld 535 M. hoog is. Uit de ligging van den top van de Boeloe Maitara blijkt, dat het eruptiecentrum zich ± 50 M. in westelijke richting verplaatst heeft.

Als laatste uiting van vulkanische werkzaamheid van dezen kraterberg wordt aan den oostvoet en wel nabij de kampong Akè Sahoe, vlak aan het strand, eene warme bron gevonden, die volgens C. G. C. Reinwardt eene temperatuur van 90° F. (32° C.) heeft.[2]) Zij werd eveneens door H. A. Bernstein[3]) en H. von Rosenberg bezocht.[4]) Van R. D. M. Verbeek is de waarneming, dat zij uit andesiet ontspringt.[5]) Aan den noordvoet, aan het strand nabij de kampoeng Maftoetoe zag ik den 1en September 1903 onder den geelachtig bruinen tuf en beneden het zeeniveau eenige koude bronnen te voorschijn komen.

Boven de noordwestzijde van den buitensten kraterrand verheft zich de 610 M. hooge Kota Moem, die oogenschijnlijk het door Verbeek bedoelde eruptiepunt is,[6]) dat hij als noordrand van den grooten kratermuur beschouwde. Blijkbaar is het deze, die de lavastroomen geleverd heeft, die aan het westelijk gedeelte der noordkust van Tidore ontbloot zijn. Verder in noordwestelijke richting volgt op de Kota Moem de 540 M. hooge Tarobo Maboeloe en de 320 M. hooge Boeloe Gambir. De volgorde der eruptiepunten zal 4, 3, 1 en 2 zijn, terwijl niet uitgemaakt kan worden of 3 ouder is dan 1.

---

[1]) Niet te verwarren met den vulkaan van het eiland Maitara, die 5.6 K.M. ten Westen van de Boeloe Maitara gelegen is.

[2]) T. a. p. blz. 496.

[3]) Mededeelingen nopens reizen in den Indischen Archipel. Tijdschr. voor Ind. T. L. en V. 17. Batavia 1869, blz. 79.

[4]) Reistochten naar de Geelvinkbaai. 's-Gravenhage 1875, blz. 11. — Der Malayische Archipel. Leipzig 1878, blz 403.

[5]) T. a. p. blz. 146.

[6]) T. a. p. Bijlage V, fig. 128.

Aangaande de gesteenten valt nog op te merken, dat REINWARDT het onverweerde materiaal van den piek en van het geheele eiland als bazalt beschouwde.[1]) Door J. W. RETGERS werd een stuk afkomstig van een obsidiaanachtigen lavastroom bij de hoofdplaats Soa Sioe als hypersttheenandesiet gedetermineerd.[2]) Een ander stuk van een onbekende vindplaats bleek een pyroxeenandesiet te zijn. Ook de lavastroom aan den zuidoostvoet nabij kampoeng Seli behoort, volgens VERBEEK, eveneens daartoe.[3]) Aangaande het petrographisch karakter der tusschen den piek en den vulkaan van Maftoetoe gelegen vulkanen is niets bekend. Daarentegen vond VERBEEK bij Aké Sahoe, aan den oostvoet van den bovengenoemden berg, het volgend profiel: Beneden $1\frac{1}{2}$ M. andesiet, daarop volgend $1\frac{1}{2}$ M. tuf en verder $\frac{1}{2}$ M. gele tuf, waarboven 6 à 7 M. puimsteentuf.[4]) De boven reeds genoemde, horizontaal gelaagde, geelachtig bruine tuf nabij de kampoeng Maftoetoe bleek een andesiettuf te zijn, die gemakkelijk fijn gewreven kan worden. De talrijke gesteentefragmenten, die er in opgesloten liggen, hebben doorgaans slechts de grootte van zandkorrels, waarbij slechts enkelen een middellijn van $\frac{1}{2}$ c.M. bereiken.

Onder het mikroskoop blijken de fragmenten tot verschillende varieteiten van andesieten te behooren en wel meestal tot de pyroseen-andesieten. Sommigen bevatten echter barkevietische amphibool. De grondmassa dezer gesteenten is felsiet- of glasachtig en bevat in het laatste geval tevens talrijke augietmikrolietben. De veldspaten — meestal plagioklasen — zijn doorgaans nog volkomen versch en glashelder. Het cement bestaat uit een zeer fijn gewreven en sterk ontleed gesteentepuin, dat vermengd is met talrijke bruinachtig gele stofdeeltjes van ijzerhydroxyde, die aan het gesteente de eigenaardige kleur verleenen. Buitendien bevat het cement talrijke splintertjes van veldspaten en augieten, benevens korreltjes van zwart ijzererts. Uit het bovenstaande blijkt, dat deze tuf geen vast geworden vulkanische asch kan zijn, maar beschouwd moet worden als een samenslibbingsproduct van ontleed vulkanisch materiaal.

Verder oostelijk, nabij kampoeng Sekèta vond ik vaste andesiet, evenals die, waaruit de op de kampoeng Tjobo volgende kaap bestaat, terwijl men in de kleine bocht nabij de genoemde kampoeng weder andesiettuf ontsloten vindt. Verder is nog te vermelden, dat aan

---

[1]) T. a. p. blz.

[2]) Mikroskopisch onderzoek van gesteenten uit Nederl. Oost-Indië. Jaarboek van het Mijnwezen in N. O. I. 24. Wet. gedeelte. Amsterdam 1895. blz. 120.

[3]) T. a. p. blz. 251.

[4]) T. a. p. Bijlage V, fig. 129.

de noordwestzijde van het eiland, nabij Tandjoeng Roem hoornblende- augiet- en augietandesiet gevonden wordt. [1])

Ten slotte moge nog medegedeeld worden, dat toen J. H. CROOCKEWIT in 1858 achter de Humboldt-baai op Nieuw-Guinea een stuk glimmerschist opraapte, dit den daarbij tegenwoordigen tidoorschen Prins AMIR de opmerking ontlokte, ,,dat het op Tidore gansch niet zeldzaam voorkomt." [2]) Het eenige, dat echter uit dit gezegde afgeleid kan worden, is wel, dat in de gesteenten van dat eiland een of ander glinsterend mineraal niet zeldzaam is.

---

[1]) A. WICHMANN. Nova Guinea 4. Leiden 1917, blz. 45.

[2]) Oppervlakkige geognostische schets der bezochte punten op de zuid-, west- en noord-kusten van Nieuw-Guinea. Bijdr. t. de T. L. en Vk. (2) 5. Amsterdam 1862, blz. 140.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt een mededeeling aan van de Heeren F. ROELS en L. MOLL: „*Over den index loquelae*".

(Mede aangeboden door den Heer WINKLER).

Het begrip index vocalis is door GRADENIGO[1]) ingevoerd. Hij verstaat er onder de quantitatieve betrekking, die er tusschen fluisterspraak van gemiddelde sterkte en gewone conversatiespraak bestaat. Practisch wordt deze betrekking het best bepaald met behulp der uiterste afstanden, waarop in beide gevallen wordt verstaan. Volgens GRADENIGO bedraagt de gemiddelde index voor vocalen: $^1/_7$ of $^1/_8$ [2]); bij WOLF[3]), ZWAARDEMAKER[4]) en REUTER[5]) wisselt de gemiddelde index van $^1/_5$ tot $^1/_7$. Voor twintig éénlettergrepige, aequiintense, isozonale proefwoorden kwamen ZWAARDEMAKER—QUIX[6]) en REUTER[7]) tot een index van $^1/_{13}$.

ZWAARDEMAKER heeft, met het oog op de bezwaren, die men bij het bepalen der relatieve sterkte van fluisterspraak en conversatiespraak ontmoet — het is zoo moeilijk aan te geven, wat men nu juist onder fluisterspraak en conversatiespraak verstaat — de methode van geluidmeting door middel van het Rayleighsche spiegeltje te hulp geroepen[8]). Het bleek, dat de normale gemiddelde index vocalis $\frac{\text{reservelucht-fluisterspraak}}{\text{conversatiespraak}}$ $^1/_{13}$, de normale gemiddelde index vocalis

1) GRADENIGO. Communication au congrès internat. d'otologie. Budapest 1909. GRADENIGO et STEFANNI. Sur l'acoumétrie. Propositions et études. Archives internat. de laryngolie, d'otologie et de rhinologie, 1911.

2) ZWAARDEMAKER. Over den index vocalis bij keuringen en bij de studie der ziektebeelden. (Handelingen van het XIVe. Ned. Nat.- en Gen. Congres te Delft 1913), blz. 370.

3) WOLF. Sprache und Ohr. 1870. Frankfurt.

4) ZWAARDEMAKER Ibid.

5) REUTER. Zeitschr. f. Ohrenheilkunde. Bd. 47, blz. 91; Onderzoekingen Physiol. Lab. Utrecht (5) dl. 5. blz. 239.

6) ZWAARDEMAKER. Over geluidmeting. Zittingsverslag dezer Academie van 23 April 1915. Dl. XXIII. blz. 1405.

7) REUTER. Onderzoekingen Physiol. Lab. Utrecht (5) dl. 5. blz. 249.

8) ZWAARDEMAKER en QUIX. De studie van het spraakgehoor. Onderzoekingen Physiol. Lab. Utrecht (5) dl. 5. blz. 1.

$\frac{\text{tooneelfluisteren}}{\text{conversatiespraak}}$ $^1/_4$ bedraagt. Aan de hand dezer beide indices is het mogelijk de voor vocalen en woorden verkregen fluisterwaarden in conversatie-waarden om te zetten.

In de praktijk bedient men zich bij het onderzoek der gehoorscherpte van afzonderlijke woorden uit isozonale en aequiintense klanken samengesteld, die o.a. het voordeel bieden, dat zij, juist omdat de componenten van het woord alle even sterk gehoord worden, het raden tot een minimum beperken en het onderzoek van een bepaald gebied der toonladder gemakkelijk maken. Het is echter de vraag — waarschijnlijk is het niet — of de hoorafstand voor gefluisterde zinnen zich even ver als die voor woorden en vocalen uitstrekt. ZWAARDEMAKER meent, op grond van verschillende ervaringen, te mogen veronderstellen, dat de afstand, waarop gefluisterde zinnen in besloten ruimten worden verstaan, al naar gelang de keus der gebezigde woorden van 1 tot 3 M bedraagt[1]). Hij noemt de verhouding tusschen dezen gemiddelden afstand en dien, waarop gefluisterde woorden worden waargenomen: *index loquelae.*

Het onderzoek, waarvan wij in deze mededeeling een voorloopig verslag uitbrengen, had oorspronkelijk een loutere bepaling van den index loquelae ten doel. De combinatie der fluistermethode met die der systematische of experimenteele introspectie deed ons echter een aantal gegevens aan de hand, welke voor de psychologie van het verstaan van gewicht mogen worden geacht. Wij benutten deze hier slechts inzooverre zij op de bepaling van den index loquelae, die het eigenlijk voorwerp dezer mededeeling uitmaakt, hun invloed doen gelden.

Het materiaal, waarvan wij bij ons onderzoek gebruik maakten, bestond uit betrekkelijk eenvoudige zinnen. De kortste waren uit 3, de langste uit 14 lettergrepen gevormd. De zinnen waren voor het meerendeel in de aantoonende, een enkele maal in de toevoegende of bevelende wijs gesteld. Hoewel de tegenwoordige tijd het sterkst vertegenwoordigd was, hebben wij ons toch dikwijls van verleden en toekomstigen tijd bediend. Slechts bij uitzondering kwamen ontkennende zinnen voor. Bij de keuze van het proefmateriaal droegen wij zorg een niet te gering aantal symmetrisch gebouwde zinnen ter beschikking te hebben. Wij verstaan daaronder zinnen, welke vóór en achter de uit één of een even aantal lettergrepen bestaande

---

1) ZWAARDEMAKER. Ueber die Anwendung von Sig. Exners Akustik von Hörsälen auf die Theorie der medizinischen Hörapparate. Wiener Medizinische Wochenschrift. Nr. 14, 1916.

copula, een gelijk aantal lettergrepen bezitten of wel, hetzij door een woord, hetzij door passend aangebrachte interpunctie, in twee, wat het aantal lettergrepen betreft, gelijke deelen worden verdeeld (b.v. beter duur dan niet te koop; hoe hooger berg, hoe dieper val). Zinnen, waarbij dit niet het geval was, noemen wij asymmetrisch. Onderwerp, gezegde, voorwerp kwamen in de meeste zinnen en wel in deze volgorde voor; zinnen, waarin een dezer zinsdeelen ontbreekt of het werkwoord zich tengevolge der gebezigde constructie splitst, bestempelen wij met den naam van onregelmatig gevormde zinnen. Spreekwoorden en spreekwoordelijke gezegden werden slechts bij uitzondering gebezigd; een enkelen keer kreeg de proefpersoon een Franschen of Latijnschen zin te hooren. In het geheel hebben wij 328 proeven op 4 personen (R., M., D. en A.) verricht. Tabel I geeft een overzicht van het proefmateriaal met betrekking tot het aantal lettergrepen, symmetrie en asymmetrie, regelmatige en onregelmatige vorming enz. der gebezigde zinnen. Opmerking verdient, dat sommige proefzinnen in twee der drie laatste kolommen zijn ondergebracht; een spreekwoord als „hoe hooger berg, hoe dieper val" werd zoowel bij de samenstelling van de kolom der spreekwoorden als bij die der symmetrische zinnen in rekening gebracht.

De aanbieding van het materiaal geschiedde door middel van de fluisterspraak met reserve-lucht. De proefpersoon zat met het rechteroor tot luisteren gereed, loodrecht op een lijn gaande door dit oor en den mond van den experimentator. De maximale afstand bedroeg 5 M.; bleef de proefpersoon in gebreke voor dien afstand het gesprokene nauwkenrig na te zeggen, dan werd de afstand telkens met 1 M. verminderd, totdat het gesprokene juist werd geproduceerd. Beneden de 2 M. bedroeg de vermindering telkens slechts $^1/_2$ M. Een zorgvuldige introspectie, waarbij de proefpersoon nauwkeurig aangaf, wat hij in werkelijkheid had gehoord, volgde na elk onderdeel der proef. In elke zitting werden, om vermoeienis te voorkomen, ten hoogste 12 proeven genomen. Alle zijn verricht in de dnk gemeubelde bibliotheek der Psychiatrisch-Neurologische Kliniek te Utrecht. Alvorens tot de eigenlijke proeven werd overgegaan, bepaalden wij de gehoorscherpte onzer proefpersonen met behulp der woorden, welke Zwaardemaker en Quix in „De studie van het spraakgehoor aangeven [1]). Allen bleken een normaal gehoor te bezitten; de hoorafstanden wisselden voor de verschillende woorden van 6—30 M.

In tabel II hebben wij voor elk der drie proefpersonen R., M. en

---

[1]) Onderzoekingen Physiol. Lab. Utrecht (5) dl. 5. blz. 1.

TABEL I.

Pp.	Aantal proeven.	3 l.	4 l.	5 l.	6 l.	7 l.	8 l.	9 l.	10 en meer l.	Symm. zinnen.	onregelmatig gevormde zinnen.	Spreekwoorden.
R.	153	2	17	25	33	24	27	14	11	26	21	21
M.	74	2	12	12	14	14	7	2	11	12	23	12
D.	86	1	15	12	29	14	11	3	1	12	7	—
A.	15	—	—	—	—	2	5	3	5	4	4	2
Totaal.	328	5	44	49	76	54	50	22	28	54	55	35

TABEL II.

	3 l.			4 l.			5 l.			6 l.			7 l.			8 l.			9 .			10 en meer l.		
Pp.	G.	G.A.	C.W.	G.	G.A.	C.W.	G.	G.A.	C.W.	G.	G.A.	C.W.	G.	G.A.	C.W.	G.	G.A.	C.W.	G.	G.A.	C.W.	G.	G.A.	C.W.
R.	4	—	—	3.88	1.12	4	3.33	1.08	3	3.18	1.10	3	3.74	0.90	4	3.50	0.89	3	4.11	0.82	4	3	0.50	3
M.	5	—	—	3.71	0.91	4	3.12	1.06	3	2.64	0.73	2.5	2.71	0.91	3	2.35	0.71	2	2.25	—	—	1.83	0.67	1.5
D.	5	—	—	3.23	1.04	3	4.37	0.73	5	3.50	1.17	4	3.82	0.79	4	3.77	1.02	4	3.67	—	—	—	—	—

D. — de gegevens, die A. ons verschafte, laten wij, daar zij te gering in aantal zijn, hier buiten beschouwing — den gemiddelden afstand (G.) berekend, waarop zinnen van het aangegeven aantal lettergrepen werden verstaan. Als praecisie-indices voegen wij er de gemiddelde afwijkingen (G. A.) en centrale waarden (C. W.) aan toe.

Onmiddellijk springt in het oog, dat de zinnen met de toename van het aantal lettergrepen moeilijker worden verstaan. Voor R., M. en D. bedraagt het verschil in afstand, waarop zinnen van 3 en die van 10 en meer lettergrepen juist kunnen worden gereproduceerd resp. 1, 3.17 en 1.33 M. Deze belangrijke individueele verschillen moeten, behalve aan den invloed van factoren, op wier analyse wij hier niet nader kunnen ingaan, voornamelijk worden geweten aan de uiteenloopende eischen, die den verschillenden proefpersonen werden gesteld. Spreekwoorden en spreekwoordelijke gezegden toch worden geregeld op grooteren afstand verstaan dan niet-spreekwoordelijke uitdrukkingen; symmetrische verder dan asymmetrische zinnen; onregelmatig gevormde zinnen daarentegen moeilijker dan regelmatig gebouwde. De sterkte nu, waarmede spreekwoorden, symmetrische en onregelmatig gevormde zinnen onder het proefmateriaal vertegenwoordigd waren, liep, zooals uit onderstaande tabel, waarin de frequentie der onderscheiden soorten van zinnen in percenten van het geheele aantal proefzinnen is aangegeven, nogal uiteen.

TABEL III.

Pp.	Symmetrische zinnen.	Spreek-woorden.	Onregelmatig gevormde zinnen.
R.	17	13.7	13.7
M.	16.2	16.2	31.1
D.	14	—	8.1

Het verschil in de afstanden, waarop zinnen van 3 en die van 10 en meer lettergrepen worden verstaan, is voor M. het grootst (3.17 M.). Voor een niet gering gedeelte is het hooge percentage onregelmatig gevormde zinnen (31.1) met hun ongunstigen invloed op het verstaan daar oorzaak van; R. en D. ondergingen met resp. 13.7 en 8.1 % onregelmatig gevormde zinnen deze ongunstige werking in veel mindere mate. Het betrekkelijk klein verschil, dat men bij R. waarneemt (1 M.), dankt zijn ontstaan voornamelijk aan de omstandigheid, dat symmetrische zinnen en spreekwoorden te samen ongeveer $^1/_3$ (30.7 %) van het geheele aantal gebezigde proefzinnen uitmaken. D., die als Vlaming minder goed

met onze Hollandsche spreekwoorden bekend is en wien zij derhalve ook niet werden aangeboden, staat, geheel overeenkomstig het verschil in den hoorafstand, met 14 % mede- en 8.1 % tegenwerkende factoren tusschen R. en M. in.

Bij nadere beschouwing van tabel II blijkt, dat de intra-individueele verschillen niet minder sterk dan de inter-individueele op den voorgrond treden. Want al is het waar, dat de hoorafstand bij de drie proefpersonen voor drie-lettergrepige zinnen belangrijk grooter is dan die voor zinnen van 10 en meer lettergrepen, geschiedt over het algemeen de afname met de vermeerdering van het aantal lettergrepen verre van regelmatig. Alleen voor M. wordt, een enkele uitzondering daargelaten, de hoorafstand met het aangroeien van het aantal lettergrepen geleidelijk kleiner. Zinnen met een oneven aantal lettergrepen worden door R. en D. geregeld beter verstaan dan die met even aantal en één lettergreep meer; zelfs nemen zij zinnen van 9 lettergrepen gemiddeld resp. 0.23 en 0.44 M. verder waar dan die van 4 lettergrepen.

De oorzaak van dit op het eerste gezicht zonderlinge verschijnsel is gelegen in het feit, dat symmetrische bouw, die het verstaan in niet geringe mate in de hand werkt, meer bij zinnen met oneven dan bij die met even aantal lettergrepen voorkomt. Bij alle symmetrische zinnen toch is het aantal lettergrepen vóór en achter de copula gelijk, terwijl bij verreweg de meeste de copula uit één lettergreep (is, was, had, zijn enz.) gevormd wordt. Naast het zoo juist genoemde punt van overeenkomst bestaat er, met betrekking tot de veranderingen in den hoorafstand met vermeerdering van het aantal lettergrepen, toch ook eenig verschil. Over het algemeen neemt bij R. de hoorafstand met vermeerdering van het aantal lettergrepen van 4 op 9, zoowel voor zinnen met oneven als met even aantal — hier een enkele uitzondering — toe. Bij D. daarentegen neemt men een verkleining bij de zinnen met oneven, een vergrooting bij die met even aantal lettergrepen waar. Terwijl dus van 4 tot 9 lettergrepen bij M. de hoorafstand, met een enkele uitzondering, regelmatig afneemt, blijkt hij bij R. daarentegen, zoowel voor zinnen met oneven als met even aantal lettergrepen toe te nemen; bij D. constateert men een vergrooting voor zinnen met oneven, een verkleining voor die met even aantal lettergrepen.

Waaraan is de stijging van den hoorafstand met het toenemen van het aantal lettergrepen bij de proefpersonen R. en D., vooral bij den eersten, te danken en waarin ligt de oorzaak der verschillen, die men bij de proefpersonen aantreft? Men zou verwachten, dat met het toenemen van het aantal lettergrepen de retro-actieve

inhibitie zich sterker doet gevoelen en daardoor minder wordt waargenomen. Het verstaan komt echter door nauwe samenwerking van apperceptie en assimilatie tot stand en evenals bij het lezen speelt ook hier de laatste een zeer voorname rol. Het assimilatie-proces nu vereischt een minimum van geappercipieerde elementen en de veronderstelling ligt voor de hand, dat bij zinnen met gering aantal lettergrepen deze in den regel te weinig in aantal zijn om tot aanknoopingspunten voor het assimilatie-proces te kunnen dienen. De tegenwerping, dat bij kortere zinnen het assimilatie-proces uiteraard minder omvangrijk is en derhalve minder steunpunten noodig heeft, houdt geen steek. Herhaaldelijk hadden wij gelegenheid op te merken, dat, wil de assimilatie niet in een louter raden overslaan, een bepaald aantal geappercipieerde elementen, onafhankelijk van de grootte der proefzinnen, moet gegeven zijn. Het voor proefzinnen van verschillende lengte benoodigde aantal geappercipieerde elementen houdt dus geen gelijken tred met de toename van het aantal lettergrepen. De gevolgtrekking is gewettigd, dat de reproductiestrekkingen, die er van de geappercipieerde elementen uitgaan, binnen zekere grenzen sterker zijn dan de inhibitie, welke zij op elkaar uitoefenen. Eerst voor zinnen van 10 en meer lettergrepen schijnt bij alle proefpersonen de laatste het van de eerste te winnen.

De individueele verschillen zijn nu eveneens gemakkelijk verklaarbaar. Bij M., voor wien wij een geleidelijke afname van den hoorafstand met het aangroeien van het aantal lettergrepen waarnemen, doet de invloed der inhibitie zich sterker gevoelen dan die der assimilatie. Bij R., voor wien, zoowel voor proefzinnen met oneven als met even aantal lettergrepen, de hoorafstand met de lengte der zinnen toeneemt, treedt het tegenovergestelde verschijnsel op: de nadeelige werking der inhibitie wordt niet alleen opgeheven, maar met het toenemen van het aantal aanknoopingspunten, is de assimilatie in staat haar werkzaamheid krachtiger te ontvouwen. Proefpersoon D. staat inzooverre tusschen R. en M. in, als voor zinnen met een even aantal lettergrepen de assimilatie het bij toename van de lengte der zinnen van de inhibitie schijnt te winnen, terwijl voor zinnen met oneven aantal lettergrepen deze laatste de overhand behouden. Een verklaring van dit zonderlinge verschijnsel kunnen wij niet geven.

Met behulp van den normalen gemiddelden index vocalis $\frac{\text{reservelucht-fluisterspraak}}{\text{conversatiespraak}} = {}^{1}/_{13}$ die vermoedelijk ook voor gefluisterde zinnen geldt, hebben wij in tabel IV de fluisterwaarden voor zinnen van verschillend aantal lettergrepen in conversatie-waarden

omgezet. Zoowel de fluister- als de conversatie-waarden uit tabel IV vormen het gemiddelde uit de hoorafstanden, die, met betrekking tot de lengte der verschillende zinnen, voor de proefpersonen R., M. en D. werden gevonden.

TABEL IV.

Letter-grepen.	Fluisterspraak.	Luide spraak.
3	4.67	60.71
4	3.61	46.93
5	3.61	46.93
6	3.11	40.43
7	3.42	44.46
8	3.21	41.73
9	3.34	43.42
10 en meer	2.41	31.33

Terloops zij opgemerkt, dat, tengevolge van de grootere overzichtelijkheid der gegevens van tabel IV de conclusies, waartoe de bespreking van tabel II ons voerde, hier nog duidelijker aan het licht treden: het groote verschil, dat er tusschen de hoorafstanden voor zinnen van 3 en voor die van 10 en meer lettergrepen bestaat (luide spraak bijna 30 M.), het, daarbij vergeleken, geringe verschil voor zinnen van 4 tot 9 lettergrepen (luide spraak ± 3.5 M.), de grootere hoorafstand, waarin zinnen met oneven aantal lettergrepen zich, tengevolge van hun veelal symmetrischen bouw, mogen verheugen enz.

Wij wezen er reeds op, dat symmetrisch gebouwde zinnen, op grooteren afstand worden verstaan dan asymmetrische. Zooals uit de gegevens van tabel V blijkt, speelt de symmetrische bouw

TABEL V.

	Symmetrische zinnen.			Asymmetrische zinnen.
Pp.	G.	G.A.	C.W.	G.
R.	4.11	0.79	4	3.50
M.	3.87	1	4	2.57
D.	4.21	0.96	4.5	3.97

van een zin een zeer voorname rol bij het verstaan. Ook hier worden sterke individueele verschillen waargenomen; voor R., M. en D. bedraagt het verschil in hoorafstand voor symmetrisch en asymmetrisch gebouwde zinnen resp. 0.61, 1.13 en 0.24 M.

Dat spreekwoorden en spreekwoordelijke gezegden op grooteren afstand worden verstaan, valt gemakkelijk te begrijpen. Door hun bekendheid bieden zij meer steun aan het assimilatieproces, dat zich in aansluiting bij de geappercipieerde elementen voltrekt. De gunstige invloed, dien de inhoud der proefzinnen bij spreekwoorden en spreekwoordelijke gezegden uitoefent, staat echter, zooals uit een vergelijking van tabel V en VI blijkt, ten achter bij dien, welke in de louter formeele eigenschap van den symmetrischen bouw zijn oorsprong vindt. Wordt voor symmetrisch gebouwde zinnen de hoorafstand voor de proefpersonen R. en M. vergroot met resp. 0.61 en 1.13 M., zoo bedraagt de vermeerdering voor de spreekwoorden slechts resp. 0.41 en 0.74 M.

TABEL VI.

	Spreekwoorden.			Overige zinnen.
Pp.	G.	G.A.	C.W.	G.
R.	3.78	1	4	3.37
M.	3.67	0.94	4	2.93

Dat ook het ontbreken van onderwerp, gezegde of voorwerp in een zin of een wijziging in de volgorde, waarin deze zinsdeelen plegen voor te komen, een beletsel vormen voor het verstaan, blijkt uit een beschouwing der gegevens van tabel VII. De onregelmatig gevormde zinnen toch worden door R., M. en D. eerst op belangrijk korteren afstand gehoord dan de regelmatig gevormde. De vermindering van den hoorafstand bedraagt resp. 0.73, 0.28 en 1.01 M. De zeer aanzienlijke vermindering voor D. is waarschijnlijk te wijten aan de omstandigheid, dat deze proefpersoon als Vlaming minder goed bekend was met de betrekkelijk ongewone constructie, die vele onzer onregelmatig gevormde zinnen vertoonden.

De verhouding tusschen de gemiddelde afstanden, waarop gefluisterde zinnen en gefluisterde woorden worden verstaan, noemen wij met Zwaardemaker index loquelae. In de oorheelkunde taxeert men den afstand, waarop de laatste worden waargenomen op ± 18 M.

ZWAARDEMAKER en QUIX kwamen daarenboven aan de hand van experimenteele gegevens tot dezelfde bevinding.[1]) De gemiddelde

TABEL VII.

	Onregelmatig gevormde zinnen.			Regelmatig gevormde zinnen.
Pp.	G.	G.A.	C.W.	G.
R.	2.90	0.72	3	3.63
M.	2.65	1.11	2.75	2.93
D.	2.64	0.88	2.50	3.65

afstand, waarop gefluisterde zinnen van 3—14 lettergrepen worden verstaan, beloopt, blijkens de gegevens van tabel II en IV ongeveer 3.42 M., zoodat de index loquelae $\frac{3.42}{18} = {}^{19}/_{100}$ bedraagt.

SAMENVATTING.

1. Het materiaal, waarvan wij bij ons onderzoek gebruik maakten, bestond uit zinnen van 3 tot 14 lettergrepen. De aanbieding geschiedde door middel van de fluisterspraak met reserve-lucht.

2. Wij bepaalden de gehoorscherpte onzer proefpersonen met behulp van afzonderlijke woorden, samengesteld uit isozonale en aequiintense klanken. Allen bleken een normaal gehoor te bezitten; de hoorafstanden wisselden voor de verschillende woorden van 6—30 M.

3. Zinnen worden met de toename van het aantal lettergrepen moeilijker verstaan. Het verschil in afstand, waarop zinnen van 3 en die van 10 en meer lettergrepen worden waargenomen, bedraagt gemiddeld 1.83 M. (fluisterspraak).

4. De afname van den hoorafstand met de vermeerdering van het aantal lettergrepen heeft over het algemeen niet geleidelijk plaats. Zinnen met een oneven aantal lettergrepen worden vrij geregeld beter verstaan dan die met even aantal en één lettergreep meer. Zelfs worden zinnen van 9 lettergrepen gemiddeld 0.33 M. verder waargenomen dan die van 4 lettergrepen. De oorzaak van dit verschijnsel is gelegen in het feit, dat symmetrische bouw, die het verstaan in de hand werkt, in onze proeven meer bij zinnen met oneven dan bij die met even aantal lettergrepen voorkwam.

[1]) De studie van het spraakgehoor. Onderzoekingen Physiol. Lab. Utrecht (5) dl. 5. blz. 1.

5. Spreekwoorden en spreekwoordelijke gezegden worden op grooteren afstand verstaan. De gunstige invloed, dien de inhoud der proefzinnen bij spreekwoorden en spreekwoordelijke gezegden uitoefent, staat echter ten achter bij dien, welke in de louter formeele eigenschap van den symmetrischen bouw zijn oorsprong vindt.

6. Het ontbreken van onderwerp, gezegde of voorwerp in een zin of een wijziging in de volgorde, waarin deze zinsdeelen plegen voor te komen, vormen een beletsel voor het verstaan; de hoorafstand vermindert er door.

7. Het verstaan komt door nauwe samenwerking van apperceptie en assimilatie tot stand. Voor zinnen van 3 tot 9 lettergrepen weegt de invloed der reproductie-strekkingen, die er van de geappercipieerde elementen uitgaan, tegen dien der inhibitie, welke in de vermeerdering van het aantal lettergrepen haar oorsprong vindt, op. Eerst voor zinnen van 10 en meer lettergrepen schijnt de laatste het van de eerste te winnen.

8. De index loquelae, d. w. z. de verhouding tusschen de gemiddelde afstanden, waarop gefluisterde zinnen en gefluisterde woorden worden verstaan, bedraagt $^{19}/_{100}$.

Sterrekunde. — De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan van Dr. J. WOLTJER JR: „*De pericentrumlengte van Hyperion en de massa van Titan*".

(Mede aangeboden door den Heer ZEEMAN).

1. In mijn in den loop van dit jaar verschenen dissertatie[1]), getiteld „Investigations in the theory of Hyperion", heb ik een begin gemaakt met de berekening der storingen door Titan in de baan van Hyperion teweeggebracht. Deze ontwikkelingen omvatten de libratie in het kritieke argument, in de halve groote as en in de excentriciteit, benevens de bepaling der middelbare beweging van het argument der libratie; verder de groote storing in het kritieke argument, die evenredig is met de eerste macht der excentriciteit van Titan. Het is mijn bedoeling deze berekeningen verder voort te zetten, waartoe in de eerste plaats de libratie in de pericentrumlengte en de middelbare beweging van dit element behooren bepaald te worden. Het resultaat dezer bepaling vormt den inhoud dezer mededeeling, welke een vervolg vormt op de bovengenoemde verhandeling.

Ten einde de storingen in de pericentrumlengte te kunnen berekenen moet de ontwikkeling der storingsfunctie uit het eerste hoofdstuk der „Investigations" verder voortgezet worden door de bepaling der afgeleide naar e, de excentriciteit van Hyperion. Daar hiermede nauw verwant is de berekening der afgeleide naar de halve groote as a, zullen wij deze, hoewel voor het doel der mededeeling niet vereischt, tevens bepalen. Ter contrôle van de voor deze ontwikkelingen gebruikte numerieke waarden der storingsfunctie is een onafhankelijke berekening dezer waarden uitgevoerd, waaraan ten grondslag lag de goniometrische ontwikkeling van het quadraat van den onderlingen afstand beider satellieten. Het grootste deel dezer contrôleberekening is verricht door den heer D. GAIJKEMA, rekenaar aan de Leidsche Sterrenwacht.

2. De berekening der afgeleide van de storingsfunctie naar e bestaat in de bepaling der functie

[1]) Kortheidshalve citeer ik in het vervolg deze verhandeling als „Investigations".

$$\frac{\partial f([1])}{\partial e},$$

waar $f([1])$ de in het eerste hoofdstuk der „Investigations" gedefinieerde functie is. Uit deze definitie volgt met de notatie van dit hoofdstuk:

$$\frac{\partial f([1])}{\partial e} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial e}\frac{a'}{\Delta}\, d\,[3]\,. \tag{1}$$

Voor een gegeven waarde van $[1]$ kan de grootheid $\frac{\partial}{\partial e}\frac{a'}{\Delta}$ (welke slechts functie van $[1]$ en $[3]$ is, in zooverre de hoekveranderlijken betreft) aldus ontwikkeld worden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial e}\frac{a'}{\Delta} = p_o + p_1 \cos [3] + p_2 \cos 2\,[3] + \ldots + p_n \cos n\,[3] + \ldots \\ + q_1 \sin [3] + q_2 \sin 2\,[3] + \ldots + q_n \sin n\,[3] + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Men heeft dan:

$$\frac{\partial f([1])}{\partial e} = p_o\,, \tag{3}$$

en:

$$\frac{1}{n}\sum_{s=o}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial e}\frac{a'}{\Delta}\right)_s = p_o + p_n + p_{2n} + p_{3n} + \ldots, \tag{4}$$

waar $\left(\frac{\partial}{\partial e}\frac{a'}{\Delta}\right)_s$ de waarde van $\frac{\partial}{\partial e}\frac{a'}{\Delta}$ beteekent voor $[3] = \frac{2\pi}{n}\,s$.

Dus volgt:

$$\frac{\partial f([1])}{\partial e} = \frac{1}{n}\sum_{s=o}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial e}\frac{a'}{\Delta}\right)_s - p_n - p_{2n} - p_{3n} - \ldots \tag{5}$$

Men kan zich een oordeel vormen over de grootte der coefficienten p_n voor groote waarden van n door beschouwing der middelwaarden

$$\frac{1}{n}\sum_{s=o}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial e}\frac{a'}{\Delta}\right)_s$$

voor verschillende waarden van n. Ik kies $n = 270$, 135, 90, 54 en neem $[1] = 0°$. Ik vind dan (voor de waarden der constanten e en $\frac{a'}{a}$ uit de tabel op pg. 3 der „Investigations"):

$n = 270$	$\frac{1}{n}\sum_{s=o}^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial e}\frac{a'}{\Delta}\right)_s \cdot 10^6 =$	$-\ 108614$
135		$-\ 108614$
90		$-\ 108614$
54		$-\ 108616$.

Uit deze waarden volgt:

$$p_0 + p_{270} + \ldots = p_0 + p_{135} + p_{270} + \ldots = p_0 + p_{90} + p_{180} + \ldots; \qquad (6)$$

en dus:

$$p_{135} = 0, \qquad p_{90} = 0, \qquad p_{54} = -2.10^{-5}. \qquad (7)$$

Veronderstellen wij dat de coefficienten p_n voor groote waarden van n, ook indien $[1] \neq 0°$ van deze orde van grootte zijn, zoo volgt dat we de formule

$$\frac{\partial f([1])}{\partial e} = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial e} \frac{a'}{\Delta} \right)_s \qquad (8)$$

mogen gebruiken, zonder dat wij in de daaruit volgende waarde van $\frac{\partial f([1])}{\partial e}$ een grooter fout uit dezen hoofde hebben te vreezen dan van een halve eenheid der vijfde decimaal, mits $n \geq 90$. Ik stel in de volgende tabel samen de volgens deze formule berekende waarden van $\frac{\partial f([1])}{\partial e}$; hierbij heb ik voor $[1] = 0°$ genomen $n = 270$, voor de overige waarden van $[1]$ $n = 135$; de waarden der constanten e en $\frac{a'}{a}$ zijn die der tabel op pag. 3 der „Investigations".

$[1]$	$\frac{\partial f([1])}{\partial e} . 10^5$
0°	— 108614
+ 8°	— 108574
+ 16°	— 108450
+ 24°	— 108226
+ 32°	— 107877
+ 36°	— 107647

De functie $\frac{\partial f([1])}{\partial e}$ is een even functie van $[1]$; stelt men $[1] = q \sin w$, waar q een constante is, dan wordt de ontwikkeling:

$$\frac{\partial f([1])}{\partial e} = \psi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} k_{2n} \cos 2nw . \qquad (9)$$

Ik stel nu weer $q = +36°$, dus $[1] = +36° \sin w$; berekent men met behulp van deze laatste vergelijking voor elk der waarden van $[1]$ uit bovenstaande tabel een waarde van w in het eerste quadrant

dan heeft men $\psi(w)$ voor zes waarden van w en dus 6 lineaire vergelijkingen, waaruit men, als men k_{12}, k_{14}, ..., enz. $= 0$ stelt, $k_0, k_2, \ldots, k_{10}$ kan bepalen. Men vindt dan k_8 en k_{10} gelijk aan nul en verder de volgende voorstelling der functie $\psi(w)$:

$$\left.\begin{aligned} 10^5 \cdot \frac{\partial f([1])}{\partial e} = 10^5 \cdot \psi(w) = -\,108151 & \\ -\,484 \quad & \cos 2w \\ +\,21 \quad & \cos 4w \\ +\,1 \quad & \cos 6w\,. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

3. De afgeleide der functie $f([1])$ naar a is bepaald door de formule

$$a\,\frac{\partial f([1])}{\partial a} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a\,\frac{\partial}{\partial a}\,\frac{a'}{\Delta}\,d[3]\,. \qquad (11)$$

Voor een gegeven waarde van $[1]$ kan de grootheid $a\,\dfrac{\partial}{\partial a}\,\dfrac{a'}{\Delta}$ aldus ontwikkeld worden:

$$\left.\begin{aligned} a\,\frac{\partial}{\partial a}\,\frac{a'}{\Delta} = p_0 + p_1 \cos[3] + p_2 \cos 2[3] + \ldots + p_n \cos n[3] + \ldots \\ + q_1 \sin[3] + q_2 \sin 2[3] + \ldots + q_n \sin n[3] + \ldots \end{aligned}\right\} (12)$$

Dus volgt:

$$a\,\frac{\partial f([1])}{\partial a} = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\left(a\,\frac{\partial}{\partial a}\,\frac{a'}{\Delta}\right)_s - p_n - p_{2n} - p_{3n} - \ldots \qquad (13)$$

Wij vormen weer de middelwaarden $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{s=0}^{n-1}\left(a\,\dfrac{\partial}{\partial a}\,\dfrac{a'}{\Delta}\right)_s$ voor de waarden $n = 270$, 135, 90, 54 en voor de waarde $[1] = 0°$. De waarden der constanten e en $\dfrac{a'}{a}$ zijn dezelfde als in de tabel op pag. 3 der „Investigations". Ik vind:

$$\begin{aligned} n = 270 \qquad & \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\left(a\,\frac{\partial}{\partial a}\,\frac{a'}{\Delta}\right)_s \cdot 10^5 = -\,110691 \\ 135 \qquad & \qquad\qquad -\,110691 \\ 90 \qquad & \qquad\qquad -\,110691 \\ 54 \qquad & \qquad\qquad -\,110706\,. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$p_0 + p_{270} + \ldots = p_0 + p_{135} + p_{270} + \ldots = p_0 + p_{90} + p_{180} + \ldots; \qquad (14)$$

en dus:

$$p_{270} = 0, \qquad p_{135} = 0, \qquad p_{90} = 0; \tag{15}$$

verder:

$$p_{54} = -15 \cdot 10^{-5}. \tag{16}$$

Veronderstellen wij dat de coefficienten p_n voor groote waarden van n van dezelfde orde van grootte zijn, ook al is $[1] \neq 0°$, dan volgt dat we de formule

$$a \frac{\partial f([1])}{\partial a} = \frac{1}{n} \sum_{s=o}^{n-1} \left(a \frac{\partial}{\partial a} \frac{a'}{\Delta} \right)_s \tag{17}$$

mogen gebruiken zonder dat wij in de daaruit volgende waarden van $a \frac{\partial f([1])}{\partial a}$ een grooter fout uit dezen hoofde hebben te vreezen dan van een halve eenheid der vijfde decimaal, mits $n \geq 90$. Ik stel in de volgende tabel samen de volgens deze formule berekende waarden van $a \frac{\partial f([1])}{\partial a}$; voor $[1] = 0°$ heb ik genomen $n = 270$, voor de overige waarden van $[1]$ $n = 135$; de waarden der constanten e en $\frac{a'}{a}$ zijn die der tabel op pag. 3 der „Investigations".

$[1]$	$a \frac{\partial f([1])}{\partial a} \cdot 10^5$
0°	— 110691
+ 8°	— 110887
+ 16°	— 111477
+ 24°	— 112480
+ 32°	— 113921
+ 36°	— 114820

De functie $a \frac{\partial f([1])}{\partial a}$ is een even functie van $[1]$; stelt men $[1] = q \sin w$, waar q een constante is, dan wordt de ontwikkeling

$$a \frac{\partial f([1])}{\partial a} = \lambda(w) = \sum_{n=o}^{\infty} l_{2n} \cos 2n\, w. \tag{18}$$

Ik stel nu weer $q = +36°$, dus $[1] = +36° \sin w$; berekent men nu met behulp van deze laatste vergelijking voor elk der waarden van $[1]$ uit bovenstaande tabel een waarde van w in het eerste quadrant dan heeft men $\lambda(w)$ voor zes waarden van w en dus zes lineaire vergelijkingen, waaruit men als men $l_{12}, l_{14}, \ldots$, enz.

$=0$ stelt $l_0, l_2, \ldots, l_{10}$ kan bepalen. Men vindt op deze wijze de volgende voorstelling der functie $\lambda(w)$ (l_6, l_8 en l_{10} blijken nul te zijn):

$$a\frac{\partial f([1])}{\partial a} \cdot 10^5 = \lambda(w) \cdot 10^5 = \left.\begin{array}{l} -112732 \\ +2064 \cos 2w \\ -23 \cos 4w. \end{array}\right\} \tag{19}$$

4. Het eerste stelsel differentiaalvergelijkingen van Hoofdstuk II § 3 der „Investigations" vormt de vergelijkingen ter bepaling der vier veranderlijken ϱ, σ, θ, Ω, voor het geval dat de excentriciteit van Titan nul ondersteld wordt. In het verdere gedeelte van het genoemde hoofdstuk vindt men de afleiding der termen van de orde 0 en 1 in $\sqrt{\frac{m'}{M}}$ der veranderlijken ϱ, σ, θ. Wij willen nu deze berekeningen aanvullen door een nader onderzoek der laatste vergelijking van het zooeven genoemde stelsel, de vergelijking voor Ω. Deze luidt aldus:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial R_1}{\partial \sigma}, \tag{20}$$

of wel:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{m'}{a'}\frac{\partial f}{\partial \sigma}. \tag{21}$$

Daar ϱ, σ en θ bekende functies van t zijn, berust de oplossing dezer vergelijking op een quadratuur.

Het rechterlid der vergelijking is een even functie van θ; na substitutie van de in Hoofdstuk II § 3 der „Investigations" aangegeven reeksen voor ϱ, σ, θ wordt dit rechterlid dus van de gedaante

$$\mu^2 \sum_{p=0}^{p=\infty} \Phi_p \mu^p, \tag{22}$$

waar $\mu = \sqrt{\frac{m'}{M}}$ en Φ_p een even periodieke functie van τ is.

Laat $\overline{\Phi}_p$ den constanten term der goniometrische ontwikkeling van Φ_p naar τ aanduiden. Dan is

$$\frac{d\Omega}{dt} = \mu^2 \sum_{p=0}^{p=\infty} \overline{\Phi}_p \mu^p + \mu^2 \sum_{p=0}^{p=\infty} (\Phi_p - \overline{\Phi}_p)\mu^p, \tag{23}$$

en dus:

$$\Omega = \text{constante} + \mu^2 t \sum_{p=0}^{p=\infty} \overline{\Phi}_p \mu^p + \frac{\mu^2}{\nu} \sum_{p=0}^{p=\infty} \mu^p \int_0^\tau (\Phi_p - \overline{\Phi}_p) d\tau. \tag{24}$$

Ontwikkelt men den deeler ν volgens de in Hoofdstuk II § 3 vermelde reeks

$$\nu = \sum_{p=1}^{p=\infty} \nu_p \mu^p ,$$

dan wordt Ω gelijk aan de volgende uitdrukking:

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \varpi + \sum_{p=0}^{p=\infty} \Omega_p \left(\sqrt{\frac{m'}{M}}\right)^p , \\ \Omega_p &= \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega^{(p,s)} \sin s\tau , \qquad p = 0,1,\ldots, \\ \varpi &= \text{constante} + \chi\, t , \\ \chi &= \frac{m'}{M} \sum_{p=0}^{p=\infty} \chi_{p+2} \left(\sqrt{\frac{m'}{M}}\right)^p . \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Den coefficient van t in ϖ heb ik, afwijkend van de in de „Investigations" gevolgde notatie door χ voorgesteld, ten einde verwarring met het bekende getal π te voorkomen.

Men vindt:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_0 &= 0, \\ \Omega_1 &= -\frac{1}{\nu_1}\frac{M}{a'}\int_0^\tau \left(\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0} - \overline{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right]}_{\rho_0\sigma_0\theta_0}\right) d\tau, \\ \chi_2 &= -\frac{M}{a'}\overline{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right]}_{\rho_0\sigma_0\theta_0}, \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

waar de constante term der goniometrische ontwikkeling van $\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0}$ naar τ is aangeduid door het functieteeken met een streep er boven.

Voor de berekening van Ω_1 en χ_2 is het wenschelijk $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ uit te drukken in $\frac{\partial f}{\partial e}$ en $\frac{\partial f}{\partial a}$.

Daar

$$\frac{\partial a}{\partial \sigma} = 0 , \quad \frac{\partial e}{\partial \sigma} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{1}{\sqrt{aM}}, \qquad (27)$$

is

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = -\frac{\partial f}{\partial e}\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{1}{\sqrt{aM}} . \qquad (28)$$

Derhalve:

$$\left.\begin{aligned}\chi_2 &= \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{e_0}\sqrt{\frac{a'}{a_0}}\,n'_0\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0},\\ \Omega_1 &= \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{e_0}\sqrt{\frac{a'}{a_0}}\,\frac{n'_0}{\nu_1}\int\limits_0^{\tau}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0}-\overline{\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]}_{\rho_0\sigma_0\theta_0}\right)d\tau,\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

of wel, voor de factoren hun numerieke waarden zettend:

$$\left.\begin{aligned}\chi_2 &= +\,[0.937584]\,n'_0\,\overline{\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]}_{\rho_0\sigma_0\theta_0},\\ \Omega_1 &= +\,[2.499354]^{(0)}\int\limits_0^{\tau}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0}-\overline{\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]}_{\rho_0\sigma_0\theta_0}\right)d\tau;\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Ω_1 is hier in graden uitgedrukt, hetgeen aangegeven is door het symbool (0) bij den numerieken factor; de getallen in vierkante haken zijn logarithmen.

Voor verdere ontwikkelingen is het wenschelijk tevens χ_3 te bepalen. Dit geschiedt door de vergelijking:

$$\chi_3 = -\frac{M}{a'}\left\{\overline{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma\partial\rho}\right]}_0\rho_1 + \overline{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma^2}\right]}_0\sigma_1 + \overline{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma\partial\theta}\right]}_0\theta_1\right\}, \quad (31)$$

waar $[\;]_0$ een verkorte schrijfwijze is voor $[\;]_{\rho=\rho_0,\ \sigma=\sigma_0,\ \theta=\theta_0}$.

Het rechterlid is de constante term van een even periodieke functie van τ, die van teeken omkeert als men τ door $\pi-\tau$ vervangt. Hieruit volgt:

$$\chi_3 = 0\,. \quad (32)$$

5. De in § 2 dezer mededeeling gegeven ontwikkeling der functie $\dfrac{\partial f([1])}{\partial e}$ stelt ons nu in staat de numerieke waarde van Ω_1 en χ_2 te berekenen. Om de functie $\left[\dfrac{\partial f}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0}$ te berekenen heeft men in de ontwikkeling van $\dfrac{\partial f([1])}{\partial e}$ als functie van w volgens formule (10) w op de bekende wijze als functie van τ uit te drukken.

Uit de betrekking (Investigations pag. 26)

$$w + x \sin 2w = \tau, \qquad x = +\,0.00318,$$

volgt:

$$\cos p w = \cos p\tau - \frac{p}{2}x\{\cos(p+2)\tau - \cos(p-2)\tau\} + \{\ldots\}x^2 + \ldots; \quad (33)$$

en dus:

$$\left.\begin{aligned} \cos 2w - \cos 2\tau &= +\,0.0032 - 0.0032 \cos 4\tau, \\ \cos 4w - \cos 4\tau &= +\,0.01 \cos 2\tau - 0.01 \cos 6\tau. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Met behulp dezer formules leidt men de volgende waarde voor de ontwikkeling van $\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0}$ als functie van τ af:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0} . 10^5 = -\,108153 & \\ -\,484 \quad & \cos 2\tau \\ +\,23 \quad & \cos 4\tau \\ +\,1 \quad & \cos 6\tau. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Hieruit volgt:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]}_{\rho_0\sigma_0\theta_0} . 10^5 = -\,108153\,; \\ 10^5 . \int_0^\tau \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0} - \overline{\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]}_{\rho_0\sigma_0\theta_0} \right\} d\tau = -\,242 \sin 2\tau + 6 \sin 4\tau\,. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Substitueert men deze uitdrukkingen in formule (30) dan vindt men de resultaten, die vereenigd zijn in onderstaande tabel.

$\Omega_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \Omega^{(1,s)} \sin s\tau$
$\Omega_1 = -\,0^\circ.765 \sin 2\tau$ $+\,0^\circ.019 \sin 4\tau$ $\Omega^{(1,2s-1)} = 0 \quad s = 1,2,\ldots$ $\chi_2 = -\,9.3675\, n'_0$

6. Voor volgende ontwikkelingen is het van belang de functies Ω_1 en χ_2 (als functies van ρ_0, σ_0, q en τ beschouwd) naar q te differentieeren; hiertoe is vereischt de waarde der functie

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0},$$

welke gegeven wordt door de vergelijking

$$\frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial e \partial \theta}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial q}. \quad (37)$$

Ter bepaling der functie $\frac{\partial^2 f}{\partial e \partial \theta}$ heeft men de formules:

$$\left.\begin{aligned} q\frac{\partial \cos 2w}{\partial\theta} &= -4\sin w, \\ q\frac{\partial \cos 4w}{\partial\theta} &= +8\sin w - 8\sin 3w, \\ q\frac{\partial \cos 6w}{\partial\theta} &= -12\sin w + 12\sin 3w - 12\sin 5w. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Hieruit volgt:

$$\left.\begin{aligned} 10^5 . q\frac{\partial^2 f}{\partial e\partial\theta} = &+ 2092 \ \sin w \\ &- 156 \ \sin 3w \\ &- 12 \ \sin 5w. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Om de goniometrische functies van de verschillende veelvouden van w naar τ te ontwikkelen heeft men in de eerste plaats de formule (Investigations pag. 27):

$$\sin w = +0.99841 \sin\tau - 0.00159 \sin 3\tau .$$

Verder leidt men uit de in de vorige paragraaf aangehaalde betrekking

$$w + x\sin 2w = \tau, \qquad x = +0.00318,$$

af:

$$\sin pw = \sin p\tau - \frac{p}{2}x\{\sin(p+2)\tau - \sin(p-2)\tau\} + \{\,.\,.\}x^2 + \ldots, \quad (40)$$

en dus:

$$\sin 3w - \sin 3\tau = +0.005\sin\tau - 0.005\sin 5\tau . \quad (41)$$

Met behulp dezer formules leidt men af:

$$\left.\begin{aligned} 10^6 . q\left[\frac{\partial^2 f}{\partial e\partial\theta}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0} = &+ 2088 \ \sin\tau \\ &- 159 \ \sin 3\tau \\ &- 11 \ \sin 5\tau. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Uit de tabel voor $\frac{\partial\theta_0}{\partial q}$ op bldz. 33 der „Investigations" volgt in verband met deze formule:

$$\left.\begin{aligned} 10^5 . q^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial e\partial\theta}\right]_{\rho_0\sigma_0\theta_0}\frac{\partial\theta_0}{\partial q} = &+ 653 \\ &- 706 \ \cos 2\tau \\ &+ 49 \ \cos 4\tau \\ &+ 3 \ \cos 6\tau . \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Dus is·

$$\left.\begin{aligned} 10^5 \cdot q^2 \frac{\partial}{\partial q}\left[\frac{\overline{\partial f}}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\vartheta_0} &= +\,653\,, \\ 10^5 \cdot q^2 \frac{\partial}{\partial q}\int_0^\tau \left\{\left[\frac{\partial f}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\vartheta_0} - \left[\frac{\overline{\partial f}}{\partial e}\right]_{\rho_0\sigma_0\vartheta_0}\right\} d\tau &= -\,353 \sin 2\tau + 12 \sin 4\tau. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Uit formule (30) volgen verder de waarden van $\frac{q}{\chi_2}\frac{\partial \chi_2}{\partial q}$ en $q\frac{\partial \Omega_1}{\partial q}$, welke ik samenstel in de volgende tabel. Bij deze afleiding bedenke men dat de numerieke factor van de integraal in de formule voor Ω_1 ook van q afhankelijk is.

$\frac{\partial \Omega_1}{\partial q} = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \frac{\partial \Omega^{(1,s)}}{\partial q} \sin s\tau$
$q\frac{\partial \Omega_1}{\partial q} = -\,0.0305 \sin 2\tau + 0.0010 \sin 4\tau$
$\frac{q}{\chi_2}\frac{\partial \chi_2}{\partial q} = -\,0.00961$

7. Wij willen nu de in § 5 gevonden waarde van χ_2 gebruiken ter bepaling van de massa van Titan. Daar $\chi_3 = 0$, volgt voor de pericentrumbeweging van Hyperion met verwaarloozing van termen der orde $\left(\frac{m'}{M}\right)^2$:

$$-\,9.3675\, n'_0 \frac{m'}{M}. \tag{45}$$

Anderzijds vindt H. STRUVE [1]) voor de middelbare beweging van het pericentrum van Hyperion:

$$-\,18.^\circ 663\,;$$

brengt men de correctie voor de precessie aan, dan wordt deze waarde:

$$-\,18.^\circ 677\,;$$

deze bewegingen gelden voor het Juliaansche jaar als tijdseenheid.

Om de theoretische waarde volgens formule (45) met de waargenomen beweging te kunnen vergelijken moeten wij deze laatste nog corrigeeren voor de saeculaire variaties veroorzaakt door de zon, door de afplatting van Saturnus en door de andere satellieten. De

[1]) Beobachtungen der Saturnstrabanten. Publications de l'Observatoire Central Nicolas. Série II. Vol. XI. 1898. pag. 290.

waarden dezer variaties ontleen ik aan H. SAMTER [1]), volgens wien zij respectievelijk $+ 0.^\circ 011$, $+ 0.^\circ 234$ en $+ 0.^\circ 009$ per jaar bedragen. Verminderen wij de waargenomen beweging met de som dezer getallen, zoo wordt de vergelijking ter bepaling der massa van Titan deze:

$$- 9.3675\, n'_0 \frac{m'}{M} = - 18.^\circ 931\,. \qquad (46)$$

Daar n'_0 slechts in termen van de orde $\frac{m'}{M}$ en hooger van n' verschilt neem ik $n'_0 = n'$ en dus:

$$n'_0 = 365.25 \times 22.^\circ 5770.$$

Uit (46) volgt dan:

$$\frac{M}{m'} = 4080\,.$$

Dit resultaat is in goede overeenstemming met de eveneens onder vereenvoudigende onderstellingen afgeleide waarde uit de middelbare beweging van het libratie-argument (Investigations pag. 70) n.l.:

$$\frac{M}{m'} = 3986\,.$$

De waarden van $\frac{M}{m'}$ door EICHELBERGER en SAMTER berekend uit de storingen van Hyperion zijn:

W. S. EICHELBERGER: 4172 ± 58,

H. SAMTER: 4125.

De onderlinge overeenstemming der verschillende waarden is dus bevredigend.

1) Die Masse des Saturnstrabanten Titan. Sitz. Ber. der Kön. Pr. Akad. der Wissenschaften. 1912.

Scheikunde. — De Heer v. ROMBURGH biedt een mededeeling aan van den correspondent A. W. K. DE JONG te Buitenzorg over: „*De Heterokaneelzuren van* ERLENMEIJER Jr."

Behalve de Storaxkaneelzuren bestaan er volgens ERLENMEIJER JR. nog 2 andere normaal-kaneelzuren, de Heterokaneelzuren, die uit synthetisch kaneelzuur afgescheiden werden.

Het verschil tusschen Storax- en Heterokaneelzuur bestaat volgens hem feitelijk alleen in de verschillende wijzen, waarop deze zuren uit aether kristalliseeren. Hij schrijft [1]: „Wie ich schon in der ersten Abhandlung erwähnt habe, steht bei der Bearbeitung der Zimtsäuren als einziges brauchbares Unterscheidungsmerkmal die verschiedene Krystallisationsart der Storaxzimtsäure und der synthetischen Zimtsäure aus Aether zur Verfügung. Mit Hilfe dieses allerdings ungewöhnlichen Unterscheidungsmittels gelang es zu zeigen, dass die synthetische Zimtsäure nach verschiedenen mitgeteilten Methoden in zwei unter einander und von der synthetischen Säure verschiedene Säuren, die Storaxsäure und die Heterosäure, zerlegt werden kann, welche bei der Analyse einen Unterschied in der Zusammensetzung nicht erkennen liessen," terwijl op l.c.blz. 502 geschreven staat: „Begnügt man sich damit, beide Säuren aus Wasser zu krystallisieren und die Schmelzpunkte zu bestimmen, so wird man keinen so wesentlichen Unterschied wahrnehmen, dass die Annahme einer prinzipiellen Verschiedenheit berechtigt erschiene. Ganz anders aber, wenn man die beiden Säuren in Aether löst und diese Lösungen langsam verdunsten lässt. Aus der aetherischen Lösung der Storaxsäure erhält man so ohne Mühe wasserklare, dicktaflige, gut ausgebildete Krystalle, welche mehrere Zentimeter gross und über 2 mm. dick werden können; aus der aetherischen Lösung der reinen synthetischen Zimtsäure dagegen krystallisieren unter genau den gleichen Bedingungen Aggregate von über einander geschichteten, mit einander verwachsenen, äussert dünnen Lamellen, welche meist keine geradlinigen Umgrenzungslinien erkennen lassen." „An demselben Thermometer beobachtet, schmilzt die synthetische Säure bei 132—133°, die Storaxsäure bei 134—135° [2]).

---

[1]) Ber. **42**, 2649.

[2]) Verdere bijzonderheden van de kristalvormen vindt men in Biochem. Zeitschr. **34**, 366 en Ber. **42**, 507.

Door RIBER en GOLDSCHMIDT [1]) werd er op gewezen, dat de verschillen, die ERLENMEIJER tusschen het synthetische en het Storaxkaneelzuur waargenomen heeft, zeer wel aan verontreinigingen van het synthetische zuur geweten kunnen worden, daar het kristallisatievermogen van kaneelzuur zeer sterk door sporen van andere zuren zooals chloor-, of nitrokaneelzuren beinvloed wordt. Zij vonden, dat het synthetische zuur van den handel verontreinigd was door een chloorkaneelzuur.

ERLENMEIJER [2]) antwoordde hierop, dat ook synthetisch kaneelzuur, bereid uit zuiver, goed kristalliseerend Storaxkaneelzuur, door dit eerst in alkalische oplossing met kaliumpermanganaat te oxydeeren tot benzaldehyde en hieruit volgens de Perkinsche synthese kaneelzuur te bereiden, denzelfden eigenaardigen kristalvorm vertoont.

Niettegenstaande dit antwoord, komt men bij het lezen van de verhandelingen van E. toch tot de gedachte, dat het Heterokaneelzuur geen zuivere stof is, dat het door hem gevonden verschil met gewoon kaneelzuur aan een verontreiniging moet worden toegeschreven.

Zoo schrijft hij [3]), dat synthetisch en ook Heterokaneelzuur door verhitten van hun waterige kleurlooze oplossingen met beenderkool omgezet kunnen worden, ofschoon met een verlies van 10 %, in Storaxkaneelzuur. Ook herhaald sublimeeren [4]) doet het Heterokaneelzuur in Storaxkaneelzuur overgaan. Verder gelukt het hem door gefractionneerd praecipiteeren [5]) van een oplossing van het natriumzout van synthetisch kaneelzuur gemakkelijk 90 % Storaxkaneelzuur er uit af te zonderen, terwijl synthetisch kaneelzuur voor 50 % uit Storaxkaneelzuur zou bestaan [6]). Het heet dan [7]): „Da die Heterozimtsäure, trotz der Gewinnung von Storaxzimtsäure aus ihr, in ihren Eigenschaften unverändert bleibt, kann man nicht anders annehmen, als dass bei dem fortgesetzten Fraktionierungsverfahren ein allmählicher Uebergang von Hetero- in Storaxzimtsäure stattfindet".

In zijn uitvoerige verhandelingen zoekt men tevergeefs naar de wijze, waarop hij zich zuiver kaneelzuur voor zijn onderzoekingen heeft verschaft. Blijkbaar neemt hij aan, dat goed kristalliseerend

---

1) Ber. **43**, 453.
2) Ber. **43**, 955.
3) Ber. **43**, 1076.
4) Ber. **42**, 2658.
5) Bioch. Zeitschr. **34**, 423.
6) Bioch. Zeitschr. **34**, 425.
7) Ibidem 424.

Storaxkaneelzuur [1]) geen onzuiverheden kan bevatten, ook geen minimale hoeveelheden. En toch gaat het hier om sporen, waar reeds 1 % p-chloorkaneelzuur het kristallisatievermogen van het Storax-kaneelzuur zoodanig verandert, dat het volkomen op het synthetische zuur gelijkt [2]), terwijl van o-nitrokaneelzuur maar 0.3 % noodig waren om hetzelfde effect te verkrijgen [3]) Is de verontreiniging minder, dan zal het kunnen gebeuren, dat men den invloed op den kristalvorm niet merkt. De oorzaak, dat E. uit kaneelzuur van verschillende herkomst steeds zoogenaamd synthetisch kaneelzuur heeft kunnen bereiden zou dan in de onzuiverheid van de gebruikte producten gezocht moeten worden. Of deze verontreiniging steeds dezelfde is geweest moge voorloopig buiten beschouwing blijven; het zal echter steeds een stof moeten geweest zijn, die bij de oxydatie een aldehyde levert, waaruit volgens de synthese van PERKIN een gesubstitueerd kaneelzuur zich vormt. Bij die oxydatie met kaliumpermanganaat heeft het benzaldehyde verhoudingsgewijze meer kans tot benzoëzuur geoxydeerd te worden, dan het in sporen voorkomende verontreinigende aldehyde, daar de damp voor dit laatste meestal onverzadigd zal zijn, zoodat het sneller uit de reactievloeistof verwijderd zal worden. In het benzaldehyde zal dus het gehalte van de verontreiniging grooter zijn dan in het kaneelzuur, waarvan werd uitgegaan. Bij de synthese van PERKIN wordt volgens de onderzoekingen van E. zelf het verontreinigend aldehyde vollediger in het gesubstitueerde kaneelzuur veranderd dan het benzaldehyde, daar het verkregen kaneelzuur zoogenaamd synthetisch zuur was en het niet in reactie getreden benzaldehyde mooi kristalliseerend Storaxkaneelzuur gaf. Door deze bewerkingen samen zou de verontreiniging vergroot en haar invloed op den kristalvorm zichtbaar kunnen worden.

Het scheen me daarom noodzakelijk vast te stellen of werkelijk zuiver kaneelzuur op de door E. aangegeven wijze synthetisch kaneelzuur kan leveren met de door hem waargenomen eigenschappen.

Bereiding van zuiver kaneelzuur. Uitgegaan werd van de aetherische olie uit de wortelstokken van Alpinia malaccensis, die volgens het onderzoek van VAN ROMBURGH [4]) voor het grootste gedeelte uit den methylester van kaneelzuur bestaat.

E. deelt mede [5]), dat het kaneelzuur van Alpinia bij de aether-

---

[1]) Ber. **43**, 957 spreekt hij van „25 gr. der als einheitlich anerkannten Storaxzimtsäure".

[2]) RIIBER en GOLDSCHMIDT Ber. **43**, 460; Biochem. Zeitschr. **34**, 406.

[3]) Ber. **43**, 461.

[4]) Deze verslagen 1898, 550.

[5]) Ber. **39**, 1581.

proef tegen den wand van het bekerglas kristallen gaf, die op synthetisch zuur geleken, terwijl op den bodem mooie platen van α-Storaxkaneelzuur zich vormden.

De aetherische olie werd verzeept, de oplossing drie maal met benzine uitgeschud en het zuur neergeslagen, gefiltreerd en uitgewasschen. Bij de oxydatie met kaliumpermanganaat schuimde de massa zeer sterk op, zoodat de distillatie telkens onderbroken moest worden om een overschuimen te voorkomen, ofschoon de kolf ruim genoeg was. Het rendement werd daardoor zeer slecht. Het kaneelzuur werd daarom ter zuivering bij verhitten opgelost in een natriumcarbonaatoplossing, deze na afkoelen drie maal met benzine uitgeschud en het zuur weder afgescheiden. Dit product schuimde bij de oxydatie met kaliumpermanganaat niet op. Het kaneelzuur volgens de synthese van PERKIN bereid zonderde zich bij de aetherproef volgens E.[1] in uitstekend gevormde kristallen van α-kaneelzuur af, die geen merkbaar verschil met het oorspronkelijke zuur te zien gaven.

Hierna werd het kaneelzuur opgelost in zooveel natronloog, dat ongeveer 1 gr. uit 9 gr. welke aanwezig waren, niet geneutraliseerd werd[2]). De oplossing werd daarna goed gekookt en na afkoelen het kaneelzuur door schudden van de oplossing, volledig afgescheiden. In aether opgelost, kristalliseerde het in groote, platte plaatjes, die verschilden van het oorspronkelijke zuur door hun grootte en geringe dikte. Heterokaneelzuur hetgeen volgens E. op deze wijze zou moeten ontstaan, werd niet verkregen; de kristallen kwamen niet eens geheel met z.g. synthetisch kaneelzuur overeen, daar de randen recht en de hoeken goed gevormd waren; zij stonden er echter dicht bij en bezaten ook paarlmoerglans.

De mogelijkheid was niet uitgesloten, dat dit verschil met het natuurlijke zuur aan eene onzuiverheid van het gebruikte kaneelzuur te wijten was. Daarom heb ik nog verschillende zuiveringswijzen toegepast, waarover in het kort iets moge worden medegedeeld.

Zuivering van den methylester door kristallisatie.

Verwerkt werden ruim 5 kilo aetherische olie, waaruit zich bij staan reeds een groot deel van den ester gekristalliseerd afzonderde. Hij werd gezuiverd door hem te smelten en bij de hier heerschende temperatuur (ongeveer 25—30°) langzaam te laten kristalliseeren.

---

1) Biochem. Zeitschr. **34**, 406; in plaats van bekerglazen werden door ERLENMEYER kolfjes gebruikt.

2) Ber. **42**, 519.

Het na 24 uur vloeibaar gebleven gedeelte werd door uitlekken verwijderd. Deze bewerking werd herhaald tot de ester reeds binnen 24 uur geheel vast werd. Hij smolt, de Anschützthermometer in de stof geplaatst, bij 34° (hij bevatte een spoor water).

Uit 28 gr. van dezen ester werden 7.7 gr. benzaldehyde verkregen, die 4.25 gr. kaneelzuur gaven, terwijl ruim 3 gr. benzaldehyde afgezonderd werden, die niet in reactie waren getreden [1]. Men krijgt dus maar 17°/₀ van de gebruikte hoeveelheid kaneelzuur als synthetisch product terug. Het synthetische zuur was uit kokend water omgekristalliseerd om het van geringe bruine onzuiverheden te scheiden. Bij de aetherproef werden goed gevormde kristallen met rechte kanten en scherpe hoeken, van α-kaneelzuur verkregen. Het product vertoonde evenals het vorige, in het geheel niet de eigenschappen, die E. voor het zoogenaamde synthetische kaneelzuur opgeeft.

Vervolgens werden uit den ester 16 gr. synthetisch product volgens E. bereid en werd hieruit door kokend oplossen in een ontoereikende hoeveelheid natronloog ongeveer 1 gr. afgezonderd. Uit aether kristalliseerde dit product in dunne doorschijnende op elkander liggende glinsterende plaatjes (parelmoerglans) waarvan eenige gebogen randen bezaten. Opgelost in benzine kristalliseerden groote, dunne platen met gedeeltelijk gebogen kanten, die bij belichten α-truxillzuur gaven. Door de warme benzine-oplossing plaatselijk te koelen onstonden kleine gebogen naaldjes, die bij belichten β-truxillzuur gaven. De eigenschappen van deze eerste fractie komen overeen met die van het synthetische kaneelzuur volgens E., terwijl het volgens de bereiding Heterokaneelzuur had moeten zijn.

Dat hier z.g. synthetische kaneelzuur verkregen werd, terwijl de oorspronkelijke olie op gelijke wijze een product gaf, dat deze eigenschappen nog niet ten volle vertoonde, moet zeer waarschijnlijk aan de gebruikte hoeveelheden kaneelzuur n.l. 9 en 16 gr., waarvan de eerste fracties genomen werden, geweten worden.

Verder mag er nog op gewezen worden, dat het z.g. synthetische zuur, zooals uit het voorgaande volgt, ook een α- en een β-vorm geeft, hetgeen E. niet vermeldt.

Nog werd er getracht den ester door kristallisatie verder te zuiveren. Hierbij werd een hooikist gebruikt, waarin een groote bak met water zich bevond. Bij het inbrengen van den ester in het water, was zijn temperatuur 36° en na 24 uur 32°. Na een groot aantal kristallisaties was het smeltpunt van den ester 34.°8 — 34.°9 (de ester werd in een reageerbuis met luchtmantel in een bad van 45°

---

[1]) Deze cijfers zijn gemiddelden van 8 bereidingen.

verhit, terwijl een thermometer van $^1/_{20}°$ verdeeling in de stof geplaatst was. De smeltlijn werd geconstrueerd).

Als smeltpunt van dezen ester vindt men opgegeven: 33° [1]) 36° [2]), bij 36° [3]), 34° [4]), terwijl SCHIMMEL en Co. 36° voor den ester uit Wartaraolie vonden en 34—35° bij door hen zelf bereide praeparaten [5]). Uit dezen ester werden 16,5 gr. synthetisch kaneelzuur volgens E. bereid. De eerste fractie uit de oplossing van het natriumzout afgezonderd, ongeveer 1 gr. gaf bij de aetherproef z.g. synthetisch kaneelzuur volgens E.

Zuivering van kaneelzuur door kristallisatie uit water. In ongeveer 16 L. water werden 200 gr. kaneelzuur, uit de aetherische olie van de wortelstokken van Alpinia malaccensis verkregen, bij koken opgelost. Den volgenden dag werd het gekristalliseerde zuur gefiltreerd, weer in 16 L. water opgelost enz.

Nadat deze kristallisatie 10 maal herhaald was, was de hoeveelheid kaneelzuur tot ongeveer 40 gr. geslonken. Van dit product werden nu nog 20 gr. 4 maal uit water omgekristalliseerd en uit het op deze wijze verkregen product synthetisch kaneelzuur op de door E. aangewezen wijze bereid.

De eerste fractie, ongeveer 1 gr., uit 17 gr. synthetisch zuur afgezonderd, gaf uit aether goed gevormde dunne plaatjes van kaneelzuur; zij waren dunner en grooter dan die, welke het oorspronkelijke zuur gaf en lagen iets op elkander. Gebogen randen kwamen niet voor.

Het was dus nog geen z.g. synthetisch kaneelzuur volgens E.

Zuivering van kaneelzuur door kristallisatie uit alcohol 96°/₀.

Hiertoe werden 860 gr. kaneelzuur uit de aetherische olie afgezonderd, opgelost bij verhitten in 1720 cM^3 alcohol en na filtratie door roeren bij het afkoelen tot kristallisatie gebracht. Op deze wijze werd een zeer fijn kristalmeel verkregen, dat gefiltreerd en met alcohol uitgewasschen 241 gr. kaneelzuur gaf. Dit product werd nog eens op dezelfde wijze omgekristalliseerd. Het synthetische zuur hieruit bereid gaf als eerste fractie, ongeveer 1 gr. van 13,5 gr., een product dat duidelijk z.g. synthetisch zuur volgens E. was.

Uit dit onderzoek blijkt dus, dat de Heterokaneelzuren van ERLENMEIJER JR. op de door hem aangegeven wijze uit zuiver kaneelzuur *niet* gevormd worden. Hun ontstaan is aan een onzuiver-

---

[1]) ANSCHÜTZ en KINNICUTT, Ber. **11**, 1220.

[2]) WEGER, Ann. **221**, 74.

[3]) ROMBURGH, l. c.

[4]) ULTÉE, Mededeeling v. h. Alg. Proefstation te Salatiga II, N⁰. 45.

[5]) GILDEMEISTER en HOFFMANN, Die aeth. Oele, 2e Aufl. I, 522.

heid van het door E. gebruikte kaneelzuur te wijten. De Hetero-kaneelzuren zijn dus geen zuivere chemische verbindingen.

Een opmerking over de *reactie van* Beilstein moge hier nog gemaakt worden. E. deelt het volgende mede[1]): „Es mag hier darauf hingewiesen werden, dass selbst die best krystallisierte Storaxzimtsäure, welche bei der Prüfung mit Soda und Salpeter sich chlorfrei erweist, mit der Kupferoxydperle in der Flamme des Bunsen-Brenners erhitzt, dieser eine intensiv grüne Färbung zu verleihen vermag." Door mij werd ook bevonden, dat, op welke wijze het kaneelzuur ook gezuiverd was, het steeds, ofschoon niet sterk, de reactie van Beilstein gaf.

De methylester, zelfs de niet gezuiverde, gaf geen verkleuring van de vlam bij verhitten met koperoxyde te zien.

Nu vormt het kaneelzuur bij verhitten met koperoxyde zeer snel het koperzout en dit, bereid door praecipitatie van een alkalische oplossing van het ammoniumzout met kopersulfaat, gaf de reactie nog duidelijker dan het vrije zuur.

Volgens Erlenmeijer Jr. zou zuiver kopercarbonaat de reactie ook geven. Wellicht dat de reactie van Beilstein voor zuren gevoeliger is dan voor indifferente stoffen, of wel dat zij voor de meeste zuren niet te gebruiken is. Een conclusie is voor het oogenblik niet te trekken, omdat de aanwezigheid, ofschoon in zeer geringe hoeveelheid, van een verontreiniging in het door mij gebruikte kaneelzuur niet is uitgesloten.

Augustus 1918. *Buitenzorg.*

[1]) Ber. **43**, 956 noot.

Natuurkunde. — De Heer H. KAMERLINGH ONNES biedt namens de Heeren G. HOLST en A. N. KOOPMANS een mededeeling aan over: „*De ionisatie van argon*".

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

1. FRANCK en HERTZ[1]) hebben er op gewezen, dat de electriciteitsgeleiding niet in alle gassen op dezelfde wijze plaats vindt. Zij verdeelen de gassen in twee groepen: 1°. zulke, waarbij een electron, dat zich door het gas beweegt, bij een niet-ioniseerenden stoot tegen een gasmolekuul nagenoeg geen energie verliest en 2°. gassen, waarbij de snelheid van het electron bij elken stoot geheel of grootendeels verloren gaat. Tot de eerste groep behooren in het bijzonder de edelgassen. FRANCK en HERTZ hebben zelf een reeks van metingen aan deze gassen verricht en ook een theorie van de electriciteitsgeleiding door deze gassen gegeven. Zij hebben in hoofdzaak helium onderzocht. In het volgende deelen wij de resultaten mede van enkele metingen aan argon.

Hierover bestonden slechts de bepalingen van GILL en PIDDUCK[2]). Bij een vroeger onderzoek over de doorslagspanning van argon was ons[3]) echter gebleken, dat de resultaten van deze laatste onderzoekers vermoedelijk door een geringe verontreiniging van het door hen gebezigde argon, niet geheel in orde waren. Hieraan moet dan ook waarschijnlijk toegeschreven worden, dat bij hun metingen het eigenaardige gedrag van argon niet te voorschijn is gekomen.

2. Wij hebben opnieuw den samenhang tusschen stroom en spanning in argon bepaald. Het toestel, dat wij gebruikten, was op dezelfde wijze geconstrueerd als dat van GILL en PIDDUCK (fig. 1). Het bestond uit een condensator, waarvan de afstand der platen meetbaar veranderd kon worden. In de anode was een reeks gaatjes geboord, waardoor met behulp van een kwartslens ultraviolet licht van een kwiklamp op de zinken kathode kon worden geconcentreerd, om hieruit langs foto-electrischen weg electronen vrij te maken. De

---

[1]) Verh. D. phys. Ges. (15), 34, 929, 1913 en (16), 12, 1914.

[2]) Phil. Mag. (16), 280, 1908 en (23), 837, 1912.

[3]) Versl. Kon. Ak. v. Wet. (26), 1027, 1917.

kathode kon met behulp van een micrometerschroef op en neer bewogen worden. Het geheel was in een glazen buis gesmolten, die een kwarts venstertje bevatte om het ultraviolette licht door te laten.

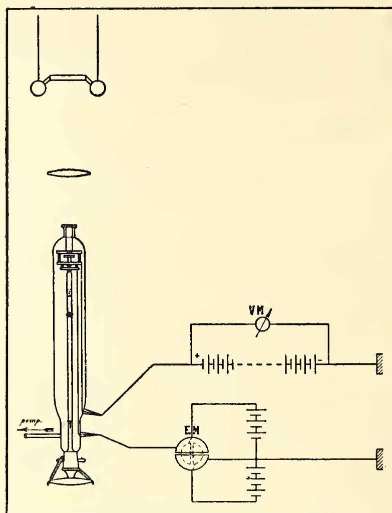


Fig. 1.

De stroomsterkte in den condensator werd bepaald uit den oplading stijd van een binantelectrometer volgens DOLEZALEK. De spanning werd door een batterij kleine accumulatoren geleverd en met een electrometer volgens WULF gecontroleerd. Alle geleidingen, de ontladingsbuis en de electrometer werden, om electrostatische storingen te voorkomen, met bladtin beschermd.

Het argon werd volgens de methode van GEHLHOFF gezuiverd. Gedurende de metingen trad steeds een geringe verontreiniging op, waarschijnlijk door gassen afkomstig uit het eboniet, waarmede de condensator geïsoleerd was. De druk nam in 24 uur ongeveer 0,00080 mm. toe.

De kwartslamp brandde op een accumulatoren batterij. Na eenigen tijd bleek de straling goed constant te worden, hetgeen met behulp van een thermozuil werd nagegaan.

3. Wij hebben metingen verricht over den samenhang tusschen

stroom en spanning bij constanten afstand der condensatorplaten en over het verband tusschen stroomsterkte en plaatsafstand bij constante veldsterkte.

In fig. 2 en 3 vindt men de resultaten van de best geslaagde metingen grafisch voorgesteld. Beide krommen vertoonen eigenaardige plotselinge richtingsveranderingen, die in een versneld aanstijgen der stroomsterkte bestaan en op regelmatige afstanden voorkomen.[1])

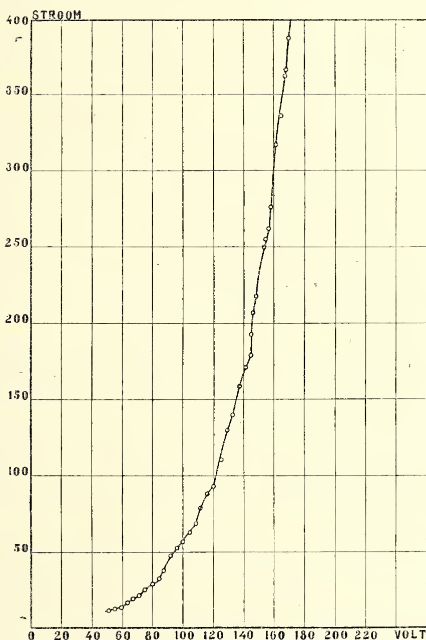


Fig. 2.

Franck en Hertz hebben bij helium een zelfde verschijnsel waargenomen en aangetoond, dat deze richtingsveranderingen telkens dan op moeten treden, wanneer een electron een potentiaal verschil gelijk aan de ionisatie-spanning doorloopen heeft. Uit onze metingen volgt daaruit voor de ionisatiespanning van argon 12,0 Volt, in goede overeenstemming met de door Franck en Hertz op andere wijze

[1]) Wij hebben maximaal 15 trapjes waargenomen.

gevonden waarde. De kromme bij constante veldsterkte vertoont een veel sterker uitgesproken trap karakter, dan die bij constanten plaatafstand en schijnt bijzonder geschikt voor het nauwkeurig bepalen der ionisatiespanning. Deze methode heeft het voordeel, dat ze geheel onafhankelijk is van eventueel voorhanden contactpotentialen en

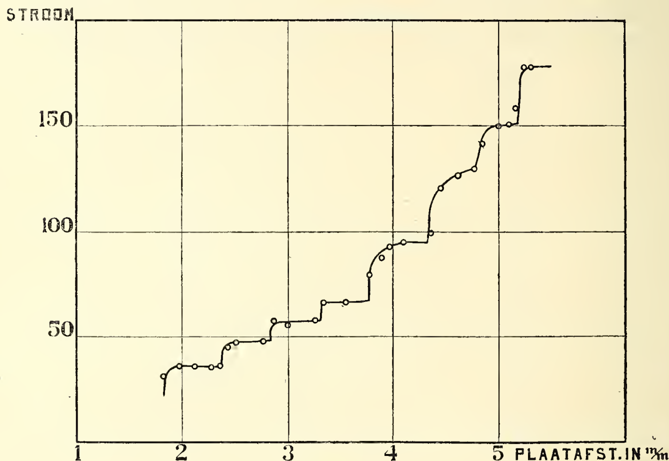


Fig. 3.

bovendien, dat men niet slechts de ionisatiespanning zelf doch ook een reeks geheele veelvouden er van bepaalt, zoodat men gemaklijk een groote nauwkeurigheid der gemiddelde waarde bereikt.

4. Hertz[1]) heeft uit de door hem in samenwerking met Franck verrichte metingen aan helium afgeleid, dat de energie, die een electron bij een niet ioniseerenden stoot tegen een helium atoom, aan dit laatste overdraagt juist zoo groot is, als het geval zou zijn, wanneer de botsing plaats vond tusschen volkomen elastische bollen met de massa van het electron resp. het heliumatoom. Nemen wij nu aan, dat ook bij argon de stoot tusschen een electron en een argon-atoom de wetten der elastische botsing volgt, dan vindt men, dat het electron bij een niet-ioniseerenden stoot een hoeveelheid energie V verliit gelijk aan $V = kE$, waarin E de energie van het electron beteekent en k een constante, gelijk aan het dubbele quotient van de massa van het electron tot die van het argon-atoom:

[1]) Verh. D. phys. Ges. (19) 268 1917 Verg. Benade Phys. Rev. (10) 77 1917.

$$k = 2\frac{m_e}{m_a} = \frac{2}{1844.40} = 0{,}000027.$$

Wij kunnen nu eveneens de energie toename berekenen, die het electron tusschen twee opeenvolgende stooten verkrijgt. Is v de snelheid van het electron, λ de gemiddelde vrije weglengte, dan zal de tijd, die tusschen twee stooten verloopt, gemiddeld $\tau = \frac{\lambda}{v}$ sec. bedragen. Gedurende dezen tijd geeft het electrische veld X een versnelling $X\frac{e}{m}$ aan het electron. Daar nu na elken stoot het electron gemiddeld weer met een snelheid 0 in de richting van het electrische veld begint zal het tusschen twee stooten gemiddeld een weg $x = \frac{1}{2} X \frac{e}{m}\left(\frac{\lambda}{v}\right)^2$ in de richting van het veld afleggen [1]. De energietoename T tusschen 2 stooten zal dus gemiddeld $T = Xe\,\frac{1}{2} X \frac{e}{m}\left(\frac{\lambda}{v}\right)^2$ bedragen.

De toename wordt dus juist het geringst, wanneer de energie zelf $\frac{1}{2} mv^2$ zoo groot mogelijk is. Dan is echter ook het energieverlies V bij de botsing maximaal en dus ook de verhouding $\eta = \frac{V}{T}$.

Nemen wij nu aan, hetgeen wel waarschijnlijk is, dat er ionisatie plaats zal vinden, zoodra een electron voldoende energie verkrijgt, om te kunnen ioniseeren, dan wordt η een maximum voor $\frac{1}{2} mv^2 = e V_i$ waar V_i de ionisatiespanning voorstelt.

$$\eta_{max} = \frac{ke\,V_i}{X^2 e^2 \frac{1}{2} \lambda^2 \frac{1}{mv^2}} = 4k\left(\frac{V_i}{\lambda X}\right)^2.$$

Nu is de vrije weglengte voor een electron in argon $4\sqrt{2}$ maal zoo groot als voor een argon molekuul. Uit de gegevens over de inwendige wrijving kan men gemakkelijk afleiden, dat λ in argon van 17° C. en een gasdruk van p m.m. gelijk is aan: $\lambda = \frac{0{,}028}{p}$ cm.

[1] De gemiddelde snelheid in de richting van het veld wordt dus $v_x = \frac{1}{2} X \frac{e}{m} \frac{\lambda}{v}$, terwijl HERTZ een 2 maal zoo groote waarde vindt. Dit is toe te schrijven aan de door H. gebruikte integratie, waarbij de zelden voorkomende zeer lange wegen een belangrijke rol spelen. In werkelijkheid zal, wanneer het aantal botsingen tusschen 2 ioniseerende stooten niet bijzonder groot is, een tusschenliggende waarde wel de juiste zijn.

De ionisatiespanning voor argon bedraagt 12 Volt. Ingezet in bovenstaande formule vindt men:

$$\eta_{max} = 20 \left(\frac{p}{X}\right)^2.$$

Bij de metingen bij constante veldsterkte was p ongeveer 2 mm. en $X = 250$ Volt/$_{cm}$ en dus $\eta_{max} = \frac{1}{750}$. Maximaal verliest dus een electron bij een botsing tegen een argon-atoom $\frac{1}{750}$ gedeelte van de energie, die het tusschen 2 opeenvolgende botsingen opgenomen heeft. Men mag in dit geval dus het energieverlies geheel verwaarloozen en aannemen, dat de energie van een electron alleen bepaald wordt door den weg, dien het in de richting van het veld heeft afgelegd; d. w. z. alle electronen, die zich op gelijken afstand van de kathode bevinden, zullen dezelfde snelheid bezitten.

Bij metingen bij constanten plaatafstand is dit geenszins het geval. Zoolang het potentiaalverschil tusschen de platen klein is, is ook de veldsterkte klein en daarmede η groot; daar zal men dus steeds met de stootverliezen rekening moeten houden en vooral de eerste trappen der stroomspanningskromme zullen hiervan den invloed ondervinden. Voor het bepalen der ionisatiespanning zijn dan ook metingen bij constante geschikt gekozen veldsterkte, te verkiezen.

Wat de hoogte der trappen betreft, deze moeten zich volgens de opvattingen van Franck en Hertz verhouden als 1 : 2 : 4, enz. Wanneer wij van de afrondingen afzien zou de stroom als funktie van de spanning voorgesteld kunnen worden door een formule van den vorm $i = eN_0 2^n$, waarin N_0 het aantal electronen voorstelt, dat van de kathode uitgaat en n het grootste geheele getal kleiner dan $\frac{V}{V_i}$. (V het potentiaal verschil tusschen de 2 platen).

Bij onze metingen was de verhouding nergens als 2 : 1, maar 1.3 à 1.5 tot 1. Dit moet ongetwijfeld worden toegeschreven aan den invloed van verontreinigingen in het argon. Daardoor is ook de afwijking grooter bij de metingen bij constante veldsterkte, dan bij die bij constanten plaatafstand. In het eerste geval toch neemt met toenemenden plaatafstand ook het aantal vreemde molekulen tusschen de platen toe. Het lijkt dan ook alleszins de moeite waard deze metingen nog eens met zuiverder gas te herhalen. Ten slotte kan men uit de krommen bij constant veld nog afleiden, dat vrijwel elke stoot van een electron, dat 12 Volt doorloopen heeft tot een ionisatie voert. Uit de voorafgaande berekening volgt, dat de weg,

dien een electron met een snelheid overeenkomende met 12 Volt, tusschen 2 stooten in de richting van het veld aflegt, gemiddeld 0.001 c.M. bedraagt. Uit de meting volgt echter, dat alle ionisaties plaats vinden in een laagje van ten hoogste 0.004 c.M., zoodat vrijwel elke stoot, die tot een ionisatie kan leiden, ook inderdaad ionisatie tengevolge heeft.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer G. KRUTKOW: „*Bijdrage tot de theorie der adiabatische invarianten*". [1]) (Voorloopige mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

INLEIDING.

Elke grootheid, die gequanteerd moet worden, of kort gezegd — quantengrootheid — moet, zooals bekend is, aan twee voorwaarden voldoen:

1. zij moet een functie van de integralen der bewegingsvergelijkingen van het beschouwde stelsel zijn; deze voorwaarde is van zelfsprekend, daar immers de quantengrootheid door de beweging van het stelsel niet mag worden veranderd, en werd derhalve nooit expliciet uitgesproken.

2. zij moet een adiabatische invariant zijn, d.w.z. zij mag bij omkeerbaar adiabatische beïnvloeding van het stelsel niet veranderen. Deze eisch werd door EHRENFEST opgesteld en door algemeene statistische overwegingen bewezen. [2]) Wanneer wij aannemen dat de adiabatische inwerking mechanisch mag worden berekend, volgt deze voorwaarde reeds hieruit, dat de quantengrootheid sprongsgewijze varieert, de inwerking echter bv. ook oneindig klein kan zijn; de quantengrootheid mag derhalve in het geheel niet varieeren, zij moet een adiabatische invariant zijn.

Duidt men de quantengrootheid door v aan, de integralen der bewegingsvergelijkingen door $c_1, c_2, \ldots$ en de adiabatische invarianten door $v_1, v_2, \ldots$, dan luiden derhalve de voorwaarden (1) en (2):

$$v = funct\,(c_1, c_2, \ldots) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$v = funct\,(v_1, v_2, \ldots) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Elke quantengrootheid moet nog aan een andere voorwaarde voldoen: zij moet eene van het coördinatenstelsel onafhankelijke beteekenis hebben. Deze voorwaarde lijkt mij den zin van het door PLANCK opgestelde begrip van de cohaerentie der graden van vrijheid [3])

---

[1]) Voordracht gehouden in de Petrograd. Phys. Ges. in Dec. 1917 en April 1918.

[2]) P. EHRENFEST. Ann. d. Phys. 51 (1916) blz. 327, Phys. Zschr. (1914) blz. Acad. Amsterdam 22 (1913) p. 586. Ann. d. Phys. 36 (1911) blz. 98. Verh. d. D. phys. Ges. 15 (1913) blz. 451.

[3]) M. PLANCK. Ann. d. Phys. 50 (1916) blz. 285.

weer te geven. Ik hoop binnenkort op deze derde voorwaarde terug te komen; hier wordt ze buiten beschouwing gelaten en willen wij ons slechts bezighouden met voorwaarde (2).

Deze voorwaarde legt ons de taak op de adiabatische invarianten voor een gegeven mechanisch stelsel te vinden, en doet ons vragen, naar een algemeene methode om het „adiabatische" probleem op te lossen[1]). Een dergelijke methode was tot nu toe niet bekend; naar de adiabatische invarianten moest geraden worden en achteraf moest men hunne adiabatische invariabiliteit toetsen. Langs dezen weg werden de volgende invarianten gevonden:

a. de grootheid V der statistische mechanica, die de door het „energievlak" begrensde phasenuitbreiding meet[2]);

b. de voor een periode van een periodiek stelsel berekende „werking"

$$v = \int_{\tau} 2\, T\, dt \ ^{3});$$

c. de quantenintegralen der voorwaardelijk-periodieke stelsels:

$$v_i = \int_0 p_i\, dq_i = 2 \int_{a_i}^{b_i} p_i\, dq_i \,. \ ^{4})$$

In het volgende wil ik in het kort een algemeene methode schetsen om adiabatische invarianten te vinden en ze op bijzondere gevallen toepassen:

α. Cyklische stelsels. Deze stelsels vallen weliswaar onder het begrip voorwaardelijk-periodieke stelsels; daar echter de verhoudingen hier bijzonder eenvoudig zijn en de natuurlijkheid der methode aanschouwelijk maken, wil ik ze afzonderlijk beschouwen;

β. voorwaardelijk-periodieke stelsels;

γ. ergodische stelsels.

Onder (*β*) zal ik hier slechts het grensgeval beschouwen, waarbij geen meetbare betrekkingen bestaan tusschen de periodiciteitsmoduli. Op de andere gevallen en in het bijzonder op hunne betrekking tot de in het begin opgestelde derde voorwaarde hoop ik nog terug te komen.

---

[1]) Daarop werd nadrukkelijk door EHRENFEST gewezen. Zie b.v. P. EHRENFEST. Phil. Mag. VI Vol. 33. p. 513 (1917).

[2]) P. HERTZ. Ann. d. Phys. 33 (1910) blz. 544.

[3]) L. BOLTZMANN. Prinz. d. Mechanik II blz. 181. P. EHRENFEST Ann. d. Phys. 51 (1916) blz. 327 Anhang.

[4]) J. M. BURGERS. Ann. d. Phys. 52 (1917) blz. 195. De hier genoemde in de Versl. Akad. Amsterdam gepubliceerde verhandelingen stonden mij helaas niet ter beschikking.

De algemeene methode.

§ 1. *Definitie van adiabatische invarianten* [1]). Wij beschouwen een mechanisch stelsel van n graden van vrijheid, welks bewegingsvergelijkingen in den Hamiltonschen vorm geschreven moeten worden:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hierin is H een functie der p_i en q_i. Zij mag de tijd t niet expliciet bevatten. Verder moet zij van uitwendige coördinaten — wij zullen ze de parameters a_x noemen — afhangen. Deze parameters kunnen òf constante waarden behouden, wij hebben dan het isoparametrische probleem, òf variëeren, dit is het rheoparametrische probleem, òf langzaam veriëeren, [2]) dit is het herpoparametrische of adiabatische probleem, waarvoor wij ons hoofdzakelijk interesseeren.

Wij willen vooronderstellen:

I. Geen p_i of q_i groeit aan tot oneindig. De q_i zijn tusschen vaste grenzen opgesloten.

II. Gedurende den tijd, dat elke q_i vele keeren tusschen zijn grenswaarden heen en weer gaat, moeten de a_x een oneindigkleine verandering van de eerste orde ondergaan. Bovendien moet elke $\dot{a}_x$ bij benadering constant zijn. De vergelijkingen (3) moeten gedurende het proces hun geldigheid behouden. Uit deze veronderstellingen volgt, dat wij het herpoparametrische probleem verkrijgen door in het rheoparametrische $\dot{a}_x = const.$ te zetten en dan voor alle grootheden het tijdsgemiddelde te nemen voor de daaraan beantwoordende isoparametrische beweging.

Wij zullen verder slechts *een* a beschouwen. Dat is geen essentieele beperking, de berekeningen worden er echter in hooge mate door vereenvoudigd.

Een adiabatische invariant is een functie v van de integratieconstanten $c_1, c_2, \ldots$ der isoparametrische beweging en van den parameter a, welker totale „adiabatische” afgeleide naar a verdwijnt:

$$\overline{\frac{dv}{da}} = \frac{\partial v}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial c_1}\overline{\frac{dc_1}{da}} + \frac{\partial v}{\partial c_1}\overline{\frac{dc_2}{da}} + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarin de streep het tijdsgemiddelde beteekent.

§ 2. *Het isoparametrische probleem.* Wij zetten in de bewegings-

[1]) Zie P. Ehrenfest l. c. en J. M. Burgers l c.

[2]) Impliciet komt dit reeds hierdoor tot uitdrukking, dat de functie van Hamilton slechts de a_x en niet de aan deze beantwoordende momenten bevat.

vergelijkingen (3) $a = const.$ en integreeren deze volgens de methode van JACOBI. Is

$$H = c_1, H_2 = c_2, \ldots . H_n = c_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

een stelsel van normale integralen der vergelijkingen, waaruit p_i opgelost kunnen worden, dan vorme men de karakteristieke functie

$$V = \int \sum_i F_i \, dq_i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

waarin de $F(q_i, c_i, a)$ de uit de vergelijkingen (5) berekende p_i beteekenen, en stelle

$$\frac{\partial V}{\partial c_1} = t_1 \quad \frac{\partial V}{\partial c_2} = t_2 \quad \ldots . \frac{\partial V}{\partial c_n} = t_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

dan zijn dit de ontbrekende integralen, waarbij

$$t_1 = t + c_1{}^* \quad t_2 = c_2{}^* \quad \ldots . t_n = c_n{}^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

is; hierin zijn de $c_i{}^*$ de nog ontbrekende n integratieconstanten. Hiermede is het isoparametrische probleem opgelost.

§ 3. *De differentiaalvergelijkingen van het rheoparametrische probleem.* Om deze te verkrijgen zullen wij van de veranderlijke grootheden p_i en q_i overgaan tot de veranderlijke grootheden c_i en t_i. Dit is een contacttransformatie. De overgang wordt tot stand gebracht door de karakteristieke functie

$$V(q_i, c_i, a) = \int \sum_i F_i \, dq_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

als transformatiefunctie:

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = p_i \qquad \frac{\partial V}{\partial c_i} = t_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

De differentiaalvergelijkingen (3) behouden hun Hamiltonschen vorm. Blijft a constant dan wordt de nieuwe Hameltonsche functie gelijk aan de getransformeerde oude, d.i. gelijk aan c_1, en wij verkrijgen het triviale resultaat:

$$\dot{c}_1 = 0, \dot{c}_2 = 0, \ldots . \dot{c}_n = 0 \, ; \, \dot{t}_1 = 1, \dot{t}_2 = 0, \ldots . \dot{t}_n = 0$$

Nu laten wij a veranderen, d.w.z. stellen $a = funkt(t)$. De transformatiefunctie V is nu een impliciete functie van t door bemiddeling van q_i, c_i *en* a:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial V}{\partial c_i} \dot{c}_i \right) + \frac{\partial V}{\partial a} \dot{a}$$

De differentiaalvergelijkingen (3) behouden altijd hun vorm, maar de nieuwe Hamiltonsche functie K wordt nu

$$K = c_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial a} \right) \dot{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

waarin de haken beteekenen dat de afgeleide $\partial V/\partial a$ in de veranderlijke grootheden c_i, t_i uitgedrukt moet worden. De differentiaalvergelijkingen van het rheoparametrisch probleem zijn derhalve:

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}_1 &= -\frac{\partial K}{\partial t_1} \quad \dot{c}_2 = -\frac{\partial K}{\partial t_2} \ldots \dot{c}_n = -\frac{\partial K}{\partial t_n} \\ \dot{t}_1 &= \frac{\partial K}{\partial c_1} \quad \dot{t}_2 = \frac{\partial K}{\partial c_2} \ldots \dot{t}_n = \frac{\partial K}{\partial c_n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

§ 4. *Het herpoparametrische of adiabatische probleem.*

Wij stellen om te beginnen $\dot{a} =$ const. Dan worden de vergelijkingen (11), wanneer men daarin de waarde van K uit (10) substitueert:

$$\left.\begin{aligned} \dot{c}_i &= -\dot{a}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \\ \dot{t}_1 &= \dot{a}\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + 1 \qquad \dot{t}_x = \dot{a}\frac{\partial}{\partial c_x}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \quad (x = 2, 3, \ldots n) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (12)$$

of, wanneer wij differentiatie naar den parameter a door een accent aanduiden:

$$c'_i = -\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \qquad t'_1 = \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + \frac{1}{\dot{a}} \qquad t'_x = \frac{\partial}{\partial c_x}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) \quad \ldots \quad (12')$$

Nu behoeven wij slechts links het streepje te plaatsen dat de gemiddelde waarde aangeeft, rechts het tijdsgemiddelde werkelijk te berekenen en verkrijgen dan de gewenschte differentiaalvergelijkingen van het herpoparametrische- of adiabatische probleem. De integratie (waarbij men de middelwaardestreep links weglaat) levert ons de adiabatische invarianten op; inderdaad: zijn de vergelijkingen

$$c'_i = f_i(c_i, t_i, a) \qquad t'_i = g_i(c_i, t_i, a)$$

en is $\varphi(c_2, t_2, a)$ de integraal daarvan, dan moet de totale afgeleide $d\varphi/da$ op grond van de vergelijkingen verdwijnen:

$$\frac{d\varphi}{da}\,\frac{\partial\varphi}{\partial a} + \sum_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c_i}f_i + \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}g_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} + \sum_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c_i}\overline{c'_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}\overline{t'_i}\right) = \overline{\frac{d\varphi}{da}} = 0$$

dit is echter de vergelijking (4), d. i. de vergelijking die de uitdrukking is van de definitie van adiabatische invarianten.

Hiermede hebben wij het in de inleiding gestelde probleem: een algemeene methode aan te geven om adiabatische invarianten te vinden, opgelost. Voor wij tot de meer algemeene toepassingen overgaan zullen wij nog twee zeer speciale, voor de quantenhypothese klassieke, voorbeelden volgens onze methode behandelen.

§ 5 (A). *De lineaire oscillator.* De parameter is de frequentie. Wij hebben:

$$H=\tfrac{1}{2}p^2+\tfrac{1}{2}a^2q^2=c_1 \quad p=F=\sqrt{2c_1-a^2q^2} \quad V=\int dq\,F=\int dq\sqrt{2c_1-a^2q^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial a}=-\int dq\,\frac{aq^2}{F} \qquad \frac{\partial V}{\partial c_1}=\int\frac{dq}{F}=t_1 \quad \dots . \quad (14)$$

$$c'_1=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right).\frac{dq}{dt_1}=aq^2=\frac{1}{a}a^2q^2 \quad \dots \quad (15)$$

Het rechterlid geeft als gemiddelde waarde c_1/a. Wij verkrijgen derhalve de welbekende adiabatische invariant c_1/a.

(B.) *Om een vaste as draaibare lichamen.* Wij duiden het traagheidsmoment (den parameter) door A aan, het moment van hoeveelheid van beweging door p. Dan hebben wij:

$$H=\frac{1}{2A}p^2=c_1 \quad p=F=\sqrt{2Ac_1} \quad V=\int dqF=q\sqrt{2Ac_1} \quad \dots \quad (16)$$

$$\frac{\partial V}{\partial A}=\frac{c_1q}{F} \qquad \frac{\partial V}{\partial c_1}=\frac{Aq}{F}=t_1 \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)=\frac{c_1}{A}t_1 \quad \dots \quad (17)$$

$$c'_1=-\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial V}{\partial A}\right)=-\frac{c_1}{A} \quad \dots \quad (18)$$

waaruit men verkrijgt: $c_1A=\text{const.}$ dus ook $p=T=\sqrt{2Ac_1}=\text{const.}$

Toepassingen.

§ 6. *Het cyclische stelsel.* Cyclisch noemen wij die coördinaten welke in de uitdrukking voor de Hamiltonsche functie niet voorkomen (ignorable co-ordinates volgens de terminologie van Thomson en Tait). Zij zullen door q_x $(x=1, 2, \dots, k)$ de overigen — niet-cyclische coördinaten — door q_λ $(\lambda=k+1,\ k+2, \dots, n)$ aangeduid worden.

Wij hebben dus

$$H=H(q_\lambda, q_x, p_\lambda; a) \qquad \dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial q_x}=0 \qquad p_x=c_x \quad \dots \quad (19)$$

De karakteristieke functie V wordt nu

$$V=\sum_x c_x q_x+W(q_\lambda, c_x, c_\lambda; a) \quad \dots \quad (20)$$

Wij willen nog veronderstellen dat c_n de energieconstante is; dan verkrijgt men:

$$\frac{\partial V}{\partial c_x}=q_x+\frac{\partial W}{\partial c_x}=t_x \qquad \frac{\partial V}{\partial c_\lambda}=\frac{\partial W}{\partial c_\lambda}=t_\lambda \quad \dots \quad (20')$$

waarin alle t, met uitzondering van t_n, constanten zijn en $t_n=t+\text{const.}$

Uit de formules voor t_λ kunnen de q_λ als functie van de c_x, c_λ en t_λ berekend worden. Wij hebben verder:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial W}{\partial a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

waaruit volgt, dat $\frac{\partial V}{\partial a}$ een functie van de c_x, c_λ en t_λ is en onafhankelijk van de t_x, dus:

$$c'_x = -\frac{\partial}{\partial \cdot_x}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0 \qquad c_x = \text{adiab. Invar} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Is $K = n$, d. w. z. zijn alle coördinaten cyclisch, dan hebben wij

$$H = H(p_i) \qquad p_i = c_i \qquad V = \sum_i c_i q_i \qquad (i = 1_1\, 2_1 \ldots n) \quad . \quad (23)$$

Is nu de energieconstante c een functie van de c_ι die door het substitueeren van de c_ι in H verkregen wordt dan hebben wij voor de nieuwe Hamiltonsche functie

$$K = C + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)$$

$\frac{\partial V}{\partial a}$ is echter gelijk aan nul, alle c_ι zijn adiabatische invarianten. Als bij de momenten c_ι behoorende coördinaten moeten de oude coördinaten q_ι — zij zijn alle lineaire functie's van den tijd — genomen worden. Dit kan pleiten voor de natuurlijkheid van onze methode, daar deze immers een natuurlijke generalisatie blijkt te zijn van de in de theorie der cyclische stelsels gebruikte redeneerwijze.

Het eenvoudigste voorbeeld van een cyclisch stelsel — het om een vaste as draaibare lichaam — hebben wij onder 5 behandeld.

7. *Het voorwaardelijk-periodieke stelsel.* Een voorwaardelijk-periodiek stelsel bezit, zooals bekend, behalve de energieintegraal nog n—1 integralen, die van de tweede macht zijn ten opzichte van de momenten. Deze bevatten alle de momenten slechts als tweede machten, niet als producten, dus alleen p_ι^2 en geen $p_\iota\, p_x$. Lost men de p_ι^2 er uit op, dan verkrijgt men:

$$p_i^2 = \psi_i\,(q_i, c_1 \,\ldots c_n) \qquad p_i = \sqrt{\psi_i} \qquad (c_1 \ldots c_n \text{ integratieconst.}) \quad (24)$$

derhalve hangt elk p_ι slechts van de daarbij behoorende coördinaten q_ι af. Ligt de beginwaarde van q_ι tusschen twee enkelvoudige op elkander volgende wortels a_ι en b_ι van de vergelijking $\psi_\iota = 0$, dan heeft de coördinaat libratie-beweging. Het geval, waarin dit voer alle q_ι plaats heeft, zullen wij hier beschouwen.

De karakteristieke functie V is hier

$$V = \sum_i \int dq_i \sqrt{\psi_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (25)$$

dus

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \sum_i \int dq_i \, \partial \sqrt{\psi_i}, \; \frac{\partial V}{\partial c_x} = \sum_i \int dq_i \frac{\partial \sqrt{\psi_i}}{\partial c_x} = \mathfrak{t}_x \quad . \quad . \qquad (26,\ 27)$$

De eerste groep der rheoparametrische differentiaalvergelijkingen heeft den volgenden vorm:

$$\dot{c}_x = -\frac{\partial}{\partial \mathfrak{t}_x}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\dot{a}\right)$$

of wanneer wij $a = const$ stellen en voor $(\partial V/\partial a)$ de waarde uit (26) substitueeren:

$$c'_x = -\frac{\partial}{\partial \mathfrak{t}_x}\left(\sum_i \int dq_i \frac{\partial \sqrt{\psi_i}}{\partial a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (28)$$

Nu volgt uit (27), dat de tusschen haken staande integraal van $\mathfrak{t}_x$ alleen door middel van de q_ι afhangt (van c_x expliciet en door bemiddeling van de q_ι):

$$c'_x = -\left(\sum_i \frac{\partial \sqrt{\psi_i}}{\partial a} \frac{\partial q_i}{\partial \mathfrak{t}_x}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (28')$$

Nu moeten wij links de streep zetten die de gemiddelde waarde aanduidt, en rechts het tijdsgemiddelde werkelijk berekenen. Daarvoor hebben wij de volgende stellingen noodig: de baankromme vult het geheele gebied $a_\iota \leq q_\iota \leq b_\iota$ $(\iota = 1, 2 \ldots . n)$ overal dicht. [1]) Het tijdsgemiddelde van een willekeurige functie f van de bewegingsphase van het stelsel genomen over een onbegrensd aangroeiende tijdsduur τ, laat zich vervangen door het „ruimtegemiddelde" der functie voor dit gebied. [2]) In de veranderlijke grootheden c_ι, $\mathfrak{t}_\iota$ moeten wij om het „ruimtegemiddelde" te berekenen de functie f over een „periodencel" integreeren en door het „volume" der cel

$$\Omega = |\omega_{ix}| \qquad \left(\omega_{ix} = \int dq_i \frac{\partial \sqrt{\psi_i}}{\partial c_x} = 2\int_{a_i}^{b_i} dq_i \frac{\partial \sqrt{\psi_i}}{\partial c_x}\right) \quad . \quad . \qquad (29)$$

deelen:

$$\bar{f} = lim \frac{1}{\tau} \int_\tau dt\, f = \frac{1}{\Omega} \int \underset{\Omega}{\ldots} \int d\mathfrak{t}_1 \ldots d\mathfrak{t}_n f \quad . \quad . \quad . \qquad (30)$$

Duiden wij door $\Omega_{\iota x}$ de bij de $\omega_{\iota x}$ behoorende onderdeterminanten

1) P. Stäckel. Math. Ann. 54 (1901) blz. 86. Bij het bewijs wordt ondersteld dat tusschen de ω_{ix} (zie formule 29) geen meetbare betrekkingen bestaan.

2) Zie J. M. Burgers l. c. blz. 200.

aan, dan laat zich de gemiddelde waarde van het rechter lid van (28′) na eenige omwerking zoo schrijven:

$$-\frac{1}{\Omega}\sum_i \Omega_{ix}\, 2\int_{a_i}^{b_i}\frac{\partial\sqrt{\psi_i}}{\partial a}\,dq_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

of wanneer wij stellen

$$v_i = 2\int_{a_i}^{b_i} dq_i\,\sqrt{\psi_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

en opmerken dat de integrant voor de grenzen van de integraal verdwijnt, ook aldus:

$$-\frac{1}{\Omega}\sum_i \Omega_{ix}\frac{\partial v_i}{\partial a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31')$$

Bijgevolg hebben wij verkregen:

$$\overline{c'_x} + \frac{1}{\Omega}\sum_i \Omega_{ix}\frac{\partial v_i}{\partial a} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Wij lossen nu dit stelsel vergelijkingen naar de afgeleiden $\partial V_i/\partial a$ op:

$$\frac{\partial v_i}{\partial a} + \sum_x \omega_{ix}\,\overline{c'_x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

In plaats van ω_{ix} kan men schrijven:

$$\omega_{ix} = \frac{\partial}{\partial c_x}\, 2\int_{a_i}^{b_i} dq_i\,\sqrt{\psi_i} = \frac{\partial v_i}{\partial c_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Derhalve voor (34):

$$\frac{\partial v_i}{\partial a} + \sum_x \frac{\partial v_i}{\partial c_x}\overline{c'_x} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

De v_i zijn functies van a en van de c_x; het linkerlid van (36) is dus de totale „adiabatische" afgeleide $\frac{dv_i}{da}$: dus de v_i zijn adiabatische invarianten.

Wij hebben deze verkregen door de eerste groep van onze rheoparametrische vergelijkingen — de vergelijkingen voor c'_x — aan de reeks bewerkingen die door onze methode werd voorgeschreven te onderwerpen. Nu zullen wij aantoonen, dat wij daarmede genoegen kunnen nemen en ons om de tweede groep van vergelijkingen — de vergelijkingen voor t'_x — in 't geheel niet behoeven te bekommeren, verondersteld, dat wij de onder 2) in de inleiding genoemde voorwaarde willen vinden, waaraan elke quantengrootheid van het voor-

waardelijk-periodieke stelsel moet voldoen. De onder 1) genoemde voorwaarde kunnen wij in het kort zoo formuleeren, dat elke quantengrootheid v langs de „baankromme" van ons stelsel een constante waarde moet behouden; zij is een functie van die integralen van het isoparametrische stelsel, die den tijd t niet expliciet bevatten, d. i. van $c_1, \ldots c_n$, $t_2, \ldots t_n$. Het tijdsgemiddelde van v is dus gelijk aan v. Verder mogen wij dit tijdsgemiddelde door het „ruimtegemiddelde" voor de cel Ω vervangen; dit is een functie der c_x alleen, dus is v een functie der c_x en onafhankelijk van $t_2, \ldots, t_n$. Nu hebben wij n adiabatische invarianten gevonden — functies van c_x en a; de niet berekende invarianten bevatten alle de t_x, wij hebben deze voor ons doel niet noodig. De voorwaarden 1) en 2) voor een voorwaardelijk-periodiek stelsel zonder meetbare betrekkingen tusschen de w_{ix} luiden derhalve:

$$\left.\begin{aligned} v &= funct\,(c_1, \ldots c_n\,;\,a) \\ v &= funct\,(v_1, \ldots v_n) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

waarin de v_x door de formule (32) zijn gegeven. De quantentheorie kiest, zooals bekend, als quantengrootheden de v_x zelf [1]).

§ 8. *Het ergodische stelsel.* Tot nu toe hebben wij ondersteld, dat het isoparametrische probleem werkelijk opgelost is. Wij zullen nu slechts vooronderstellen, dat de energieintegraal

$$H\,(p_i, q_i, a) = c_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

gegeven is en er de ergodenhypothese aan toevoegen: n.l. dat het stelsel gaat door elk punt van het „energievlak" $H = c_2$ [2]). Het tijdsgemiddelde F van een phasenfunctie f is dan

$$\left.\bar{f} = \frac{\int \ldots \int dp_2 \ldots dp_n\, dp_1 \ldots dq_n \,\dfrac{1}{\dot{q}_1} f}{\int \ldots \int dp_2 \ldots dp_2\, dq_1 \ldots dq_n \,\dfrac{1}{\dot{q}_1}}, {}^{3)}\right\} \quad \ldots \quad (39)$$

de integralen genomen over het energievlak $H = c_t$.

Bij wijze van natuurlijke verbijzondering van onze algemeene methode nemen wij als transformatiefunctie V de grootheid

$$V = \int F dq_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

1) K. SCHWARZSCHILD. Sitzungsber. Berlin 1916. blz. 550. P. EPSTEIN. Ann. d. Phys. 50 (1916) blz. 489; 51 (1916) blz. 168. A. SOMMERFELD. Ann. d. Phys. 51 (1916) p. 1.

2) Zie P. en T. EHRENFEST. Enc. d. math. Wiss. IV 32. § 10.

3) L. BOLTZMANN. Gastheorie II blz. 88. e. v.

waarin F de door oplossing van $H = c_1$ verkregen uitdrukking voor p_1 beteekent:

$$p_1 = F(p_2 \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, c_1; a) \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

Voert men deze uitdrukking weer in $H = c_1$ in, dan verkrijgt men een identiteit. Differentieert men deze naar $c_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$, dan krijgt men:

$$\left.\frac{\partial H}{\partial F} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial c_1}}, \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial q_i}}{\frac{\partial F}{\partial c_1}}, \frac{\partial H}{\partial p_x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p_x}}{\frac{\partial F}{\partial c_1}}\right\} \quad \ldots \quad (42)$$

waaruit men gemakkelijk voor de Hamiltonsche vergelijkingen vindt:

$$\frac{\partial p_x}{\partial p_1} = \frac{\partial F}{\partial q_x} \qquad \frac{\partial q_x}{\partial q_1} = -\frac{\partial F}{\partial p_x} \qquad \frac{dt}{dq_1} = \frac{\partial F}{\partial c_1} \quad \ldots \quad (42')$$

Wij vormen nu de afgeleiden van de transformatiefunctie V naar alle veranderlijken, die ze bevat:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = F \quad \frac{\partial V}{\partial q_x} = \int \frac{\partial F}{\partial q_x} dq_1 = p_x \quad \frac{\partial V}{\partial p_x} = \int \frac{\partial F}{\partial p_x} dq_1 = q_x \quad \frac{\partial V}{\partial c_1} = \int \frac{\partial F}{\partial c_1} dq_1 = \mathfrak{t}_1 \quad (43)$$

Wij kunnen dus beweren, dat V den overgang vormt van de veranderlijken $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ naar de veranderlijken $p_2, \ldots, p_n, q_2, \ldots, q_n, c_1, t_1$. Van de rheoparametrische differentiaalvergelijkingen hebben wij hier slechts de vergelijking voor c'_1 noodig. Zij luidt:

$$c'_1 = -\frac{\partial}{\partial \mathfrak{t}_1}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = -\frac{\partial}{\partial \mathfrak{t}_1}\left(\int \frac{\partial F}{\partial a} dq_1\right) \quad \ldots \quad (44)$$

De tusschen haken staande integraal hangt van t slechts door bemiddeling van q_1 af:

$$c'_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial a}\dot{q}_1\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44')$$

Nu vormen wij volgens formule (39) de middelwaarde:

$$\left.\overline{c'_1} = \frac{-\int \ldots \int dp_2 \ldots dp_n\, dp_1 \ldots dp_n \frac{\partial F}{\partial a}}{\int \ldots \int dp_2 \ldots dp_n\, dq_1 \ldots dq_n \frac{\partial F}{\partial c_1}}\right\} \quad \ldots \quad (45)$$

waarin wij in den noemer $1/\dot{q}_1$ volgens de laatste der vergelijkingen (42′) door $\frac{\partial F}{\partial c_1}$ vervangen hebben. Het is gemakkelijk in te zien, dat teller en noemer de partieele afgeleiden naar a, resp. naar c_1 van een functie V zijn, waarbij

$$V = \int \ldots \int dp_1 \ldots dp_n\, dq_1 \ldots dq_n, \quad \ldots \ldots \quad (46)$$

de integratie strekt zich uit over het gebied, dat door het „energievlak" $H = c_1$ wordt omsloten. Wij hebben dus:

$$\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial c_1} \overline{c'_1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

V is een adiabatische invariant. Men kan ook gemakkelijk aantoonen, dat deze grootheid een beteekenis heeft, die onafhankelijk is van het gebruikte coördinatenstelsel; zij voldoet dus ook aan de in de inleiding onder (3) genoemde voorwaarde. Dit is ook het geval met de op blz. 909 met v aangeduide grootheid.

Men moet onderzoeken onder welke voorwaarden de door (32) gedefinieerde grootheden v_1 aan dezen eisch voldoen. Men mag zeer zeker verwachten, dat dit onderzoek ons zal leeren, de op verschillende wijzen ontaarde stelsels te quanteeren. Men kan ook voorzien, dat deze kwestie waarschijnlijk in den geest van PLANCK[1]) en SCHWARSCHILD[2]) zal worden beslist. Zoo mogen b.v. bij den tol waarop geen krachten werken van de navolgende drie adiabatische invarianten: moment van hoeveelheid van beweging, de projectie daarvan op de assen der figuur en die op de ζ-assen van een willekeurig georienteerd vast coördinatenstelsel (allen vermenigvuldigd met 2π), slechts de twee eerste gequanteerd worden. Derhalve wordt het elementairgebied niet h^3, maar $h^3(2n_1+1)$, waarin n het bij het moment van hoeveelheid van beweging behoorende quantengetal is. Op grond hiervan kan men bezwaar maken tegen de door EPSTEIN gegeven berekening van de soortelijke warmte van waterstof.[3]) Op al deze vraagstukken — vraagstukken betreffende de aanpassing der quantenhypothese aan verschillende gevallen — hoop ik weldra terug te komen.

De hier ontwikkelde methode is daarvan onafhankelijk, zij is de oplossing van een zuiver-mechanisch probleem. Het lijkt wenschelijk, haar toe te passen op stelsels, die niet door separatie der variabelen in de partieele differentiaalvergelijking van HAMILTON—JACOBI geïntegreerd kunnen worden, b.v. op de POINSOT-beweging. Ook daarover hoop ik binnenkort iets te kunnen mededeelen.

Petrograd, September 1918. *Physisch Laboratorium der Universiteit.*

---

[1]) M. PLANCK. l. c.

[2]) K. SCHWARZSCHILD. Sitzungsber. Berlin 1916, blz. 550.

[3]) P. S. EPSTEIN. Ber. d. D. Phys. Ges. 1916 blz. 398. Zie vooral formule 10) blz. 401. Tegen de op blz. 407 voorgestelde quanteering kunnen ook bezwaren worden ingebracht, daar de quantengrootheden geen adiabatische invarianten zijn.

Anatomie. — De Heer BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer ERIK AGDUHR: „*Is the post-embryonal growth of the nervous system due only to an increase in size or also to an increase in number of the neurones?*"

Deze mededeeling zal in het volgende zittingverslag worden opgenomen.

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Heer J. BOEKE, namens den Heer H. C. DELSMAN, aangeboden het manuscript van diens verhandeling: *The Ancestry of Vertebrates as a means of understanding the principal features of their structure and development*".

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van eene Commissie van beoordeeling, bestaande uit de Heeren J. BOEKE, J. W. VAN WIJHE en J. F. VAN BEMMELEN met verzoek in een volgende vergadering rapport uit te brengen. Genoemde heeren nemen de opdracht aan.

De vergadering wordt gesloten.

---

28 April 1919.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 25 JANUARI 1919.

DEEL XXVII.

N°. 7.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is een bericht van den Heer JAN DE VRIES, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

Verder zijn voor deze vergadering geen stukken ingekomen.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN doet eene mededeeling over: *„De refractometrische onderzoekingen van* EYKMAN, *naar aanleiding der aanbieding van de uitgave zijner werken".*

Hoewel EYKMAN omstreeks 25 jaar van zijn leven besteed heeft aan refractometrische onderzoekingen van organische verbindingen, daarbij een materiaal heeft verzameld van geweldigen omvang en tot zeer belangrijke conclusies uit dit materiaal is gekomen, is zijn werk op dit interessante terrein toch vrij wel onbekend gebleven. Dit is hoofdzakelijk te wijten aan de wijze, waarop hij het heeft gepubliceerd.

Aanvankelijk daartoe de Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft kiezende, heeft hij daarna een aantal verhandelingen in het Recueil geschreven; maar verreweg het grootste deel van zijne verhandelingen zijn uitsluitend in het Chemisch Weekblad verschenen.

De onderzoekingen zijner leerlingen waren tot nu toe enkel in dissertaties neergelegd.

Het was dus voor buitenlandsche chemici, die slechts bij uitzondering onze taal machtig zijn, feitelijk ondoenlijk om van EYKMAN's onderzoekingen kennis te nemen.

Daarbij bleek mij, toen zijne nagelaten papieren door zijn broeder, ons medelid CHR. EYKMAN, in mijne handen werden gesteld, dat deze nog een omvangrijk feitenmateriaal bevatten, dat nog in het geheel niet gepubliceerd was.

Ten einde zijne denkbeelden en experimenteele resultaten meer algemeen toegankelijk te maken, was het noodzakelijk zijne refractometrische onderzoekingen in hun geheel samen te vatten. Door de finantieele hulp van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen, die hierin getrouw aan hare hooge traditiën is gebleven, is deze uitgave mogelijk geworden.

Men vindt in het thans verschenen werk: Recherches réfractométriques de feu J. F. EYKMAN, in de eerste plaats een levensbericht en een overzicht van zijne onderzoekingen op dit gebied. Dan volgen de verhandelingen uit de Berichte, die o. a. zijne onderzoekingen bevatten over de verplaatsing der dubbele bindingen in de zijketens van aromatische verbindingen naar de benzolkern toe. Deze verplaatsing heeft eene aanzienlijke verhooging der moleculaire refractie en dispersie ten gevolge.

In zijne verhandelingen in het Recueil beschrijft hij den door hem geconstrueerden refractometer met constante deviatie van 40°, die wordt verkregen door draaiing van het prisma om eene verticale as. Dit apparaat heeft verder eene inrichting, waardoor metingen van de refractie tot op eene temperatuur van ca 150° met gemak kunnen geschieden, waardoor het boven alle andere refractometers voor organisch-chemische onderzoekingen de voorkeur verdient. Ook zijne pyknometers zijn hier beschreven.

In deze verhandelingen wordt verder bewezen, dat voor de meest uiteenloopende homologe reeksen de refractometrische waarde der groep CH_2 constant is, als men slechts de eerste drie termen dier reeksen buiten beschouwing laat, voor welke die waarde hetzij grooter, hetzij kleiner is.

Ook bevatten zij de afleiding van Eykman's formule voor de moleculaire refractie. Vroeger werd daarvoor meestal de formule van Gladstone & Dale gebruikt: $\frac{n-1}{d}. P = const.$, waarin n den brekingsindex d het spec. gew. der vloeibare stof en P het moleculairgewicht voorstelt. Nadat door Lorentz langs theoretischen weg de formule $\frac{n^2-1}{n^2+2}.\frac{P}{d}$ was afgeleid, kwam deze bijna uitsluitend in gebruik. De formules van Gladstone & Dale en van Lorentz vertoonen echter bij groote temperatuurtrajecten (van 100° b.v.) geene constante waarde; maar die van eerstgenoemden dalen, terwijl de theoretische formule stijgende waarden geeft.

Onder opmerking dat G. & D's formule zich ook laat schrijven: $\frac{n^2-1}{n+1}.\frac{P}{d}$ en het verschil van beide formules dus enkel den noemer betreft, zocht Eykman langs empirischen weg eene formule die ook voor groote temperatuurtrajecten constante waarden behoudt en vond deze in de uitdrukking $\frac{n^2-1}{n+0.4}.\frac{P}{d}$. Hierdoor was het dus mogelijk om metingen, die bij zeer uiteenloopende temperaturen zijn gedaan, direct met elkander te vergelijken.

De verhandelingen in het Chemisch Weekblad gaan over twee, voor de organische refractometrie zeer belangrijke vraagstukken nl. over de cyclische verbindingen en over onverzadigde stoffen. Wat de eerste betreft, komt hij tot het resultaat, dat het aantal C-atomen in de gesloten keten op de refractie een aanzienlijken invloed heeft, die zich ook uitstrekt over de refractometrische waarde die CH_2-groepen in de zijketens hebben.

Met betrekking tot de onverzadigde verbindingen bewijst hij aan

een buitengewoon omvangrijk materiaal, dat van een constant increment voor de dubbele binding, hetgeen Brühl invoerde, geen sprake kan zijn, want dat de dubbele binding op de refractie, en voornamelijk op de dispersie der onverzadigde verbindingen een zeer uiteenloopenden invloed kan oefenen.

Onder de nagelaten papieren bevonden zich de refractometrische bepalingen van ruim 350 verbindingen, die nog niet waren gepubliceerd, waaronder nagenoeg komplete serien van homologen. Dat Eykman deze niet zelf heeft gepubliceerd, schrijf ik voornamelijk toe aan het feit, dat hij er hoe langer hoe moeielijker toe kwam, om zijne resultaten persklaar te maken. Wellicht wilde hij ook wachten, totdat eenige serien nog vollediger waren geworden, of om enkele metingen nog voor hunne publicatie te herhalen. Door deze onderstellingen kan het eenigszins vermetel schijnen, om thans resultaten openbaar te maken, die de meester zelve nog terug hield. Behalve echter het reeds daar even genoemde feit, is er nog eene andere omstandigheid, die de publicatie rechtvaardigt. Het is de vergelijking der metingen aan dezelfde stoffen, die verscheiden jaren na elkander door hem zijn verricht. Er blijkt dan in nagenoeg alle gevallen een bijna volkomen overeenstemming in de cijfers te bestaan. Inderdaad geeft zijn geheele werk den indruk, van met de grootste zorg, ook wat de zuiverheid der verbindingen betreft, te zijn uitgevoerd.

Het is zeer te betreuren, dat het nagelaten materiaal nagenoeg uitsluitend uit tabellen bestond, zonder eenige samenvatting. Ik heb getracht, hieraan te gemoet te komen, door aan iedere serie metingen van homologen een overzicht toe te voegen, mij overigens wel bewust zijnde van de moeielijkheid dezer taak, die zeker door den meester zelve op veel betere wijze zoude zijn vervuld. Ik heb er naar gestreefd, om in die overzichten de resultaten zooveel mogelijk te interpreteeren in den geest, die uit Eykman's werken spreekt, en menigmaal van geheel andere opvattingen getuigt, dan de meeste chemici huldigen, die op dit terrein werkten, in de hoop, naar het oordeel van degenen, die in deze soort onderzoekingen meer competent zijn, het juiste te hebben getroffen.

De nagelaten metingen omvatten verbindingen uit de volgende homologe reeksen: verzadigde koolwaterstoffen, alcoholen $C_nH_{2n+1}OH$, alkylhaloiden, aliphatische en cyclische aminen, zuren $C_nH_{2n}O_2$ en hunne esters, verzadigde aldehyden en ketonen, onverzadigde koolwaterstoffen, onverzadigde zuren, meerwaardige alcoholen, meerbasische zuren, hydroxyzuren, aldehyd- en ketonzuren, derivaten van koolzuur, cyclische verbindingen, aromatische koolwaterstoffen, phenolen, aromatische aminen en aromatische zuren.

Dit nagelaten materiaal bevestigt eenerzijds voor een groot deel de conclusies, waartoe Eykman reeds met behulp van het door hem gepubliceerde was gekomen, maar toetst deze aan een tot nu toe ongekend aantal verbindingen; anderzijds zijn eenige nieuwe gezichtspunten voor den dag gekomen. Onder deze zijn de invloed van de vertakking der koolstofketens, de verdere differentieering der atoomrefractie van de zuurstof, de invloed der stereo-isomerie, alsmede het nadere onderzoek van de dispersie der organische verbindingen te noemen.

Dit geheele nagelaten werk toont met groote evidentie aan, dat er geen questie van constante atoomrefracties kan zijn, zelfs niet voor de koolstof. Hoewel de variaties in de atoomrefractie van dit element dikwijls vrij onbeteekenend zijn, vormt het toch geen uitzondering op den algemeenen regel, dat de atoomrefracties *niet* constant zijn.

Eykman's werk beoogt niets minder dan eene geheele herziening van de refractometrie der organische verbindingen; alle fundamenteele vragen op dit gebied heeft hij op meesterlijke wijze behandeld, dank zij zijn genialen aanleg en zijne verbazingwekkende werkkracht, die gelukkig onder het neerdrukkende gevoel van niet erkende verdienste ongerept is gebleven.

Amsterdam, Januari 1919.

Anatomie. — De Heer J. Boeke biedt, mede namens de Heer J. G. Dusser de Barenne, een mededeeling aan over: „*De sympathische innervatie van de dwarsgestreepte spieren bij de gewervelde dieren*".

Eenige jaren geleden werd door een van ons, mede o.a. in deze verslagen en de verhandelingen dezer Akademie [1]), mededeeling gedaan van waarnemingen, welke aantoonden, dat bij de dwarsgestreepte spieren van reptielen, vogels en zoogdieren naast de gewone motorische eindplaten nog andere uiterst fijne en dunne, ijl gebouwde eindorganen op de spiervezelen voorkomen, die zich in Bielschowsky-praeparaten voordoen als uiterst kleine neurofibrillaire eindringen of eindnetjes aan het einde van dunne merglooze zenuwen. Deze eindigingen liggen op de spiervezelen ingebed in het sarcoplasma der spiervezelen, en bevinden zich nu eens in dezelfde sarcoplasma-ophooping, waarin ook de gewone motorische zenuweindorganen liggen, dan weer liggen zij afzonderlijk op de spiervezelen in een kleine hoeveelheid sarcoplasma met eenige kernen, doch voor zoover men dit kan nagaan, altijd hypolemmaal. De merglooze zenuwen zelve, aan de eindvertakkingen van welke deze eindorgaantjes bevestigd zijn, loopen in bundels tusschen de spiervezelen door, blijven steeds mergloos, en schijnen een afzonderlijk systeem van zenuwen te vormen afgescheiden van de gevoels- en bewegingszenuwen. Het lag voor de hand, gezien het mergloos karakter dezer zenuwen, te veronderstellen, dat deze zoogenaamde „accessorische innervatie" (Boeke, 1909) van sympathischen aard zijn zou, en zoo werd dan ook de veronderstelling geuit, dat de dwarsgestreepte spieren (de bovengenoemde eindorganen konden bij tongspieren, oogspieren, irisspier, rugspieren, pectoralis, intercostaalspieren worden aangetoond, terwijl later door Aoyagi dergelijke eindorganen ook in het diaphragma werden gevonden), behalve aan den invloed van de spinale zenuwen ook aan dien van het sympathische zenuwstelsel waren onderworpen, waarbij óf aan een tonische óf aan een trophische werking ware te denken. Dit laatste is echter een physiologische vraag, en de beantwoording daarvan ligt buiten het bestek van deze mededeeling.

---

[1]) J. Boeke, Studiën zur Nervenregeneration I en II. Verhandelingen K. A. W. Tweede serie, Deel 18 en 19.

De sympathische aard dezer accessorische vezels kon daarna worden aangetoond, door bij de oogspierzenuwen (trochlearis, oculomotorius) de zenuwen vlak bij den hersenstam te doorsnijden, zoodat de motorische (en sensibele) vezels degenereerden. De accessorische merglooze vezels en hunne eindigingen op de spiervezels bleven dan echter onveranderd (BOEKE 1911, 1916), hetgeen slechts kon worden verklaard door aan te nemen, dat zij door den sympathischen tak, die langs de arteria ophthalmica uit den plexus caroticus de orbita bereikt, naar de oogspierzenuwen waren overgebracht, zoodat zij bij de doorsnijding van den zenuwstam vlak bij de intreedingsplaats uit de hersenen niet werden doorgesneden.

Experimenten, waarbij een reeks van spinale zenuwwortels bij de kat werden doorsneden, in samenwerking met Prof. MAGNUS verricht, gaven evenwel bij het onderzoek van de verlamde intercostaalspiervezelen geen duidelijk resultaat, wat wel kan samenhangen met het feit, dat de sympathische zenuwelementen zich over het algemeen bijzonder moeilijk laten kleuren of impraegneeren. Een negatief kleuringsresultaat is derhalve nooit bewijzend voor het niet aanwezig zijn van de te kleuren zenuwelementen. Later zijn dergelijke experimenten wederom ter hand genomen, en Dr. AGDUHR, wiens mededeeling hierover aan onze mededeeling zich aansluit, verkreeg bij de spiervezelen der extremiteitspieren dezelfde positieve en bewijzende resultaten als die, welke wij in deze mededeeling voor de intercostaalspieren zullen beschrijven.

De proef, waarvan wij thans de uitkomsten willen mededeelen, werd door een van ons (D. de B.) op de volgende wijze genomen:

Bij een kat werden steriel intraduraal weggenomen 4 op elkaar volgende spinaalganglien aan de rechterzijde, met gelijktijdige doorsnijding van de bijbehoorende achter- en voorwortels (15 Februari). De wond genas per primam, het dier bleef gezond. Een maand na de operatie (15 Maart) werd het dier door chloroform gedood, en de bloedvaten van uit de aorta door middel van de vloeistof van RINGER-LOCKE schoongespoeld. Daarna werd de borstkas met neutrale formoloplossing (12 °/₀) doorgespoeld en in dezelfde vloeistof gefixeerd (met 60 °/₀ alcohol). Bij de autopsie bleken te zijn doorgesneden de voor- en achterwortels van thoracalis VI, VII, VIII en IX, met de daarbij behoorende spinaalganglien. De meest betrouwbare resultaten waren dus te verkrijgen bij het microscopisch onderzoek van de intercostaalspieren van de zevende intercostaalruimte. Daaruit werden dan ook verschillende spierstukken uitgesneden en volgens de methode van BIELSCHOWSKY werden nu hierin de zenuwen gekleurd, en op doorsneden onderzocht.

De kleuring van de zenuwvezelen gelukte goed, en de resultaten van het onderzoek der microscopische doorsneden waren de volgende: de ascylinders en mergscheden der motorische en sensibele zenuwen waren volkomen gedegenereerd en verdwenen. Slechts de neurilemscheden van SCHWANN waren in den eigenaardigen vorm van de protoplasmatische banden van BÜNGNER, zoo karakteristiek voor gedegenereerde zenuwen, in de preparaten te zien. Van de motorische eindplaten was geen spoor meer te vinden, slechts de grofkorrelige sarcoplasma-ophoopingen met hunne talrijke kernen wezen nog de plaats van de vroegere zoolplaten aan. Het motorische en sensibele zenuwstelsel was dus volkomen gedegenereerd. Geen enkele zenuw was meer te vinden. Doch wel waren in de doorsneden tusschen de spiervezelen zeer fijne bundels, dikwijls uit slechts enkele zenuwdraden bestaande, van uiterst dunne merglooze neurofibrillendraden te zien (figg. 1 en 2) en als men deze fijne zenuwdraden vervolgde onder het miskroskoop tot daar waar zij ophielden, bleken zij daar ter plaatse door uiterst kleine, maar duidelijke eindorganen, eindringen of kleine eindnetjes met de spiervezelen in verbinding te staan. Ook in het verloop van deze zenuwdraden werden dikwijls kleine zijtakjes afgegeven die met de spiervezel, waarover de zenuwvezel heenliep, door een klein eindringetje in verbinding traden. Een blik op fig. 2 geeft dit duidelijker aan dan een lange beschrijving. Dat ook meer samengesteld gebouwde, doch altijd even ijl en klein blijvende, eindvertakkingen op de spiervezelen bij deze zenuwdraden voorkomen, blijkt uit de eerste figuur van de bij deze mededeeling gevoegde plaat. Hier blijkt ook deze eindvertakking in een ophooping van korrelig sarcoplasma te liggen, waarin eenige kernen verspreid liggen. Dit wijst op een hypolemmale ligging dezer eindvertakkingen.

Kortom, de vorm dezer eindorgaantjes en de structuur van het neurofibrillaire weefsel, zijn volkomen gelijk aan die, welke de eindorganen en eindvertakkingen van de merglooze zenuwvezels vertoonden, die na doorsnijding van den stam der oogspierzenuwen op de spiervezelen der oogspieren behouden bleken te zijn gebleven (BOEKE 1911, 1916), het zijn dus zenuweindigingen en zenuwdraden, die tot het zoogenaamde accessorische innervatieapparaat van de dwarsgestreepte spieren behooren.

Deze hier beschreven en in de beide afbeeldingen op de bijgevoegde plaat afgebeelde zenuwen kunnen nu niet anders dan van *sympathischen aard* zijn. Merglooze zenuwvezelen degenereeren over het algemeen langzamer dan de merghoudende zenuwen en hunne eindorganen. Terwijl 3—4 dagen na de zenuwdoorsnijding doorgaans

J. BOEKE en J. G. DUSSER DE BARENNE: „De sympathische innervatie van de dwarsgestreepte spieren bij de gewervelde dieren".

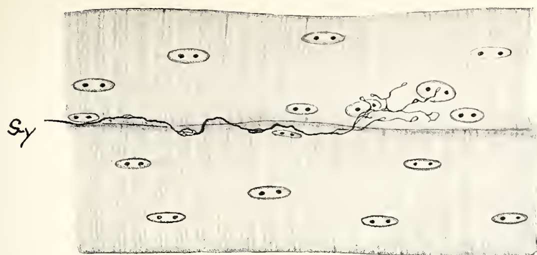


Fig. 1.

Fig. 2.

VERKLARING DER AFBEELDINGEN.

Fig. 1 en 2. Spiervezelen van de musculus intercostalis van de zevende intercostaalruimte rechts, met merglooze zenuwdraden en eindigingen, behouden gebleven na doorsnijding van de zenuwwortels en exstirpatie van de spinaalganglien van de VI^{de}, VII^{de}, VIII^{ste} en IX^{de} intercostaalzenuw bij de kat. Vergr. 1800 *sy* = sympathische zenuwvezels.

alle motorische eindplaten op de spiervezelen verdwenen zijn, kan men soms nog 2 weken na de operatie hier en daar schijnbaar intact gebleven merglooze zenuwvezelen in de preparaten vinden. Wacht men evenwel, zooals bij het hier beschreven experiment werd gedaan, een maand na de operatie, voordat men het dier doodt en de spieren onderzoekt, dan is men volkomen zeker, dat *alle* doorgesneden merglooze zenuwen ook werkelijk gedegenereerd en verdwenen zijn. Vindt men na verloop van dien termijn dan nog in de preparaten intacte, zuiver omlijnde en scherp electief kleurbare zenuwdraden, eindvertakkingen en neurofibrillaire eindringen, dan kan men met zekerheid zeggen, dat die zenuwvezelen bij de operatie niet werden doorgesneden. Uit de beschrijving van het experiment zelf blijkt, dat dit slechts zenuwvezelen kunnen zijn, die eerst nadat het ganglion spinale is gepasseerd, in de zenuw zijn binnengedrongen en waarvan het trophische centrum, de ganglie-cel, buiten het ruggemerg en buiten het ganglion spinale ligt, sympathische zenuwenvezelen derhalve, waarvan de zenuwcel ligt in de ganglien van de sympathische grensstreng.

Hierdoor is dus de op grond der vroegere waarnemingen uitgesproken veronderstelling (Boeke 1911, 1916) gebleken juist te zijn. *Bewezen is hiermede, althans voor de rompspieren, niet alleen dat deze accessorische vezels en eindplaatjes tot het sympathisch zenuwstelsel behooren, maar bovendien dat zij centrifugale sympathische systemen zijn.*

Uit de zich aan deze mededeeling aansluitende mededeeling van Dr. Agduhr zal blijken, dat hetzelfde het geval is voor de spieren der extremiteiten.

Leiden,
Utrecht, *Anatomisch Kabinet.*

Anatomie. — De Heer BOEKE biedt een mededeeling aan van den Heer ERIK AGDUHR: *„Are the cross-striated muscle fibres of the extremities also innervated sympathetically?"*

(Mede aangeboden door den Heer SLUITER).

In the Anatomischer Anzeiger, Bd. 44 BOEKE[1]) gives an account of how he has shown morphologically that the cross-striated muscle fibres in the m. obliquus oculi superior of the cat are innervated not only by cerebral but also by sympathetic nerves. He describes how he made a section of the n. trochlearis near the basis of the brain and let the animal live till the nerve fibres, that had been cut off, peripherically of the place where the sections were made, had undergone degeneration that could be proved morphologically. He also found in BIELSCHOWSKY-impregnated sections from the m. obliquus oculi of the animal that the medullated nerves had undergone degeneration. By the side of these degenerated cerebral nerves BOEKE found, however, intact nerves free from medullary sheaths, which ended in terminal loops in or on the muscle fibres.

BOEKE was able to show that the terminal loops had a hypo-lemmal position and on account of this he is of the opinion, that the intact nerves are of an efferent nature. The position on the muscle fibres of the terminal loops of these nerves was partly inside and partly outside the region of a motor plate. In this way BOEKE had of course put forward evidence of the innervation of the cross-striated muscle fibres by sympathetic nerves as well.

This morphological evidence of BOEKE has caused me to investigate the occurrence of such nerves in the musculature of the extremities. It is well known, that the inner orbital muscles are exceedingly well supplied with nerves, and the possibility that only these and no other cross-striated muscles are innervated sympathetically is of course quite a reasonable one, even though it is not obvious. During my investigations on the plurisegmental innervation of the separate cross-striated muscle fibres I had in addition observed in the muscles of the extremity a number of terminal organs of nerves, which I could not interprete with certainty. I had also noticed a

[1]) BOEKE, J. Die doppelte (motorische und sympathische) efferente Innervation der quergestreiften Muskelfasern. Anat. Anz., Bd. 44, 1913.

number of nerve endings, that reminded me of those described by BOEKE as "accessory". This state of affairs compelled me, before continuing the segmental investigations mentioned above, to attempt to answer the question: "Are the cross-striated muscle fibres of the extremities also innervated sympathetically?", and in addition, in case the question could be answered positively, to study in somewhat more detail the terminal organs of these nerves in the extremity-musculature.

There were really two ways in which I could set about answering this question, I could either bring all the spinal nerves in the extremities into degeneration, taking care that all the sympathetic nerves to the extremities remained intact, or else I could bring the sympathetic nerves into degeneration while the spinal ones were left intact. I chose both methods, so that I might possibly arrive at results that agreed with each other and that were therefore so much more certain.

In order to bring into degeneration the sympathetic nerves of the extremity the ganglion stellatum of one side was exstirpated in two cats. The cats were kept alive for a few days (four and six respectively) after the operation. In sections of *B*-impregnated extremity-muscles from the animal in which degeneration had proceded farthest I was successful in showing the remains of degenerated nerves that were without medullary sheaths. I shall give a more detailed account of this part of the investigation in a more complete description. I shall enter here into rather more detail about the other part, i.e. the bringing into degeneration of the spinal nervès, taking care that the sympathetic ones remained intact.

I cut off the last four cervical and the first two thoracal nerves in the foramina intervertebralia of several cats. The sections were made between the ganglion spinale and the place where the ramus communicans albus goes off. The wounds were sutured and began to heal per primam intent. The animals were killed after different periods of time varying from five to ten days after the operation. The animal from which were taken the preparations, on which the following description is based, was killed five days after the operation. On account of the operations that had been carried out it could thus be assumed that after a sufficient length of time degeneration would occur — peripherically of the place of the section — in the spinal nerve fibres of the segmental nerves that had been cut off and also in their pre-ganglionar sympathetic nerves. On the other hand there was reason to expect that the post-ganglionar sympathetic nerves were kept intact. The shortest of the periods of degeneration

taken should be sufficient to show degeneration (peripherically of the place where the cut was made) in *Ag* — impregnated preparations of the nerve fibres that had been cut off. Tello[1]) gives further details about the time of the appearance of degeneration that can be shown morphologically in the nerves peripherically of the place of the section.

The plexus brachialis of the cat is generally formed by the ventral branches of the first thoracic nerve (I have sometimes, however, observed a fine branch from the second thoracic nerve) and the last three cervical nerves. As is shown above, one segmental nerve cranially and one caudally of those that generally form the plexus had thus been caused to degenerate. This was done to ensure complete certainty that, even if some branch might possibly come from these contiguous nerves to the anterior extremities, all the spinal nerves there would have undergone degeneration. After the animal had been killed, the results of the operation were carefully verified, and they were found to be good. The animal in question had no branch from the second thoracal nerve to the plexus brachialis. After the blood had been removed by injecting physiological solution of common salt from the heart, the anterior extremity on the side where the animal had undergone the operation was fixed by injecting a twenty per cent solution of formaldehyd from the a. axillaris. The extremity was kept for some time in formalin. The mm. interossei were impregnated according to my modifications[2]) of Bielschowsky's method of silver impregnation.

It was clear from sections of the impregnated muscles that all the myelinized nerves, both the motor ones and the sensory ones, had undergone degeneration. On the other hand I found quite a number of intact non-medullated nerves. These intact nerves were found in the preparations partly together with bundles of degenerated spinal nerves and partly along vessels. I was able to follow a large number of the intact non-medullated nerves out to their terminal organs. These terminal organs were situated partly on ordinary cross-striated muscle fibres and partly on muscle fibres in muscle-spindles. I shall give a more detailed account of the sympathetic terminal organs in muscle spindles in a later and more complete

---

[1]) Tello, F. Dégénération et régénération des plaques motrices après la section des nervs. Travaux du laborat. de rech. biolog. publ. par S. R. Cajal, Tome V, 1907.

[2]) Erik Agdur: Ueber Stückfärbung mit Bielschowskys Silberimprägnationsmethode. — Einige Modifikationen. Zeitschr. f. wiss. Mikrosk. u. f. mikrosk. Techn., Bd. 34, 1917.

description. The accompanying figures give an idea of the appearance of the sympathetic nerves and their terminal organs on the ordinary cross-striated muscle fibres.

Figures 1, 2, 3 and 4 are drawn from preparations of the mm. interossei mentioned above. (I have drawn the figures with the help of the following optical aids — ABBE's drawing apparatus and LEITZ immers. $^1/_{12}$ *a* ocul. 4 for figs. 1, 2 and 3, REICHERT's drawiug apparatus and ZEISS apochr. homog. immers. 2 mm. apert. 1.3 comp. ocul. 6 for fig. 4). On account of the operations, that the animal had been subjected to, and on account of the length of the period of degeneration there is reason to assume that the intact nerves which are found in the preparations and which are reproduced in these figures are of a sympathetic and post-ganglionar nature — this is more especially the case, as I also obtained similar results in the animal that had undergone the corresponding operation but in which the period of degeneration had been ten days.

The preparation on which fig. 1 is based shows at *d*) a degenerated spinal nerve that ends in a similar degenerated motor plate on

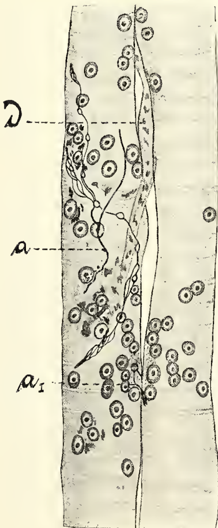


Fig. 1.

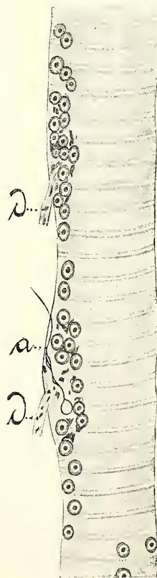


Fig. 2.

the left muscle fibre. At a_1 we have an intact sympathetic nerve that ends with a loop in a degenerated motor plate. At a the preparation has an intact sympathetic nerve that passes away along the left muscle fibre forming loops and varicosities. This nerve fibre has no terminal loops in this preparation, but at one place half way between a and d a part of the extension of the nerve fibre is connected with a periterminal network and seems on this account to be situated hypolemmally.

The preparation that forms the basis of fig. 2 shows, among other things, a muscle fibre with two degenerated motor terminal plates. These terminal plates are clearly situated on the same muscle fibre and are at such a distance from each other as one generally sees in plurisegmental spinal innervation of separate cross-striated muscle fibres. An intact sympathetic nerve (a) with a simple loop formation terminates within the region of the motor plate (d). There are thus instances of sympathetic nerve fibres in the musculature of the extremity as well, that terminate within the region of a motor plate.

Figure 3 is drawn from a preparation that shows one degenerated

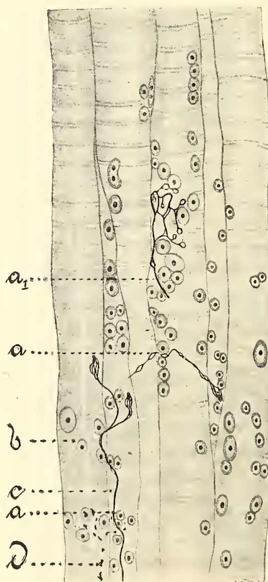


Fig. 3.


Fig. 4.

spinal nerve (*d*) low down to the left. The others are intact sympathetic nerves, that pass away with the formation of loops and varicosities along the muscle fibres (a and a_I) or over and across these (a). I could not show any terminal loops or other connections with the interior of the muscle fibres in this preparation in the case of the nerve fibres a. The nerve fibres a_I, on the other hand, end in a terminal plate with rather abundant ramification. In this, as is shown by the figure, the different nerve fibres come to an end with almost circular terminal loops. At a couple of places in this plate there appeared a connection between the coarser neurofibril net and a peri-terminal network, which of course is in favour of a hypo-lemmal position for the sympathetic plate. This sympathetic terminal plate (a_I) is rather remarkable. Its great extension and its abundant neuro-fibrillar ramifications might easily lead one to suppose that we are concerned here with an ordinary motor terminal plate. That this is, however, not the case is shown, first, by the slender *non-medullated* nerve-fibre, a_I, which can be followed in several preparations (as the preparation belongs to a continuous series) and secondly by the fact that the nerve is intact after the operation mentioned above and after a long period of degeneration.

The preparation from which figure 4 is drawn shows, among other things, a muscle fibre with a degenerated motor terminal plate and a short distance (less than the length of the plate in question) from it another terminal plate of a nerve. This last terminal plate must consequently be of a sympathetic character to the preceding one. It is certain that the two terminal plates are situated on the same muscle fibre. We see here the interesting fact that two terminal plates of nerves, *a motor one* and a *sympathetic one*, the former degenerated and the latter intact, and the sympathetic terminal plate having also a great extension on the muscle fibre, are situated on the same muscle fibre and are at a distance from each other such as one finds between the motor terminal plates in a spinal pluri-segmental innervation of the separate muscle fibres [1]). In my opinion, however, it is as a rule easy to distinguish, even in preparations where all the nerves are intact, between motor and sympathetic terminal plates of nerves and thus to decide, when several terminal plates of nerves occur on the same muscle fibre,

---

[1]) ERIK AGDUR: Morphologischer Beweis der doppelten (plurisegmentalen) motorischen Innervation der einzelnen quergestreiften Muskelfasern bei den Säugetieren. Anat. Anz. Bd. 49. 1916.

ERIK AGDUR: Ueber die plurisegmentellen Innervation der einzelnen quergestreiften Muskelfasern. Anat. Anz. Bd. 50, 1919.

whether there is a motor double innervation or a double innervation by means of a motor and a sympathetic terminal plate. This point will be discussed at greater length in a future and more detailed account.

Summary.

All the spinal nerves, whose ventral ramifications form the plexus brachialis, have in some cats been cut off between the spinal ganglion and the place where the ramus communicans albus goes off. When from five to ten days had elapsed after the operation, the animals were killed. In sections of Ag.-impregnated mm. interossei from the anterior extremity on the side operated on I found that all the nerve fibres that had medullary sheaths were degenerated, but that there were fairly numerous intact nerve fibres without medullary sheaths. On account of the operations the animals had undergone and the existing period of degeneration in the spinal nerves that had been cut off I have reason to believe that these intact non medullated nerves are of a sympathetic and post-ganglionar nature. We are thus faced by the exceedingly interesting fact that the cross-striated muscle fibres, even in the muscles of the extremity, are innervated by n. sympathicus — corresponding to what Boeke showed morphologically to be the case for the inner orbital muscles (m. obliquus oculi superior). These sympathetic nerves in the extremity musculature terminate in comparatively simple loop — formations partly (among other places) on ordinary cross-striated muscle fibres and partly on muscle fibres in the muscle spindles. I have reason to believe that the great majority of these sympathetic terminal plates — both on ordinary muscle fibres as well as on those in the muscle spinalles — are situated hypo-lemmally — just as Boeke described them in, among other places, m. obliquus oculi sup. of the cat. I have also, however, preparations which indicate that there are also epilemmally situated sympathetic terminal plates in the extremity-musculature. A number of the sympathetic terminal plates on ordinary cross-striated muscle fibres are situated within the region of extension of the motor plates, but the majority lie outside it. Among the sympathetic terminal plates that are situated outside the region of the motor plates I have examples of some that have a rather large extension on the muscle fibres and that on account of this, approach the motor terminal plates.

Anatomie. — De Heer BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer J. G. DUSSER DE BARENNE: „*Nogmaals de innervatie en de tonus der dwarsgestreepte spieren.*" [1])

(Mede aangeboden door den Heer BOLK).

Ten vervolge op een vorige mededeeling,[2]) waarheen ik ter inleiding meen te mogen verwijzen, wil ik hier in het kort nog eens op dit vraagstuk terugkomen.

In de eerste plaats om nog enkele proefondervindelijke gegevens in dezen mede te deelen, vervolgens om mijn kritiek op een mededeeling van G. MANSFELD en A. LUKÁCS[3]) te herroepen, nu ik tot de overtuiging gekomen ben, dat deze niet steekhoudend is.

In genoemde mededeeling is aangetoond dat de zienswijze van S. DE BOER, als zou de tonus der dwarsgestreepte spieren door het sympathisch zenuwstelsel beheerscht worden, onjuist is. Dat verder noch de lijkverstijving, noch, zooals reeds eerder mij[4]) gebleken was en sindsdien door VAN RIJNBERK[5]) bevestigd is, de ontherseningsstijfheid vormen van spierverkorting zijn, die door het sympathisch zenuwstelsel beheerscht worden.

Slechts een geringe, maar desniettemin duidelijke hypotonie der achterpootspieren, was bij de éénzijdig van hun buiksympathicus ontdane warmbloeders en kikkers als gevolg van dezen ingreep waar te nemen.

Waar dit verschijnsel bij mijne katten eerst in de loop van 5 tot

[1]) De hier medegedeelde proeven werden, ten deele door den heer H. J. HAVIK, med. stud. te Leiden, nog verricht gedurende mijn verblijf te Delft in den winter van 1917/1918.

[2]) Ueber die Innervation und den Tonus der quergestreiften Muskeln. Pflüger's Archiv, band **166**, 1916, p. 145.

[3]) Untersuchungen über den chemischen Muskeltonus. I. Pflüger's Archiv, band **161**, 1915, p. 467.

[4]) Ueber die Enthirnungsstarre (Decerebrate rigidity Sherrington's) in ihrer Beziehung zur efferenten Innervation der quergestreiften Muskulatur. Folia Neurobiologica, band 7, 1913, p. 651.

[5]) Recherches sur le tonus musculaire et son innervation, II. tonus musculaire et rigidité de décérébration. Archives Néérlandaises de physiologie de l'homme et des animaux, tome I, 1917/1918, p. 726.

8 weken verdween, meende ik het niet als een shock-verschijnsel te kunnen opvatten en waar geen der andere m.i. mogelijke verklaringen afdoende was[1]), heb ik dit proefondervindelijk gegeven voorloopig onverklaard moeten laten en meende daarom de aanname, dat de sympathicus misschien toch ten deele een invloed op den tonus der dwarsgestreepte spieren zou hebben, niet absoluut te mogen afwijzen.

Sindsdien nu is een tweetal mededeelingen van E. TH. VON BRÜCKE[2]) verschenen, waaruit blijkt, dat deze eveneens in de acute proefneming een soortgelijke initieele hypotonie als in mijne proeven aanwezig, heeft kunnen waarnemen, maar slechts gedurende enkele dagen, waarna deze hypotonie weer verdwenen was.

Indien het mocht blijken dat dit resultaat in de overgroote meerderheid der gevallen juist is, dan zou het zoo lange bestaan dier initieele hypotonie in mijne proeven zoo goed als zeker van andere factoren, die dan echter met den tonus als zoodanig niets te maken zouden hebben, afhankelijk gesteld moeten worden en daarmede het laatste steunpunt voor de zienswijze van DE BOER zijn vervallen.

Want niet alleen is reeds gebleken dat zoowel de rigor mortis als de ontherseningsstijfheid van het sympathisch zenuwstelsel onafhankelijk zijn, maar bovendien is mij gebleken, dat nog een ander verschijnsel, door DE BOER als door den sympathicus beheerscht aangegeven, daarmede niets te maken heeft.

De „neus van FUNKE" herhaaldelijk in de spierschokcurve optredende, zou na wegname van den sympathicus verdwenen zijn. Ik heb na dezen ingreep die neus in de spiercurve van den kikker herhaaldelijk zeer duidelijk aangetroffen, zoowel bij electrische als bij mechanische prikkeling van het ruggemerg, niet alleen in het acute experiment, maar ook in de chronische proefneming, waar door de sympathicus exstirpatie, die 2 maanden voor de eigenlijke proef had plaats gevonden, de postganglionaire sympathische systemen gedegenereerd waren. Dit positieve gegeven is tegenover het negatieve van DE BOER natuurlijk bewijzend.

Hieronder volgen drie ten dezen bewijzende curven.

Toen ik naar aanleiding van VAN RIJNBERK's tabellarisch overzicht[3])

[1]) Zie daarvoor l.c. (Pflüger's Archiv.), p. 166 en 167.

[2]) J. NEGRIN Y. LOPEZ en E. TH. VON BRÜCKE. Zur Frage nach der Bedeutung des Sympathicus für den Tonus der Skelettmuskulatur. Pflüger's Archiv, band **166**. 1916, p. 55.

E. TH. VON BRÜCKE. Neuere Anschauungen über den Muskeltonus. Deutsche medizinische Wochenschrift, 1918, N⁰. 5 en 6.

[3]) VAN RIJNBERK. Spiertonus en ontherseningsstijfheid. Nederl. Tijdschr. voor Geneeskunde, 1917, I, p. 1634.

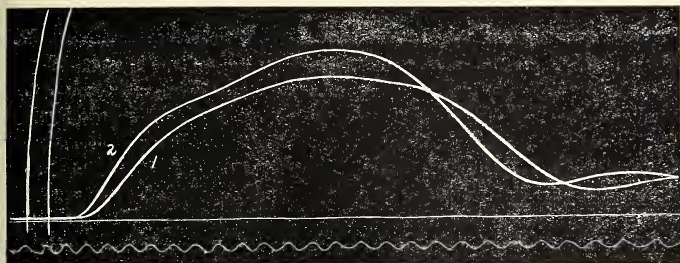


Fig. 1. Proef B_1.

Kikvorsch. Acuut experiment. *Rechter* grensstreng (onder aethernarcose) weggenomen van N. V. tot en met N. XI. Curven $^1/_2$ uur na operatie opgeschreven. Electrische prikkeling van de dwarse doorsnede van het caudale ruggemergsdeel met openingsinductieslag. In primaire keten $3^1/_2$ volt. In secundaire keten behalve de weerstand van de ruggemergssubstantie een weerstand van 60.000 ohm. rolafstand 50.5 mm. klein inductorium. Tijdcurve = $^1/_{50}''$. Belasting der spieren circa 12 gram. Curve 1 van *linker* gastrocnemius. Curve 2 door de *rechter* gastrocnemius geschreven.

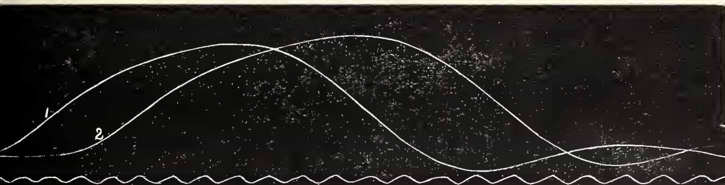


Fig. 2. Proef C 28.

Kikvorsch. Acute proef. *Rechter* grensstreng geëxstirpeerd (onder aethernarcose) van N. IV tot en met N. XI. Curven 45 minuten na operatie geschreven. Temp. kamer $11^3/_4$ ° C. Mechanische prikkeling van het ruggemerg verscheidene segmenten boven uittredingsplaats der wortels voor de Nn. ischiadici door speldeprik. Tijdcurve = $^1/_{50}''$. Belasting der spieren circa 12 gram. Curve 1 is van *rechter* poot, curve 2 van *linker* poot.

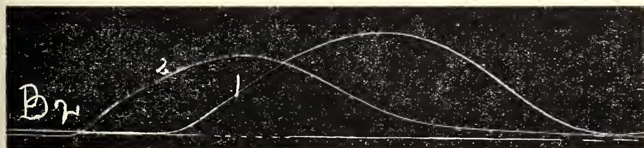


Fig. 3. Proef B 2.

Kikvorsch. Acute proef. *Rechter* grensstreng onder aethernarcose geëxstirpeerd van N. IV tot en met N. XI. Curven 32 minuten na operatie opgeteekend. Mechanische prikkeling van het ruggemerg ver boven uittredingssplaats der wortels der beenzenuwen. Belasting der spieren circa 12 gr. Curve 1 is van de *linker* gastrocnemius, curve 2 van de *rechter* kuitspier.

dit gegeven mededeelde [1]), voerde deze [2]) daartegen aan, dat het feit dat de „neus van FUNKE" na wegname van den sympathicus nog optreedt, geenzins, bewijst, dat de prikkels die dit verschijnsel teweegbrengen, indien de sympathische banen nog wel aanwezig zijn, toch niet alsnog langs deze verloopen.

Op zichzelf is tegen deze argumentatie weinig in te brengen, maar op den keper beschouwd, is zij toch eenigermate sophistisch.

Ik ben van meening, dat, wanneer in een proef een verschijnsel, ondanks de daarop gerichte ingrepen, omstandigheden of voorwaarden toch nog optreedt, men, tot nader order, het recht heeft de gevolgtrekking te maken, dat het betreffende verschijnsel van de bedoelde proefvoorwaarden en ingrepen niet afhankelijk is.

Hoe weinig ernstig VAN RIJNBERK zelf trouwens het met zijn tegenwerping meent, blijkt wel het beste daaruit, dat hij anders zijn heele stuk over het verband tusschen sympathische innervatie en ontherseningsstijfheid wel ongeschreven had gelaten en verder, dat hij in dezelfde tabel, een paar regels hooger, evenzeer er tegen zondigt.

Anders immers had hij ook bij de sympathische genese van den tweeden veratrinetop minstens een ? moeten plaatsen. Deze toch is ook na wegname van den sympathicus nog behouden. VAN RIJNBERK concludeert daaruit echter niet, zooals men na zijne bovenstaande redeneering zou mogen verwachten, dat daarom toch wel de tweede veratrinetop onder normale innervatieverhoudingen langs den sympathicus tot stand zou kunnen komen, maar dat de sympathicus met dien tweeden top niets uitstaande heeft.

Een redeneering en een proefondervindelijk gegeven geheel in overeenstemming met mijn zienswijze en ervaring. Want het is gebleken dat èn in het acute experiment èn in het chronische met gedegenereerde sympathische systemen, de tweede veratrinetop nog optreedt bij het verwekken van een spierschok door prikkeling, hetzij electrisch hetzij mechanisch; van het ruggemerg.

Waar hij ook optreedt bij gedegenereerde eindplaatjes is daarmede tegelijkertijd de nog altijd als mogelijk te kenschetsen genese van dien top vervallen, waarop ik reeds vroeger zinspeelde [3]), maar die ik toenmaals reeds als onwaarschijnlijk beschouwde. Men zou zich

---

[1]) Spiertonus en ontherseningsstijfheid. Nederl. Tijdschrift voor Geneeskunde, 1917, I, p. 1756.

[2]) Antwoord van VAN RIJNBERK op de geciteerde opmerking, Nederl. Tijdschrift voor Geneeskunde, 1917, I, p. 1757.

[3]) D. DE B. Ueber die Enthirnungsstarre u.s.w. Folia Neurbiologica, band 7, 1913, p. 653 en 654.

namelijk in de acute proef nog altijd kunnen voorstellen, dat door den spierschok, die de eerste top geeft, de in de acute proef niet gedegenereerde sympathische eindplaatjes in de spier zelf geprikkeld worden en zoo den tweeden top door secundaire prikkeling aan de peripherie veroorzaken.

Wanneer wij alle tot dusver bekend gemaakte gegevens over het tonus-vraagstuk in verband met de dubbele innervatie der dwarsgestreepte spieren in aanmerking nemen, iets wat door VAN RIJNBERK nagelaten is, dan komen wij tot een geheel ander overzicht dan VAN RIJNBERK in zijn tabel ons heeft gegeven.

Ik laat hieronder eerst volgen de tabel van VAN RIJNBERK, om daarna een soortgelijke te geven, die naar mijne meening de juiste gegevens in dezen verstrekt. Verschillende der merkwaardige, ten eenenmale raadselachtige tegenstellingen uit VAN RIJNBERK's overzicht zijn hierin verdwenen.

Tabel van VAN RIJNBERK op p. 740, Archives Néerland. l.c.

	Chimisme, augmentation de créatine.	Innervation.		Type du tonus.	
		Sympatique.	Muscolo-motrice.	Plastique.	Contractile.
té de décérébration	+	cert. pas	+	cert. pas	+
té cadavérique	+	+		+	
de Brondgeest	+	+		+	+
de raidissement	+	?	+		+
nmet de vératrine.	+	cert. pas	+	cert. pas	+
act, chaleur.—Ca Cl_2 . . .	+	pas examiné.			
du froid	+				
e Funke	pas examiné.	+		+	

Tabel zooals die m.i. er uit moet zien.

	Chimisme, augmentation de créatine.	Innervation.	
		Sympatique.	Musculo-motrice.
Rigidité de décérébration	+	—	+
Rigidité cadavérique	+	—	+
Tonus de Brondgeest (tonus méchanique)	+	—(?)	+
Tonus de raidissement (tonus volontaire)	+	pas examiné.	+
Nez de Funke	pas examiné.	—	+

De overige gegevens in de hier ook weergegeven kolommen van de tabel van VAN RIJNBERK aanwezig, heb ik weggelaten, omdat de daarin aangeduide vormen van spierverkorting misschien, ten deele zelfs waarschijnlijk, tot stand komen door

werking op de spiersubstantie zelf, een musculaire genese hebben, waarbij het zenuwstelsel ten dezen geen rol speelt. De kolommen over het tonustype heb ik weggelaten, omdat deze indeeling naar LANGELAAN niet in overeenstemming is met allerlei physiologische gegevens (Zie daarvoor de kritiek in mijn tonusmededeeling in PFLUGER's Archiv, l.c. p. 163–165). Het (?) in de 2e kolom van mijn tabel heb ik er gezet met het oog op de kwestie der initieele hypotonie in het acute experiment (DUSSER DE BARENNE—VON BRÜCKE).

Ofschoon gebleken is dat geen der door DE BOER gedane aangiften in dit vraagstuk juist is, heb ik toch nog gepoogd in eenige andere proeven eenige aanwijzing over het eventueele verband tusschen mechanische spiertonus en sympathische innervatie te verkrijgen.

De gedachtengang die daaraan ten grondslag lag, was de volgende: Gesteld dat toch nog het sympathische zenuwstelsel iets met den mechanischen spiertonus, met den „inwendigen steun" der spieren te maken heeft, dan mogen wij toch verwachten dat daarvan iets zal blijken in vermoeieniscurven of in curven der tetanusgenese.

Ook het resultaat van deze proeven was echter een geheel negatief, d. w. z. noch in het acute experiment, noch in het chronische met gedegenereerde sympathische eindplaatjes, was eenig essentieel verschil in de vermoeieniscurven tusschen de 2 gastrocnemii, waarvan de eene van zijn sympathische innervatie beroofd was, op te merken. In de acute proeven werden de twee grootste voorwortels van de Nn. ischiadici op de electroden gelegd, om de zenuwen centraal van den grensstreng te prikkelen (anders zouden de postganglionaire neuronen nog geprikkeld worden), in de chronische werden de Nn. ischiadici in de lichaamsholte geprikkeld.

Geringe verschillen tusschen de 2 vermoeieniscurven waren nu en dan wel waar te nemen, maar deze wezen niet in alle gevallen in dezelfde richting. Nu eens bleef de „Verkürzungsrückstand" bij de van hun sympathische innervatie ontdane spieren ten opzichte van de normale gastrocnemius achter, dan weer was juist het tegenovergestelde waar te nemen. Bovendien lieten ook vergelijkingscurven van de 2 gastrocnemii van normale kikkers dikwijls eveneens dergelijke kleine verschillen zien, ondanks het feit, dat, zooals uit de fraaie regelmatigheid der curven ten duidelijkste blijkt, door het bezigen van Kroneckersche spoelcontacten, het achter elkaar plaatsen van de beide zenuwen resp. voorwortels en het aanbrengen van een groote weerstand (120000—150000 Ohm) in den secundairen keten voor een groote gelijkmatigheid der met behulp van een metronoom rhythmisch toegediende prikkels zorg gedragen was. De prikkelingen waren steeds uitsluitend openings- of sluitingsslagen, de tegengesteld gerichte inductieslagen waren door gebruikmaking van de bekende Pflügersche methode geblockeerd.

Ook in analoge proeven over de genese van den tetanus konden geen essentieele, in één bepaalde richting wijzende verschillen waargenomen worden tusschen normale en van hun sympathicus beroofde kikkerspieren.

Wij komen derhalve tot de slotsom dat er tot dusver geen enkel proefondervindelijk gegeven bestaat dat ondubbelzinnig wijst op een direct verband tusschen den mechanischen tonus, in den zin van Brondgeest, der spieren en het sympathisch zenuwstelsel; wat de in mijne proeven langdurig bestaande initieele hypotonie betreft moet, met het oog op het reeds besproken feit, dat von Brücke gevonden heeft, dat deze hypotonie reeds enkele dagen na de wegname van den sympathicus weer verdwenen was, het antwoord van nadere proeven in dezen worden afgewacht. In ieder geval is deze laatste steun voor de zienswijze van de Boer door de mededeeling v. Brücke aanmerkelijk verzwakt. Dit wat de mechanische spiertonus betreft.

Ik moet nu hier nog kort terugkomen op de chemische spiertonus. G. Manefeld en A. Lukács[1]) hebben proefondervindelijke gegevens medegedeeld, waaruit zij besluiten tot het bestaan van een zgn. chemischen spiertonus, waarmede aangeduid wordt de voorstelling, dat de dwargestreepte skeletspieren ook in rust een zekere mate van stofwisseling zouden bezitten, welke ruststofwisseling onder invloed van het sympathisch zenuwstelsel zou staan.

Ik heb aanvankelijk[2]) gemeend, dat de door deze onderzoekers bekend gemaakte proeven niet bewijzend waren en heb nog onlangs[3]) in het kort tegen deze proeven mijne toenmalige bezwaren nader uiteengezet.

Sindsdien ben ik echter tot de overtuiging gekomen, dat de door mij gegeven kritiek niet steekhoudend is, zoodat ik deze hierbij terugneem.

Al zijn daarmede mijne bezwaren tegen die proeven van Mansfeld en Lukács grootendeels vervallen, toch geloof ik, dat de genoemde schrijvers hun resultaat, dat, mocht het bij nader onderzoek blijken juist te zijn, van groot belang voor dit vraagstuk geacht moet worden, nog beter hadden gegrondvest, indien zij directe gasanalysen hadden verricht van het naar de betreffende spieren toe- en van deze afstroomende bloed. Dan pas ware m. i., als dan de uitslag van deze analysen in den zin van hun vorig proefondervindelijk gegeven zou

---

[1]) l.c.

[2]) Pflüger's Archiv. **166**, 1916, p. 152.

[3]) Archives Néerlandais de Physiologie, tome II, 1918, p. 177.

uitvallen, aan de juistheid van hun resultaat voorloopig niet meer te tornen.[1])

Tegen hunne aan het geheele dier verrichte respiratorische analysen zou toch nog altijd de tegenwerping gemaakt kunnen worden, dat hun resultaat mogelijkerwijs daarvan afhankelijk is dat door de uitermate sterke vasodilatatie in het achterlichaam van hun proefdieren te weinig bloed in het voorste deel van het lichaam overgebleven is, om daar een behoorlijke gaswisseling in de spieren daarvan te onderhouden, zoodat hier de respiratorische stofwisseling door te geringe bloedwisseling in de spieren belangrijk verminderd zou kunnen zijn, welke factor eventueel de totale gaswisseling hunner proefdieren omlaag kan hebben gedrukt, zooals door hen gevonden.

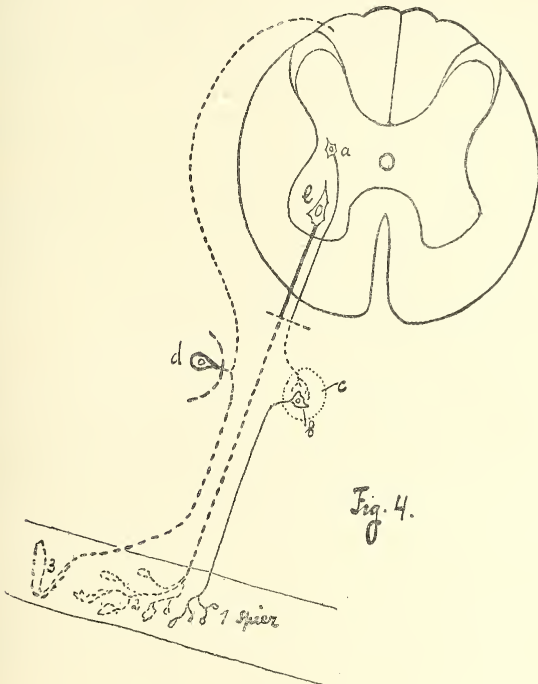
Of deze tegenwerping gegrond is, is zondermeer niet uit te maken, maar zij wijst in ieder geval erop, dat het gegeven der proeven van MANSFELD en LUKÁCS nog niet onaantastbaar vaststaat.

Bij de tot dusver medegedeelde proeven en bespiegelingen hebben wij steeds tot dusver aangenomen, dat de sympathische systemen van BOEKE centrifugale sympathische systemen zijn, een aanname waarvoor wel verschillende sterk sprekende histologische argumenten kunnen worden aangevoerd, maar die toch, zooals ik reeds eerder opgemerkt heb, geenzins bewezen is. Dit nu is in den laatsten tijd geschied door een daartoe opzettelijk ingesteld onderzoek van BOEKE en mij, en eveneens door eenige onafhankelijk van ons verrichte soortgelijke proeven van AGDUHR.

Indien nl. die BOEKE'sche systemen inderdaad centrifugale sympatische systemen waren, dan moest het mogelijk zijn, deze in de dwarsgestreepte spieren om zoo te zeggen in „reinkultuur" te behouden, door doorsnijding van de naar een of meerdere spieren gaande voorste wortels van het ruggemerg en exstirpatie van de overeenkomstige spinaalganglien. Dan toch moeten degenereeren alle cerebrospinale motorische systemen (de zgn. eindplaatjes van KÜHNE), alsmede alle sensible apparaten in de betreffende spieren. Aannemende dat de BOEKE'sche apparaten centrifugale sympathische systemen zijn, wier praeganglionaire neuronen in het ruggemerg ontspringende en met de voorste wortels uittredend, eindigen om de cellen der postganglionaire neuronen in de grensstreng van den sympathicus, moesten,

[1]) Daarvoor kwame dan in aanmerking een soortgelijke methodiek als door LANGLEY en ITAGAKI gebruikt voor hunne proeven over het O_2-verbruik van gedesinnerveerde spieren (Journal of Physiology, 51, 1917, p. 202). [Aanvulling tijdens de proefcorrectie].

in een dergelijk experiment, die BOEKE'sche apparaten geïsoleerd overblijven. Een blik op het onderstaande schema licht den gedachtengang, die bij deze proeven voorzat, onmiddellijk toe. (Fig. 4).



a = zenuwcel van het praeganglionaire sympathisch neuron.
b = zenuwcel van het postganglionaire sympathisch neuron.
c = ganglion van de grensstreng.
d = de spinaalganglioncel.
de gedegenereerde systemen zijn geblokt geteekend.
1 = in „reinkultuur'' behouden eindplaatje van BOEKE.
2 = gedegenereerd (verdwenen) eindplaatje van KÜHNE (het gewone motorische eindplaatje).
3 = gedegenereerd (verdwenen) sensibel spierapparaat.

Het object waaraan wij dit experimenteel-histologisch onderzoek verricht hebben, zijn de intercostaalspieren van den hond en de kat,

omdat aan deze spieren de metamere rangschikking het fraaiste behouden is en dus een vertroebeling der resultaten door plurisegmentale innervatie het minste te vreezen was.

Het resultaat van deze proeven nu is geweest, dat inderdaad uitsluitend de BOEKE'sche systemen in de tusschenribspieren behouden waren. *Alle* motorische cerebrospinale systemen (eindplaatjes van KÜHNE) en *alle* sensible apparaten waren verdwenen. Prachtig behouden waren in de periphere zenuwen (intercostaalzenuwen) tallooze merglooze ascylinders en in de spieren zelf fraaie accessorische zenuwvezels en eindplaatjes van BOEKE. Hiermede is dus bewezen dat deze systemen inderdaad *centrifugale* sympathische systemen zijn.

Hetzelfde resultaat bereikte AGDUHR bij de achterpootspieren van de kat, door de periphere zenuwen distaal van de spinaalganglien, maar centraal van de intredingsplaatsen der rami communicantes grisei door te snijden. [1])

De vraag die zich nu eerst recht aan ons opdringt, is derhalve: Welke is dan de functie dier BOEKE'sche apparaten?

Dat zij met den mechanischen spiertonus, zooals wij dien als den tonus van BRONDGEEST kennen, iets te maken hebben, is na alles wat wij nu daaromtrent weten, zoo goed als zeker niet het geval. Deze wordt hoogstwaarschijnlijk uitsluitend door de gewone motorische systemen verzorgd. Dan komt ons echter de „chemische spiertonus", waarvan het bestaan en de afhankelijkheid van het sympathisch zenuwstelsel door MANSFELD en LUKÁCS zooal niet bewezen, toch zekerlijk niet onaannemelijk is gemaakt, in de gedachte. Wanneer wij ons deze twee stellingen voor oogen stellen, verdwijnen daarmede vele van de juist door de zienswijze van DE BOER opgeworpen en zoo ondubbelzinnig door de boven weergegeven tabel van VAN RIJNBERK gedemonstreerde moeilijkheden en zonderlinge tegenstellingen. Door de zoo juist aangegeven formuleering: de mechanische spiertonus wordt beheerscht door het cerebrospinale systeem, de chemische door de centrifugale sympathische systemen van BOEKE, komen deze te vervallen en is daarmede m.i. een belangrijke factor van omneveling van ons gezichtsveld uit den weg geruimd. VAN RIJNBERK heeft mij, ik mag wel zeggen, verweten, dat ik in dezen bijna uitsluitend afbrekend werk geleverd heb; niemand is zich daarvan meer bewust dan schrijver zelf; toch geloof ik dat dit werk noodig was en vind in de twee stellingen, waarmede ik deze mededeeling meende te mogen eindigen, het beste bewijs daarvoor.

---

[1]) Deze beide mededeelingen verschijnen tegelijk met de hier aangebodene eveneens in deze Zittingsverslagen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Dat deze stellingen binnen niet al te langen tijd vaststaande proefondervindelijke feiten zullen behelzen, is ten zeerste te hopen. Alles wijst er m.i. op dat dat alleszins mogelijk zal blijken te zijn. Dat daarmede ons inzicht in het wezen van den tonus der dwarsgestreepte spieren veel verdiept is, zal ik de laatste zijn om te beweren. Wat die tonus eigenlijk is, is ook dan nog even onbekend en even duister als te voren.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: *„Nulstelsels, welke door lineaire stelsels van vlakke algebraische krommen worden bepaald.”*

1. Een drievoudig oneindig stelsel (complex) $S^{(3)}$ van vlakke algebraische krommen c^n bevat een tweevoudige oneindigheid van nodale krommen; immers een willekeurig gekozen punt D is dubbelpunt van een tot $S^{(3)}$ behoorende *nodale kromme* δ^n.

Ik beschouw nu het *nulstelsel*, waarin aan D, als *nulpunt*, zijn toegewezen de raaklijnen d, d' van δ^n als *nulstralen*.

De nodale krommen van een tot $S^{(3)}$ behoorend net hebben hun dubbelpunten op de Jacobiana, welke een kromme van den graad $3(n-1)$ is. Deze heeft met de Jacobiana van een tweede net de $3(n-1)^2$ dubbelpunten gemeen, welke voorkomen in den aan de beide netten gemeenschappelijken bundel. De overige snijpunten der beide meetkundige plaatsen zijn *kritische punten*, d. w. z. dubbelpunten voor de exemplaren van een bundel. *Het nulstelsel heeft dus* $6(n-1)^2$ *singuliere nulpunten.*

2. Zij a een willekeurige rechte, P een willekeurig punt. De δ^n, welke haar dubbelpunt D op a heeft, snijdt den straal PD nog in $(n-2)$ punten E. Zal E in P komen, dan moet δ^n behooren tot het net dat in P een basispunt bezit; D ligt dan op de Jacobiana van dat net. De meetkundige plaats (E) der punten E gaat dus $3(n-1)$ maal door P, is derhalve een kromme van den graad $(4n-5)$. Elk snijpunt van (E) met a is dubbelpunt van een δ^n, waarvan een der raaklijnen d door P gaat.

Er is dus een kromme $(D)_P$ van den graad $(4n-5)$, welke de dubbelpunten bevat van de nodale krommen δ^n, die een van hun raaklijnen d door een gegeven punt P zenden. Zij zal de *nulkromme* van P genoemd worden. Voor een singulier punt S heeft zij in S een drievoudig punt. Daar P blijkbaar dubbelpunt van (D) is, liggen op een straal d door P $(4n-7)$ punten D, waarvoor d een der raaklijnen der overeenkomstige kromme δ^n is. Hieruit volgt: *een willekeurige rechte d heeft* $(4n-7)$ *nulpunten D.*

3. De nulkrommen $(D)_P$ en $(D)_Q$ hebben de $6(n-1)^2$ singuliere punten gemeen; immers een kritisch punt draagt ∞^1 paren d, d'.

Verder gaan de beide krommen door de $(4n-7)$ nulpunten der rechte PQ. Elk der overige snijpunten is een punt D, waarvoor d door P, d' door Q gaat. Anders gezegd, als d om P wentelt, zal d' een kromme van de klasse $(10n^2-32n+26)$ omhullen, Tot de rechten d', die door P gaan, behooren de raaklijnen der δ^n, die in P haar dubbelpunt heeft. Elke der overige $(10n^2-32n+24)$ rechten d' valt blijkbaar met een straal d samen, bevat dus een nulpunt D, waarvoor de beide nulstralen zijn samengevallen. Wanneer zulk een rechte een *dubbele nulstraal* wordt genoemd, dan volgt uit het bovenstaande, dat *de dubbele nulstralen een kromme van de klasse* $2(n-2)(5n-6)$ *omhullen* [1]).

4. De nulstralen d, die een nulpunt D op de rechte p hebben, omhullen een kromme (p) van de klasse $(4n-5)$, die p tot $(4n-7)$ voudige raaklijn heeft. Zij snijdt p dus in $(4n-5)(4n-6)-(4n-7)(4n-6)$ punten, die elk twee samengevallen nulstralen dragen. *De meetkundige plaats der punten* C, *die een dubbelen nulstraal dragen, is dus van den graad* $4(2n-3)$.

De kromme (C) is blijkbaar de meetkundige plaats der keerpunten van den complex. Daar de graad van (C) ook langs anderen weg kan worden bepaald, blijkt nu tevens dat de kromme (p) geen andere veelvoudige raaklijnen bezit.

5. Het geval $n=2$ verdient een afzonderlijke behandeling. Vooreerst heeft elke rechte d thans slechts *een* nulpunt; dit is het dubbelpunt der kegelsnede, welke door drie punten van d wordt aangewezen.

De meetkundige plaats (C) is nu van den vierden graad en bestaat uit vier rechten c_k. Immers, als de beide rechten van een nodale c^2 samenvallen, is c_k een dubbelrechte. De complex bevat dus *vier dubbelrechten,* en deze zijn tevens *singuliere nulstralen.*

De hoekpunten S_{kl} der door hen gevormde volledige vierzijde zijn de singuliere punten van het nulstelsel.

De krommen $(p)_3$ en $(q)_3$, zie § 4, hebben, behalve de nulstralen van het punt pq, *zeven* raaklijnen gemeen, die ieder een nulpunt op p en een nulpunt op q hebben, dus *singuliere nulstralen* zijn. Hiertoe behooren de vier rechten c_k. Elke der overige drie singuliere nulstralen s moet tot ∞^1 nodale kegelsneden behooren. Nu draagt S_{12}, als singulier punt, ∞^1 lijnenparen, die een straleninvolutie vormen;

[1]) Anders gezegd: de *keerpuntsraaklijnen* der cuspidale krommen van een complex omhullen een kromme van de klasse $2(n-2)(5n-6)$. In mijn mededeeling over kenmerkende getallen van een complex (Versl. deel XXIII, bl. 907, § 13), is bij de bepaling van de klasse de invloed der kritische punten over het hoofd gezien.

dus behoort $S_{12}S_{34}$ tot twee, en dan tot ∞^1, lijnenparen, en moet derhalve singulier zijn. De diagonalen der vierzijde, welke door de vier rechten c wordt gevormd, zijn bijgevolg de gezochte drie singuliere nulstralen.

6. Als de complex $\{c^2\}$ een basispunt B heeft, dan is dit tevens singulier nulpunt, want twee punten op een straal door B bepalen een nodale δ^2, met dubbelpunt in B. De dubbelstralen der involutie gevormd door de δ^2 met dubbelpunt B zijn dubbelrechten van $\{c^2\}$, dus singuliere nulstralen. Andere dubbele nulstralen zijn er niet, want wanneer een rechte d van δ^2 niet door B gaat, doet d' dit wel. Daar B dubbelpunt is van de Jacobiana van elk tot $\{c^2\}$ behoorend net, vervangt dit punt vier kritische punten. Buiten B liggen dus nog twee singuliere punten; zij worden door een singulieren nulstraal verbonden.

7. In een viervoudig lineair stelsel $S^{(4)}$ is elk punt D dubbelpunt voor een bundel (δ^n). Twee van die krommen hebben een *keerpunt* in $C \equiv D$.

Ik beschouw nu het *nulstelsel*, waarin aan het *nulpunt* C worden toegevoegd de keerpuntsraaklijnen c, c' der beide cuspidale krommen γ^n, die in C hun keerpunt hebben.

De rechte d wordt in elk van haar punten D aangeraakt door een nodale δ^n, die haar dubbelpunt in D heeft. Met de rechte PD heeft δ^n nog $(n-2)$ punten E gemeen. Om de meetkundige plaats der punten E te vinden, ga ik na hoe vaak E in P komt. In dit geval behoort δ^n tot den complex, die in P een basispunt heeft; daarin komen $(4n-7)$ δ^n voor, die d raken (§ 2). Bijgevolg is (E) een kromme van den graad $(5n-9)$.

Als E op d ligt, raakt $PE \equiv d'$ in dat punt aan een δ^n, welke haar dubbelpunt op D heeft. Elke rechte d is dus dubbelpuntsraaklijn van $(5n-9)$ krommen δ^n, waarvan de tweede raaklijn d' door P gaat. Laat men nu d om een punt Q wentelen, dan beschrijft het punt D een kromme (D), waarvan elk punt dubbelpunt is van een δ^n, die haar raaklijnen d en d' door Q en P zendt. In Q wordt een δ^n door QP aangeraakt; dus is Q, en dan ook P, een punt van (D), zoodat deze kromme van den graad $(5n-8)$ is.

Is C een der $(5n-10)$ punten, welke (D), buiten P en Q, met de rechte PQ gemeen heeft, dan vallen de raaklijnen d,d' beide langs PQ, zoodat C een keerpunt is van een cuspidale kromme γ^n, welke $c \equiv PQ$ tot keerpuntsraaklijn heeft.

In het bovenbedoelde nulstelsel heeft een rechte dus $5(n-2)$ *nulpunten.*

Als c om een punt M wentelt, beschrijven de nulpunten C dus een kromme van den graad $(5n-8)$, met dubbelpunt M (de *nulkromme* van M).

8. Het stelsel $S^{(4)}$ bevat een aantal krommen met een drievoudig punt. Wordt $S^{(4)}$ voorgesteld door de vergelijking

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \varepsilon E = 0,$$

dan hebben de coördinaten van een drievoudig punt te voldoen aan de zes vergelijkingen

$$\alpha A_{kl} + \beta B_{kl} + \gamma C_{kl} + \delta D_{kl} + \varepsilon E_{kl} = 0,$$

waarin A_{kl} enz. afgeleiden naar x_k en x_l aanduiden.

Men heeft dus het aantal punten te zoeken, waarvoor

$$\left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{12} & A_{23} & A_{31} \\ B_{11} & B_{22} & B_{33} & B_{12} & B_{23} & B_{31} \\ C_{11} & C_{22} & C_{33} & C_{12} & C_{23} & C_{31} \\ D_{11} & D_{22} & D_{33} & D_{12} & D_{23} & D_{31} \\ E_{11} & E_{22} & E_{33} & E_{12} & E_{23} & E_{31} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Volgens een bekenden regel vindt men hiervoor

$$(5^2-4^2+3^2-2^2+1^2)(n-2)^2.$$

Er zijn dus $15(n-2)^2$ krommen c^n met een *drievoudig punt* S[1]). In zulk een punt hebben de nodale krommen dezelfde raaklijnen d,d'. Elke rechte door S is als een (oneigenlijke) keerpuntsraaklijn c te beschouwen.

Het nulstelsel heeft dus $15(n-2)^2$ *singuliere punten.*

9. Ik neem nu drie punten P, Q, R willekeurig aan, en beschouw (zie § 7) de krommen $(D)_{PQ}$ en $(D)_{PR}$. Zij hebben vooreerst het punt P gemeen; immers, er is een δ^n, die P tot dubbelpunt en PQ tot raaklijn heeft, en een δ^n, waarvoor een der raaklijnen langs PR ligt.

Verder hebben die krommen de $(5n-9)$ punten D gemeen, waarvoor QR een der raaklijnen d is. Een andere groep van gemeenschappelijke punten bestaat uit de singuliere punten S.

Zij U een der nog overblijvende snijpunten. Er is dan een δ^n met raaklijnen UP en UQ, en ook een δ^n met raaklijnen UP en UR. Hieruit volgt, dat alle δ^n met dubbelpunt U de rechte UP tot raak-

[1]) Als $n=3$ is en het stelsel 5 basispunten heeft, zijn de 15 drievoudige punten gemakkelijk aan te wijzen. Een daarvan is het snijpunt van B_1B_2 met B_3B_4.

lijn hebben, dus tot een bundel behooren, waarin de raaklijnen d,d' een parabolische involutie vormen. De dubbelstralen dier involutie zijn dan in UP vereenigd, en U is keerpunt voor slechts *een cuspidale* c^n. Noemt men zulk een punt, ter bekorting, een *unicuspidaal punt*, dan volgt uit $(5n-8)^2-1-(5n-9)-15(n-2)^2$ dat $(10n^2-25n+12)$ unicuspidale krommen hun raaklijn u door P zenden. *De keerpuntsraaklijnen der unicuspidale punten omhullen een kromme van de klasse* $(10n^2-25n+12)$.

10. In elk punt C der rechte a trek ik de beide nulstralen c,c' (keerpuntsraaklijnen), en beschouw de verwantschap tusschen de punten L,L', welke c,c' op de rechte l bepalen.

Laat men c om L wentelen, dan beschrijven de nulpunten van c een kromme van den graad $(5n-8)$, die in L een dubbelpunt heeft (zie § 7). Bij een punt L behooren dus $(5n-8)$ punten C en $(5n-8)$ punten L'. Het punt al vertegenwoordigt twee dekpunten $L \equiv L'$. De overige dekpunten zijn afkomstig van keerpuntsraaklijnen u van unicuspidale punten U. *De meetkundige plaats der unicuspidale punten is dus van den graad* $2(5n-9)$.

Deze uitkomst kan aldus worden bevestigd. Als C de rechte p beschrijft, omhullen de nulstralen c,c' een kromme van de klasse $(5n-8)$, welke p tot $(5n-10)$voudige raaklijn heeft. Zij heeft dus met p, buiten de raakpunten om, $(5n-8)(5n-9)-(5n-10)(5n-9)$ dus $2(5n-9)$ punten gemeen. In elk dier punten zijn de nulstralen c en c' vereenigd.

11. Het stelsel $S^{(4)}$ levert nog op een andere wijs een *nulstelsel.* Elk punt F is *flecnodaalpunt* voor vijf krommen φ^n. Om dit in te zien heeft men slechts de kromme te beschouwen, welke ontstaat als men elke δ^n, die F tot dubbelpunt heeft, tot doorsnijding brengt met haar raaklijnen d, d'. Deze c^{n+2} heeft n.l. in F een vijfvoudig punt.[1])

Ik voeg nu aan elk punt F als *nulpunt* de vijf *nulstralen* f toe, welke inflectieraaklijnen zijn voor de vijf flecnodale krommen φ^n.

Elk punt D der rechte a is dubbelpunt voor een δ^n, welke den straal PD in D raakt. Ik bepaal nu den graad der meetkundige plaats van de groepen van $(n-3)$ punten E, welke elke der krommen δ^n nog met PD gemeen heeft. Als E in P ligt, behoort δ^n tot

---

[1]) In een punt S (§ 8) vervangt de c^n met drievoudig punt drie der krommen φ^n; voor de andere twee ligt de inflectieraaklijn langs een der beide vaste raaklijnen d, d'.

Voor een unicuspidaal punt (§ 9) heeft een der krommen φ^n haar inflectieraaklijn langs de vaste raaklijn d.

een complex $S^{(3)}$. Volgens § 2 zijn er op $a\,(4n-5)$ dubbelpunten van krommen δ^n van $S^{(3)}$, die hun raaklijn d door P zenden. Dus is $P\,(4n-5)$-voudig punt der kromme (E) en deze dus van den graad $(5n-8)$. In elk van haar snijpunten F met a heeft een kromme φ^n een flecnodaalpunt, waarvan de inflectieraaklijn f door gaat.

Hieruit volgt, dat de meetkundige plaats der nulpunten F der stralen f uit een punt P (*nulkromme* van P) een kromme van den graad $(5n-8)$ is. Daar zij in P een *vijfvoudig punt* moet hebben, bevat een willekeurige rechte f dus $(5n-13)$ *nulpunten.* [1])

12. In het nulstelsel (C, c) heeft P een nulkromme van den graad $(5n-8)$ met dubbelpunt P (§ 7). Van haar snijpunten met de nulkromme t.o.v. het stelsel (F, f) liggen 10 in P. Ook hebben zij de unicuspidale punten U gemeen, waarvoor de raaklijn u door P gaat. In elk der overige $(5n-8)^2-10-(10n^2-25n+12)$ snijpunten G heeft een cuspidale kromme met haar raaklijn g vier punten gemeen. Hieruit volgt, dat *de vierpuntige keerpuntsraaklijnen een kromme van de klasse* $(15n^2-55n+42)$ *omhullen.*

Als n gelijk is aan *drie*, worden de krommen γ^3 met vierpuntige raaklijnen vervangen door kegelsneden, elk met een van haar raaklijnen. Het nulstelsel (F, f) heeft dan de kenmerkende getallen 5 en 2; de nulkromme $(P)^7$ van P is van de klasse 22, zendt dus 12 raaklijnen f door P, en elke dezer rechten vormt met de haar rakende kegelsnede een γ^3 met vierpuntige raaklijn. In overeenstemming hiermee levert de vorm $15n^2-55n+42$ voor $n=3$ het getal 12.

13. In een vijfvoudig oneindig stelsel $S^{(5)}$ is elk punt D dubbelpunt voor een net van nodale krommen. Een rechte d door D bepaalt daarin een bundel, waarvan alle δ^n in D aan d raken. Er is dus *een* cuspidale γ^n, die een rechte c door D tot keerpuntsraaklijn heeft. De krommen γ^n, met keerpunt D, vormen een stelsel met index *twee*; immers de krommen δ^n, die door eenig punt P gaan, vormen een bundel, en deze bevat twee krommen met keerpunt in D. Brengt men elke rechte c door D tot doorsnijding met de cuspidale γ^n, die zij in D aanraakt, dan ontstaat blijkbaar een kromme van den graad $(n+2)$, welke in D een vijfvoudig punt bezit. Hier-

[1]) Voor $n=3$ is $5n-13=2$. Elke Φ^3 is dan het samenstel van een rechte f en een φ^2. Elke rechte f behoort in S_4 tot een figuur (f, φ^2); haar snijpunten met φ^2 zijn de beide nulpunten F.

uit volgt, dat *vijf* cuspidale krommen in D een *keerpunt* hebben, waar de keerpuntsraaklijn een *vierpuntige aanraking* vertoont.

Ik beschouw nu het *nulstelsel* (G, g), waarin aan een punt G zijn toegewezen de *vijf* rechten g, die vierpuntige keerpuntsraaklijnen zijn voor cuspidale krommen γ^n met keerpunt G.

14. In elk punt C der rechte a beschouw ik de cuspidale kromme γ^n, die haar raaklijn c door P zendt, en bepaal de meetkundige plaats der punten E, welke γ^n nog met PC gemeen heeft. Als E in P ligt, behoort γ^n tot een stelsel $S^{(4)}$; hierin zijn $(5n—8)$ krommen γ^n, die hun keerpunt op a hebben (§ 7). Dus gaat de kromme (E) $(5n—8)$-maal door P en is van den graad $(6n—11)$. In elk van haar snijpunten G met a heeft een γ^n met PG vier punten gemeen. De *nulkromme* van P is dus van den graad $(6n—11)$. Daar zij in P een *vijfvoudig punt* heeft, is een rechte g door P *nulstraal* voor $(6n—16)$ punten G.

15. Het stelsel $S^{(5)}$ bevat ∞^1 krommen met een drievoudig punt T. Wordt $S^{(5)}$ voorgesteld door

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D + \varepsilon E + \varphi F = 0,$$

dan wordt de meetkundige plaats der punten T bepaald door

$$|A_{kl}\ B_{kl}\ C_{kl}\ D_{kl}\ E_{kl}\ F_{kl}|_6 = 0.$$

Zij is dus een kromme (T) van den graad $6(n—2)$ [1]).

Een τ^n met drievoudig punt T bepaalt met een nodale δ^n, die haar dubbelpunt in T heeft, een bundel van nodale δ^n met vaste raaklijnen d,d'. Het net der δ^n met dubbelpunt T bestaat dus uit ∞^1 dergelijke bundels, waarvan de raaklijnen d,d' een involutie vormen. Elke der beide dubbelstralen c_1, c_2 is gemeenschappelijke keerpuntsraaklijn voor een bundel van cuspidale krommen, en ieder van die twee bundels bevat een γ^n met vierpuntige raaklijn. De vijf nulstralen g van T worden dus vertegenwoordigd door de rechten c_1, c_2 en de drie raaklijnen t_1, t_2, t_3 der kromme τ^n. De punten T zijn dus *niet singulier*.

16. In een zesvoudig oneindig stelsel S is elk punt T drievoudig punt van een τ^n. Aan T als *nulpunt* worden nu de drie raaklijnen t_1, t_2, t_3 van τ^n als *nulstralen* toegewezen.

Om het tweede kenmerkend getal van dit *nulstelsel* te vinden,

---

1) Heeft, voor $n = 3$, het stelsel $S^{(5)}$ de basispunten B_1, B_2, B_3, B_4, dan bestaat (T) uit de zes rechten $B_k B_l$.

beschouw ik de krommen τ^n, waarvan het punt T op de rechte a ligt en zoek den graad der kromme, welke de groepen van $(n-3)$ punten E bevat, waarin τ^n nog door PT wordt gesneden.

Als E in P ligt, behoort τ^n tot een $S^{(5)}$, en T is een der $6(n-2)$ punten, welke (§ 15) de kromme (T) met a gemeen heeft. Dus is E een $(6n-12)$voudig punt op de kromme (E), welke bijgevolg den graad $(7n-15)$ heeft.

De *nulkromme* van P is dus van den graad $(7n-15)$. Daar zij driemaal door P gaat, is een rechte t door P raaklijn voor $7n-18)$ krommen τ^n, die hun drievoudig punt T op t hebben. Een *nulstraal* heeft dus $(7n-18)$ *nulpunten*.

17. De krommen (T), die bij twee in $S^{(6)}$ begrepen stelsels $S^{(5)}$ behooren, hebben de $15(n-2)^2$ punten T van het stelsel $S^{(4)}$ gemeen, dat de „doorsnede" der beide $S^{(5)}$ vormt.

De overige snijpunten zijn *kritische punten*, d. w. z. elk van hen is drievoudig punt voor een bundel van krommen τ^n, dus singulier nulpunt S voor (T,t). Dit nulstelsel heeft bijgevolg $21(n-2)^2$ *singuliere nulpunten*.

Daar de drietallen raaklijnen der krommen τ^n van dien bundel een involutie vormen, is S drievoudig punt met een *keerpuntstak* voor *vier* krommen τ^n. Elk singulier nulpunt draagt dus *vier dubbele nulstralen*.

18. De nulkrommen van P en Q hebben de singuliere nulpunten S en de nulpunten van PQ gemeen. Elk der overige snijpunten T zendt een nulstraal door P, een tweeden door Q. Uit $(7n-15)^2-$ $-21(n-2)^2-(7n-18)$ volgt dus, dat de nulstralen t_2, t_1 een kromme van de klasse $(28n^2-133n+159)$ zullen omhullen, wanneer t_1 om een punt P wentelt. De nulstralen van P behooren ieder tweemaal tot die omhulde; elke der overige raaklijnen, die zij door P zendt, is blijkbaar dubbele nulstraal. De *dubbele nulstralen* omhullen dus een kromme van de klasse $(28n^2-133n+153)$.

19. Om de meetkundige plaats der punten T te vinden, waarvoor twee der nulstralen samenvallen, beschouw ik de kromme $(p)_{7n-15}$ omhuld door de nulstralen der op p gelegen punten. Deze heeft p tot $(7n-18)$voudige raaklijn, wordt dus door p gesneden in $(7n-15)(7n-16)-(7n-18)(7n-17)$ punten. Daar voor elk dier punten twee nulstralen samenvallen, liggen de punten T met *dubbele nulstralen* op een kromme van den graad $(28n-66)$.

Deze is tevens de meetkundige plaats der drievoudige punten, welke een keerpuntstak hebben.

Voor $n = 3$ heeft men een nulstelsel (3,3); de krommen τ^3 zijn dan driestralen. Een willekeurige rechte vormt dan figuren c^3 met de exemplaren van een net van c^2. De Jacobiana van dat net bepaalt de drie nulpunten der rechte.

Heeft het stelsel $S^{(6)}$ drie basispunten, dan worden de nulpunten van een rechte ingesneden door de zijden van den driehoek, welke de basispunten tot hoekpunten heeft. Elk basispunt is de top van een waaier van singuliere nulstralen.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling van den Heer G. SCHAAKE aan, getiteld: „*Een involutie in de stralenruimte*".

(Mede aangeboden door den Heer HENDRIK DE VRIES).

In het Verslag van de Vergadering der Akademie van 29 September 1918 komt op blz. 256 een mededeeling voor van Prof. JAN DE VRIES over een involutie van stralenparen, die door vier willekeurig in de ruimte aangenomen waaiers wordt bepaald. Elk paar bestaat uit de beide transversalen t, t' van vier stralen a, b, c, d, die ieder tot een der vier waaiers behooren. In het volgende zal dit onderzoek op enkele punten worden aangevuld.

1. In § 4 van bovengenoemde mededeeling is sprake van een stelsel van ∞^3 quadratische regelvlakken, waarvan een der regelscharen in elk van de drie waaiers (b), (c) en (d) een beschrijvende heeft. Het aantal dier oppervlakken door drie punten wordt daar bepaald door in elk der vlakken β, γ en δ der waaiers een punt te kiezen. Dan geven de stralen b, c en d door die punten zeker een regelvlak $(b\,c\,d)$. Maar bovendien is bijv. nog een oppervlak te construeeren, welks beschrijvenden door de in de raakvlakken β en γ aangenomen punten niet tot het stelsel der rechten b, c en d behooren, terwijl door het punt van δ wel een rechte d van dit stelsel gaat. Het stelsel is dus *niet lineair*.

Beschouwen we de regelvlakken van het stelsel, welke door een willekeurig punt P gaan. Op elk dier oppervlakken ligt een rechte door P, welke de het regelvlak bepalende rechten b, c en d snijdt.

De stralen door P bepalen een trilineaire verwantschap T_P tusschen de waaiers (b), (c) en (d). Elk drietal daarvan geeft een exemplaar van ons stelsel door P. Willen we dus het aantal oppervlakken door drie punten P, Q en R vinden, dan hebben we het aantal stralendrietallen te zoeken, die aan de trilineaire verwantschappen T_P, T_Q, T_R gemeen zijn.

Nu wordt zulk een trilineaire verwantschap voorgesteld door een vergelijking in de richtingsparameters van b, c en d. Vatten we deze grootheden op als coördinaten t.o.v. een Cartesiaansch stelsel in de ruimte, dan stelt de vergelijking een kubisch oppervlak voor,

het zoogenaamde verwantschapsoppervlak, dat in de oneindig verre punten der drie coördinaatassen kegelpunten bezit en het oneindig verre vlak volgens de oneindig verre rechten der drie coördinaatvlakken snijdt. Hieruit volgt, dat twee van die oppervlakken een zesdegraadskromme k^6 gemeen hebben, die drie dubbelpunten in de oneindig verre punten der assen heeft. Drie oppervlakken hebben dus zes in het eindige gelegen punten gemeen.

We besluiten hieruit, dat de verwantschappen T_P, T_Q en T_R zes stralendrietallen gemeen hebben. Eén hiervan wordt geleverd door de rechten b, c en d, welke door het snijpunt A^* van β, γ en σ gaan. De andere geven elk een regelvlak door P, Q en R. *Door drie punten gaan dus vijf oppervlakken van het stelsel.*

Merkt men verder op, dat ook door de stralen van een veld een trilineaire verwantschap tusschen de waaiers (b), (c) en (d) wordt bepaald, dan volgt, dat er vijf oppervlakken zijn, die aan drie vlakken raken, zes, die door twee punten gaan en aan één vlak raken en zes, die door één punt gaan en aan twee vlakken raken.

2. Projecteeren we de doorsnede k^6 van twee verwantschapsoppervlakken op een coördinatenvlak, dan ontstaat een vlakke kromme λ^4 met dubbelpunten in de oneindig verre punten der beide coördinaatassen. Hieruit volgt, dat de oppervlakken $(b\,c\,d)$, die door twee punten P en Q gaan een (2,2) verwantschap tusschen de waaiers (b) en (c) bepalen, die we verkrijgen door de rechten b en c van zoo'n oppervlak aan elkaar toe te voegen. Hetzelfde geldt voor de oppervlakken, die door twee oneindig dicht bij elkaar gelegen punten gaan en dus een rechte l in een punt S aanraken. Projecteeren we (b) en (c) uit S, dan ontstaan twee vlakkenbundels, waartusschen een (2,2) verwantschap bestaat. Hierin is het verbindingsvlak der beide assen SB en SC, dat tot beide bundels behoort, aan zich zelf toegevoegd. Dit vlak snijdt namelijk β en γ volgens rechten b en c, die elkaar op de snijlijn der beide laatstgenoemde vlakken in een punt T ontmoeten. Voegen we aan deze rechten den straal van (d) toe, die door het snijpunt van ST met σ gaat, dan ontaardt de bijbehoorende hyperboloïde $(b\,c\,d)$ in twee vlakken, op welker snijlijn S ligt. De hier beschouwde rechten b en c zijn dus beschrijvenden van een regelvlak $(b\,c\,d)$, dat l in S aanraakt, waaruit inderdaad volgt, dat het vlak door SB en SC in de laatstgenoemde (2,2) verwantschap aan zich zelf is toegevoegd. Elk vlakkenpaar hiervan geeft in zijn snijlijn een beschrijvende van een regelvlak, dat l in S aanraakt. De m.p. dezer beschrijvenden bestaat dus uit een kubischen kegel, zoodat de afleiding van den

graad van den complex der dubbelstralen in § 4 van de mededeeling van Prof. DE VRIES van kracht blijft.

3. Het aantal oppervlakken $(b\,c\,d)$ door een rechte a is blijkbaar gelijk aan dat door drie punten, dus vijf. Zoeken we echter slechts de regelvlakken, waarbij a tot het stelsel van b, c en d behoort, dan moeten we uitsluiten de regelschaar, die bepaald wordt door de rechten b, c en d, welke door de snijpunten van a met β, γ en δ gaan. Verder vormen bijv. het vlak $(a\,D)$ en het vlak door BC en het snijpunt van $(a\,D)$ met $\beta\gamma$ een ontaarde hyperboloïde van ons stelsel, die door a gaat. Zoo zijn er nog twee aan te wijzen. *Door a gaat dus één niet ontaard regelvlak* $(b\,c\,d)$, waarop a, b, c, d tot dezelfde regelschaar behooren. De afleiding van de congruentie (3,3) der singuliere regelscharen in § 7 van de meermalen genoemde mededeeling blijft dus van kracht.

4. Nemen we een straal t, die op de rechten AB en $\gamma\delta$ rust. De bijbehoorende stralen a en b liggen in het vlak φ door AB en t en snijden elkaar op de rechte $\alpha\beta$, terwijl de bij t behoorende rechten c en d door het snijpunt van φ met $\gamma\delta$ gaan. De toegevoegde rechten t' vormen dus een waaier met den top op $\gamma\delta$, waarvan het vlak door AB gaat.

De involutie (t,t') bezit dus nog zes bilineaire congruenties van singuliere stralen.

Beschouwen wij nog de rechte AA^*. De bijbehoorende rechten b, c en d gaan door A^*, terwijl a onbepaald is. Aan de rechte $t = AA^*$ zijn dus alle stralen van de ster A^* toegevoegd. Evenzoo is aan de rechte $t = \alpha\alpha^*$ het geheele stralenveld α^* toegevoegd.

Er zijn dus nog acht hoofdstralen, waarvan vier aan de stralen van een ster en vier aan die van een veld toegewezen zijn. *In het geheel zijn er dus twintig hoofdstralen* (zie § 6 van de mededeeling van Prof. DE VRIES).

5. In de involutie (t,t') zijn aan de stralen t van een ster S de rechten t' van een congruentie Σ toegevoegd. Bepalen we het aantal rechten van Σ door een willekeurig punt P. Aan een rechte u door P voegen we de rechte t door S toe, die dezelfde stralen a en b snijdt als u. Doorloopt u een waaier met P als top, dan beschrijft t een quadratischen kegel. Nemen we verder bij een rechte t den straal u' door P, die dezelfde rechten c en d treft, dan is de verwantschap (t,u') eveneens quadratisch. De verwantschap (u,u') in de ster P is dus van den vierden graad, bovendien birationaal,

zoodat ze zes dubbelstralen bezit. Eén hiervan is de rechte PS, waarin een straal u met een rechte t samenvalt. De andere vijf dubbelstralen snijden dezelfde stralen van $(a), (b), (c)$ en (d) als de overeenkomstige rechte t en zijn dus als rechte t' aan stralen t van S toegevoegd. De stergraad van Σ is dus *vijf*.

Het aantal rechten van Σ in een vlak W vinden we door aan een straal w van W de rechte t door S toe te voegen, die dezelfde stralen a en b snijdt, en aan t de rechte w', die met t dezelfde rechten c en d treft. De verwantschap (w,w') in W is weer birationaal en van den vierden graad, heeft dus ook zes dubbelstralen. Hier is geen rechte w identiek met een rechte t; de veldgraad van Σ is dus *zes*.

Aan een ster is dus een congruentie (5,6) *toegevoegd.*

Met de vier rechten SA^* enz. en de transversalen door S naar de zes paren $(AB,\gamma\delta)$ enz. komen waaiers overeen. *Elke congruentie* Σ *bevat dus tien singuliere waaiers.*

Evenzoo bewijzen we, dat met *een stralenveld* V *een congruentie* Φ (6,5) *overeenkomt.*

Bevat S of V een of meer hoofdstralen, dan treedt een telkens gemakkelijk aan te geven graadverlaging van Σ of Φ op.

6. Twee complexen $\{t'\}^7$ (zie § 7 van de mededeeling van Prof. DE VRIES), die aan speciale lineaire complexen van rechten t met assen l en m zijn toegewezen, hebben een congruentie C(49, 49) gemeen, die we wenschen te onderzoeken.

In de eerste plaats behoort tot C de congruentie Λ, die toegewezen is aan de bilineaire congruentie L, welke l en m tot richtlijnen heeft. Nu heeft L (1,1) met een congruentie Σ (6,5) elf stralen gemeen, evenals met een Φ (5,6), waaruit volgt, dat Λ een congruentie (11,11) is.

Elke $\{t'\}^7$ heeft verder tot dubbelstralen de rechten der sterren A, B, C en D, die der velden α, β, γ en δ en die der congruentie (3, 3) der singuliere regelscharen. Immers de rechte l snijdt van elke singuliere regelschaar twee beschrijvenden, met elk waarvan de geheele regelschaar overeenkomt. Elk der genoemde negen congruenties is in de doorsnijding der beide met l en m overeenkomende complexen vier maal te tellen. Samen rekenen we ze dus voor een congruentie (28, 28).

Verder bezit iedere $\{t'\}^7$ enkelvoudige stralen in de rechten der vier sterren A^* enz., die der vier velden α^* enz. en die der zes bilineaire congruenties $(AB, \gamma\delta)$ enz. (§ 4). Deze geven samen een congruentie (10,10).

Hiermede is de congruentie (49, 49) verantwoord en tevens een contrôle op de volledigheid van het gevonden systeem der singuliere stralen verkregen.

7. Volgens de stelling van Halphen hebben de congruenties $\Sigma(5,6)$, die aan twee sterren P en Q toegewezen zijn, 61 stralen gemeen. Hiertoe behoort in de eerste plaats de rechte t', die aan de rechte $t \equiv PQ$ is toegevoegd.

Iedere congruentie Σ heeft tot beschrijvenden de hoofdstralen AB enz., (6 in getal), $\alpha\beta$ enz. (6), AA^* enz. (4). Immers met elk der twaalf eerstgenoemde komt een bilineaire congruentie overeen, met de vier laatstgenoemde een ster en deze zenden alle één straal door een willekeurig punt. Hiermede zijn 16 gemeenschappelijke rechten verantwoord.

De overige 44 vinden we als volgt. Volgens § 1 zijn er vijf regelscharen $(b\,c\,d)$ welke door A en tevens door P en Q gaan. Een regelschaar $(b\,c\,d)$ door A is volgens § 5 van de mededeeling van Prof. de Vries aan een straal door A toegewezen. De beide congruenties Σ hebben dus vijf stralen door A, en evenveel door B, C en D gemeen.

Ook zijn er zes regelvlakken $(b\,c\,d)$, die aan α raken en door P en Q gaan. Een aan α rakende regelschaar $(b\,c\,d)$ is toegevoegd aan een rechte in α. De beide congruenties Σ hebben dus zes in α, en evenveel in β, γ en δ gelegen stralen gemeen.

We vinden zoo inderdaad nog $4 \times 5 + 4 \times 6 = 44$ gemeenschappelijke stralen.

Het onderzoek van de doorsnede van twee congruenties $\Phi(6,5)$ verloopt geheel analoog.

Eenigszins anders is het met de gemeenschappelijke stralen der congruenties Σ en Φ, die aan een ster P en een veld V zijn toegevoegd. Deze hebben volgens de stelling van Halphen 60 stralen. gemeen.

Hiertoe behooren de hoofdstralen AB enz., (6 in getal), $\alpha\beta$ enz. (6), te zamen twaalf rechten.

Er zijn zes oppervlakken $(b\,c\,d)$ door A, die door P gaan en aan V raken. Deze geven zes rechten door A, die aan Σ en Φ gemeen zijn. Evenveel vinden we er door B, C en D; tezamen 24 rechten.

De zes oppervlakken $(b\,c\,d)$, die aan α raken en door P gaan en aan V raken geven 6 gemeenschappelijke rechten in α. Evenveel zijn er in β, γ en δ, tezamen 24 rechten.

Hiermede zijn inderdaad 60 rechten verantwoord.

Deze § geeft een contrôle op de volledigheid van het gevonden stelsel der hoofdstralen.

Wiskunde. — De Heer KLUYVER biedt eene mededeeling aan van den Heer W. VAN DER WOUDE: „*Over een kromme van den vierden graad en 't geslacht twee, waarin oneindig veel configuraties van* DESARGUES *beschreven kunnen worden*".

(Mede aangeboden door den Heer W. KAPTEYN).

In een artikel, getiteld „*The quartic Curve and its inscribed configurations*" komt H. BATEMAN [1]) tot de conclusie, dat er krommen van den vierden graad en 't geslacht twee bestaan, waarin oneindig veel configuraties $(10_3, 10_3)$ van DESARGUES beschreven kunnen worden. BATEMAN vermeldt hier slechts 't bestaan dezer krommen, zonder op hare eigenschappen nader in te gaan.

In deze verhandeling wensch ik, uitgaande van geheel andere beschouwingen dan BATEMAN, aan te geven, welke voorwaarde *voldoende* is, opdat een kromme γ_4 van den vierden graad met een dubbelpunt om oneindig veel dergelijke configuraties beschreven zal zijn. 't Zal blijken, dat elk punt van γ_4 deel uitmaakt van één dezer configuraties en dat wij elk van die configuraties uit één harer punten kunnen construeeren, als wij γ_4 als gegeven beschouwen. Een paar bekende eigenschappen van een willekeurige kromme van den vierden graad met een dubbelpunt zet ik voorop.

1. Laat voorloopig γ_4 een kromme van den vierden graad voorstellen, die in O een dubbelpunt heeft en overigens willekeurig is. De raaklijnen in O duiden wij aan door x en y, hare vergelijkingen zijn $x=0$ en $y=0$; deze beide lijnen snijden elk γ_4 nog in een punt; de verbindingslijn dezer punten wordt voorgesteld door $z=0$.

Dan kunnen wij γ_4 voorstellen door:

$$\gamma_4 \equiv xy\,(x^2+mxy+y^2+z^2)+z\,(ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3)=0\,. \quad (1)$$

Wij kunnen uit O aan γ_4 6 raaklijnen trekken, als wij die in O niet meetellen; de raaklijnen zijn de buiten O gelegen snijpunten van γ_4 met de eerste poolkromme van O, voorgesteld door

$$\pi \equiv 2\,xyz+ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=0.$$

Derhalve wordt nu door

$$\gamma_4 + r\pi z = 0$$

[1]) *American Journal of Mathematics (36).* H. BATEMAN. *The quartic curve and its inscribed configurations.*

een bundel van vierdegraadskrommen voorgesteld, die alle in O een dubbelpunt bezitten en daar raken aan x en y; de verdere basispunten zijn de raakpunten der 6 raaklijnen, uit O aan γ_4 getrokken, en de 4 snijpunten van z met γ_4.

Stellen wij hierin

$$r = -1,$$

dan kiezen wij uit den bundel een kromme, die ontaard is in de beide lijnen x en y en een kegelsnee β met de vergelijking

$$\beta \equiv x^2 + mxy + y^2 - z^2 = 0.$$

Men noemt β „de kegelsnede van BERTINI".

Op de kegelsnee β liggen de raakpunten der 6 raaklijnen, uit O aan γ_4 getrokken, en de beide snijpunten van λ_4 met z.

Trekken wij verder door O een willekeurige lijn

$$y - lx = 0,$$

dan worden hare snijpunten met γ_4 gevonden uit

$$l\{x^2(1 + ml + l^2) + z^2\} + \overline{xz}\,(a + bl + cl^2 + dl^3) = 0,$$

die met β uit

$$x^2(1 + ml + l^2) - z^2 = 0,$$

waaruit dadelijk blijkt:

Een willekeurige lijn l door O snijdt γ_4 buiten O in nog 2 punten, die door de snijpunten van l met β harmonisch gescheiden worden.

2. De kromme, door ons bedoeld, wordt nu verkregen door in de vergelijking (I) den coëfficiënt m gelijk nul te stellen. De meetkundige beteekenis hiervan is de volgende:

De nu door ons beschouwde kromme γ_4 wordt door de lijn z, die de beide punten verbindt, waarin γ_4 nog door hare dubbelpuntsraaklijnen gesneden wordt, gesneden in nog twee punten, die door de beide eersten harmonisch gescheiden worden.

Gemakshalve zal ik verder spreken van de „harmonische kromme γ_4 met een dubbelpunt".

Hare vergelijking luidt aldus:

$$\gamma_4 \equiv xy(x^2 + y^2 + z^2) + z(ax^3 + bx^2y + cx^2y + dy^3) = 0 \quad . \quad (1)$$

Stellen wij nu

$$\varphi \equiv (1+C)x^2 + (1-C)y^2 + 2z\left[x\left(b - d\,\frac{1-C}{1+C}\right) + y\left(c - a\,\frac{1+C}{1-C}\right) - z\right]$$

$$\text{en } \psi \equiv 2\,xy + \frac{4a}{1-C}\,xz + \frac{4d}{1+C}\,yz,$$

waarin C een willekeurige constante is,

$$\text{dan is } 4\,\gamma_4 \equiv 2\,xy\varphi + \{(1-C)\,x^2 + (1+C)\,y^2\}\,\psi \, . \quad . \quad . \quad (2)$$

Derhalve kunnen wij γ_4 voortbrengen als de meetkundige plaats van de snijpunten der overeenkomstige krommen van 2 projektieve kegelsnedenbundels.

$$\varphi + \lambda \psi = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\text{en } (1-C)x^2 + (1+C)y^2 - 2\lambda xy = 0, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

waarbij de bundel (4) *bestaat uit een straleninvolutie met O als middelpunt.*

3. Van de wijze, waarop hier de projektiviteit tusschen (3) en (4) is vastgelegd, willen wij nu eerst een meetkundige interpretatie geven.

Door te stellen $\lambda = \lambda_1$, kiezen wij een willekeurige kegelsnee uit (3), die z snijdt in de punten A en A', bepaald door:

$$(1+C)x^2 + 2\lambda_1 xy + (1-C)y^2 = 0.$$

Wij stellen verder

$$(1+C)x^2 + 2\lambda_1 xy + (1-C)y^2 \equiv (1-C)(y+px)(y+p^1x),$$

zoodat

$$1 + C = (1-C)pp^1 \quad \text{en} \quad 2\lambda_1 = (1-C)(p+p^1).$$

De punten B en B', die van A en A' harmonisch gescheiden zijn door de snijpunten van z en β worden dan resp. gevonden uit

$$x - py = 0$$

$$\text{en } x - p^1y = 0$$

Het stralenpaar, dat uit O de punten B en B' projekteert, heeft dus tot vergelijking

$$(x - py)(x - p^1y) = 0$$

of ook

$$(1-C)x^2 + (1+C)y^2 - 2\lambda_1 xy = 0.$$

Derhalve is de projektiviteit tusschen (3) *en* (4) *aldus vastgelegd: een paar overeenkomstige kegelsneden van* (3) *en* (4) *snijden steeds z in puntenparen (A, A') en (B, B'), zoodat A en B en eveneens A' en B' harmonisch gescheiden worden door β.*

4. Aangaande den bundel (3) merken wij nog op, dat zoowel φ als ψ harmonisch omgeschreven is om β, d. w. z. omgeschreven om oneindig veel pooldriehoeken van β, zooals direkt blijkt uit 't nul worden van een der simultaaninvarianten — gewoonlijk Θ genoemd —, gevormd uit de coëfficienten van β en φ (of ψ).

Hieruit volgt:

1°. *elke kegelsnee uit* (3) *is harmonisch omgeschreven om β;*

2°. *de basispunten van den bundel* (3) *vormen een poolvierhoek van β, d. w. z. een vierhoek, waarvan elke zijde door de pool van de overstaande zijde t. o. v. β gaat.*

De basispunten van (3) noemen wij S_{15}, S_{25}, S_{35}, S_{45}, de verbindingslijn van S_{15} en S_{25} heet s_{34}, die van S_{35} en S_{45} zij s_{12}. Tot den bundel (3) behoort dan een kegelsnee, die in (s_{12}, s_{34}) ontaard is; laat z door de eerste dezer lijnen in A_{12}, door de tweede in A_{34} gesneden worden; het punt van z, dat door β harmonisch gescheiden wordt van A_{12} is B_{12}, eveneens zijn A_{34} en B_{34} harmonisch gescheiden door β. De kegelsnee (lijnenpaar) uit (4), correspondeerende met deze ontaarde kegelsnee uit (3), wordt derhalve gevormd door OB_{12} en OB_{34}. Het snijpunt van OB_{12} met s_{34} noemen wij S_{12}, dat met s_{12} zij T_{12}; S_{12} en T_{12} zijn punten van γ_4.

Nu is O de pool van z t. o. v. β, dus OB_{12} de poollijn van A_{12}; derhalve ligt de pool van s_{12} op OB_{12}. Wij wisten reeds, dat dit laatste punt ook ligt op s_{34}; dus is S_{12} de pool van s_{12} t. o. v. β. Zoo vinden wij dat de pool van elke zijde van den vierhoek $S_{15}\,S_{25}$ $S_{35}\,S_{45}$ op γ_4 ligt. Nu vormen echter de vier hoekpunten van een poolvierhoek met de zes polen der zijden een configuratie (10_3, 10_3) van DESARGUES; derhalve liggen de hoekpunten van deze Cf. alle op γ_4.

Op te merken valt, dat de punten S_{ij}, S_{jk}, S_{ki} steeds liggen op een lijn s_{lm}, waarvan S_{lm} de pool is. Elk dezer lijnen heeft nog een vierde snijpunt met γ_4; kiezen wij b.v. s_{12}, dan snijdt deze γ_4 behalve in S_{34}, S_{45}, S_{53} nog in een punt T_{12}, dat tevens ligt op OS_{12}.

Door aan de vergelijking van γ_4 den vorm te geven

$$\gamma_4 \equiv 2\,xy\varphi + \{(2-C)\,x^2 + (1+C)\,y_2\}\,\psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

hebben wij kunnen aantoonen, dat een Cf. (10_3, 10_3) van DESARGUES in haar beschreven is.

De vergelijking (5) bevat echter nog de geheel willekeurige constante C; door deze te veranderen, zullen wij oneindig veel bundels (3) en (4) en oneindig veel configuraties vinden. Derhalve:

In γ kunnen oneindig veel configuraties ($10_3\,10_3$) *van* DESARGUES *beschreven worden; elke configuratie is haar eigen poolfiguur t. o. v. β.*

5. In (5) zijn φ en ψ functies van x, y, z en C. Zij nu $P(x', y', z')$ een willekeurig punt van γ_4, zoodat derhalve

$$\gamma_4\,(x', y', z') = 0,$$

bepalen wij daarna C zoodanig, dat

$$\varphi\,(x', y', z', C) = 0$$

wij kunnen twee waarden van C vinden, die aan dezen eisch voldoen, dan is volgens (5) ook

$$\psi\,(x', y', z'\; C) = 0.$$

Beschouwen wij dus C als een veranderlijken parameter, dan zal

elk punt van γ_4 tweemaal een basispunt zijn van een bundel (3). Anderszins is 't uit 't voorafgaande duidelijk, dat een willekeurig punt, b.v. S_{12}, slechts van één configuratie deel uit kan màken; die wij uitgaande van dat punt gemakkelijk kunnen construeeren.

Daarvoor verbinden wij S_{12} met O, 't snijpunt van die lijn met γ_4 is T_{12}; wij trekken s_{12} de poollijn van S_{12} t. o. v. β, die γ_4 behalve in T_{12} nog snijdt in S_{34}, S_{45} en S_{53}; de poollijnen van deze 3 punten zullen dan γ_4 snijden in de 6 ontbrekende punten der configuratie en T_{34}, T_{45}, T_{53}. Toch zal elk punt, b.v. S_{12}, hoewel slechts tot één configuratie behoorende, tweemaal een basispunt zijn van den bundel (3); immers wij kunnen deze configuratie en tevens γ_4 voortbrengen, zoowel wanneer wij uitgaan van een bundel (3) met de basispunten S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, als wanneer S_{12}, S_{23}, S_{24}, S_{25} de basispunten zijn.

Elk punt eener harmonische kromme γ_4 behoort tot één configuratie $(10_3, 10_3)$ *van* Desargues; *beschouwen wij γ_4 als gegeven, dan kunnen wij elk dezer configuraties gemakkelijk uit één harer punten construeeren.*

Bovendien is uit de wijze, waarop wij γ_4 voortbrachten gebleken:

Is gegeven een configuratie $(10_3, 10_3)$ *van* Desargues *en een punt O, dan kunnen wij een harmonische kromme γ_4 voortbrengen, die omgeschreven is om deze configuratie en in O haar dubbelpunt heeft, terwijl de aan haar verbonden kegelsnede van* Bertini *samenvalt met de kegelsnede, ten opzichte waarvan de configuratie aan zich zelf geconjugeerd is.*

Sterrenkunde. — De Heer J. C. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan van den Heer H. NORT: *„De afstandscorrectie bij de platen van de „Harvard Map of the Sky".*

(Mede aangeboden door den Heer DE SITTER).

Het is een bekend feit, dat de grensgrootte in 't centrum van hemelfotografieën niet dezelfde is als aan den rand der platen. Kan men b.v. in 't centrum van eene plaat sterren van de fotografische grootte $11^{m}.0$ nog juist waarnemen, dan zullen deze sterren op een bepaalden afstand van 't centrum niet meer op de plaat voorkomen en zal op dezen afstand de grensgrootte b.v. $10^{m}.8$ zijn. Iemand, die sterretellingen op fotografische platen verricht, zal noodzakelijk voor elk zijner platen de grensgrootte als functie van den afstand tot 't centrum moeten kennen of, zooals men 't gewoonlijk uitdrukt, hij dient voor elk zijner platen de *afstandscorrectie* te bepalen.

Kende men van genoeg sterren de fotografische grootte, dan zou men van alle deelen van 'n plaat de grensgrootte langs directen weg kunnen bepalen en dan zou dus ook 't opsporen van de afstandscorrectie geen groote moeilijkheden opleveren. Doch over voldoende fotografische standaards beschikt men nog lang niet en daardoor is 't in 't algemeen niet mogelijk voor platen, die een eenigszins aanzienlijk deel van den hemel beslaan, de afstandscorrectie op directe wijze te bepalen. Er blijft voor zulke platen niets anders over dan een indirecten weg te volgen en hierbij doen zich moeilijkheden voor, die nog niet alle zijn opgelost. Over een enkele dezer moeilijkheden handelt het volgende.

In een vroegeren arbeid [1]) heb ik de afstandscorrectie bepaald voor de *Harvard Map of the Sky*, eene serie van 55 negatieven op glas, waarvoor HENIE [2]) tellingen had verricht. De weg, die daarbij gevolgd werd, was deze. In de eerste plaats werd onderzocht, hoe de sterredichtheid op de platen veranderde met den afstand tot 't centrum. Hierbij werd stilzwijgend aangenomen, — en met 't oog op 't geen volgt, wil ik dit thans nadrukkelijk vermelden —,

---

[1]) The Harvard Map of the Sky and the Milky Way. Recherches astronomiques de l'Observatoire d'Utrecht, Vol. VII, 1917.

[2]) H. HENIE. The Distribution of the Stars to the eleventh Magnitude. Lunds Universitets Årsskrift. N F. Afd. 2. Bd. 10. Nr. 1.

dat deze dichtheid *zonder* de z.g. *Bildwölbung* en afgezien van plaatselijke onregelmatigheden over de geheele plaat dezelfde zou zijn, m. a. w. de afname in gemiddelde dichtheid van 't centrum naar den rand komt *geheel* op rekening van de sferische aberratie. Verder werd verondersteld, dat de gemiddelde dichtheid op gelijke afstanden van 't centrum der plaat overal even groot is, welke onderstelling wel geoorloofd schijnt, als bij 't fotografeeren op 't centrum gefocusseerd is en als de plaat daarbij loodrecht stond op de optische as van den kijker. Iedere plaat van de Harvard Map, waarvan de filmoppervlakte 19 bij 21 c.M. bedraagt, werd door concentrische cirkels, met 't centrum der plaat als middelpunt en respectievelijk met stralen van 2, 4, 6, 8, 10 en 12 c.M., verdeeld in 7 concentrische zones. De buitenste drie dezer zones bestaan telkens uit 4 niet samenhangende stukken. Voor elke plaat werd nu uit de tellingen van Henie voor elk dezer zeven zones de gemiddelde dichtheid berekend [1]) en daarmee was dus voor iedere plaat de dichtheid als functie van den afstand tot 't centrum gevonden. Om zooveel mogelijk de individueele bizonderheden der platen te elimineeren, werden deze gemiddelde dichtheden der zones door de gemiddelde dichtheid van de geheele plaat gedeeld en leverden zoo de relatieve dichtheden in de zeven zones. Deze relatieve dichtheden zijn voor alle platen bijeengebracht in tabel VIII van m'n werk [2]).

Wil men uit deze verandering in relatieve dichtheid de verandering in grensgrootte vinden, dan moet men 'n formule aannemen, die sterredichtheid en magnitude met elkaar verbindt. In navolging van Henie nam ik hiervoor de volgende formule, door Charlier in z'n *Studies in Stellar Statistics* [3]) gegeven:

$$A\,(m) = \frac{N}{k\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{m} e^{-\frac{(m-m_0)^2}{2\,k^2}}\, dm$$

Hierin stelt $A(m)$ 't aantal sterren op een bepaald oppervlak van den hemel voor, die helderder zijn dan de grootte m, terwijl N, k en m_0 constanten zijn, die Charlier door sterretellingen op de Carte du Ciel bepaald heeft. Voor de berekeningen, die aan de hand van deze formule uit de verandering in dichtheid de afstandscorrectie doen vinden, verwijs ik naar mijne dissertatie [4]).

[1]) l. c. table VII, p. 34.

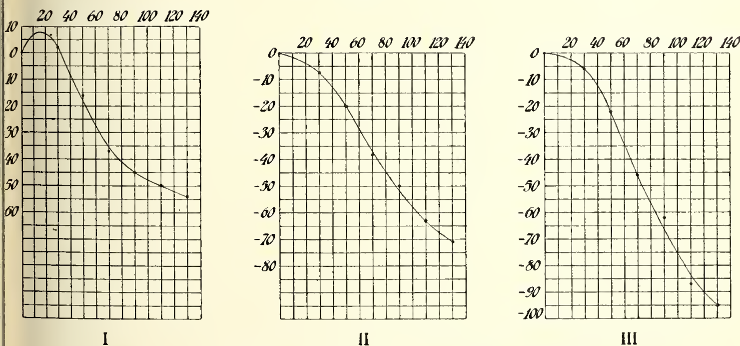
[2]) l. c. table VIII, p. 35.

[3]) Lunds Universitets Årsskrift. N.F. Afd. 2. Bd. 8, Nr. 2, p. 32.

[4]) l. c. p. 37 en volgende.

Bij deze bepaling van de afstandscorrectie deed zich nu eene complicatie voor, die men *a priori* niet verwacht zou hebben. Men zou denken, dat de 55 platen, die onder zooveel mogelijk gelijke omstandigheden met twee gelijkwaardige instrumenten zijn opgenomen, afgezien van locale onregelmatigheden, zich ten opzichte van de afstandscorrectie gelijkwaardig zouden gedragen. De reeds boven genoemde tabel VIII schijnt evenwel op iets anders te wijzen. Niet alleen ziet men, dat voor alle platen de relatieve dichtheid van 't centrum naar den rand afneemt, maar ook schijnt uit deze tabel te volgen, dat deze afname grooter is voor platen met eene groote, dan voor die met eene kleine gemiddelde dichtheid. Dit laatste verschijnsel maakte 't wenschelijk om bij 't verdere onderzoek niet alle platen over één kam te scheren, doch ze naar de gemiddelde dichtheid in groepen te verdeelen. In navolging van HENIE werden drie groepen gevormd: in de eerste groep werden de 27 platen opgenomen waarvan de gemiddelde dichtheid kleiner is dan 20 sterren per vierkanten graad; de tweede groep werd gevormd door 17 platen met eene gemiddelde dichtheid tusschen 20 en 35, terwijl in de derde groep tenslotte de 11 overblijvende platen werden opgenomen, die alle 'n gemiddelde dichtheid hebben grooter dan 35. Daar voor elk dezer drie groepen de verandering in de relatieve dichtheid van 't centrum naar den rand eene andere was, leverden ze ook drie verschillende curven op voor 't verloop der afstandscorrectie. Deze curven zijn in fig. 1 afgebeeld. Als abscis is genomen de afstand

Fig 1.



tot 't centrum in m.M., als ordinaat 't verschil van de grensgrootte op dezen afstand met die in 't centrum der plaat, uitgedrukt in honderdste deelen van een magnitude.

't Groote verschil tusschen de krommen I en III van deze figuur is zeer treffend en 't scheen me van belang, de oorzaak ervan op te sporen. Zooals ik reeds in mijne dissertatie heb opgemerkt, zou dit verschil op twee manieren misschien verklaard kunnen worden.

In de eerste plaats zou 't niet onmogelijk zijn, dat de kleur der sterren 'n rol speelt. Zooals reeds werd gezegd, is de afname van de grensgrootte naar den rand toe 'n gevolg van sferische aberratie en deze is natuurlijk afhankelijk van den brekingsindex. Daar nu, zooals bekend is, 't percentage van de blauwe sterren toeneemt als we den Melkweg naderen en daar alle platen van groep III, uitgezonderd één, hun centrum zéér dicht bij den Melkweg hebben, is 't niet onmogelijk, dat het de kleur van de sterren is, die 't groote verschil in de curven I en III veroorzaakte. We beschikken evenwel over te weinig gegevens omtrent de kleur der zwakkere sterren, om dezen invloed numerisch te kunnen nagaan.

Een tweede oorzaak van 't verschil tusschen de beide genoemde curven zou gelegen kunnen zijn in 't feit, dat er bij de platen van groep III, in tegenspraak met de aanname, die in 't begin van dit artikel werd gemaakt, behalve de sferische aberratie nog een andere invloed optreedt, die de relatieve dichtheid van 't centrum naar den rand doet afnemen. En inderdaad zou dit hier niet onmogelijk zijn. Immers iedere plaat van de Harvard Map beslaat ongeveer 900 vierkante graden aan den hemel en 't is duidelijk, dat op zoo groot een oppervlak de galactische condensatie een rol gaat spelen en wel des te sterker, naarmate 't centrum van de plaat dichter bij den galactischen cirkel ligt. Hierop werd ik tijdens 't bewerken mijner dissertatie reeds gewezen door Dr. P. J. van Rhijn te Groningen, maar ik meende dit argument te kunnen ontzenuwen, door op te merken, dat van de acht platen, waarvan 't centrum 't dichtst bij den galactischen cirkel ligt, er maar drie tot groep III behooren. Het is evenwel duidelijk, dat door deze opmerking alléén de kwestie niet afdoende is uitgemaakt, want ten slotte zijn de overige vijf van deze acht platen alleen dáárom niet in groep III opgenomen, omdat hare gemiddelde dichtheid kleiner was dan 35 sterren per vierkanten graad.

Ik heb daarom de 11 platen van groep III aan 'n nieuw onderzoek onderworpen en heb nagegaan, hoe voor deze platen de afstandscorrectie zou worden, nadat een eventueele invloed van de galactische condensatie zou zijn geëlimineerd. Van de 100 velden, die op iedere plaat geteld zijn, is niet alleen de sterredichtheid — aantal sterren per vierkanten graad — bekend, doch ook de galactische breedte, terwijl deze coördinaat ook voor 't centrum der plaat

gemakkelijk te berekenen is. Uit tabel V van Gron. Publ. N°. 27 [1]) werd voor de visueele grootte 11.0 — de gemiddelde grensgrootte der Harvard-platen — tusschen $b = 0°$ en $b = 50°$ de waarde van $log\ N$ van graad tot graad grafisch geinterpoleerd. Met behulp van deze logarithmen konden de dichtheden van alle velden eener plaat gemakkelijk herleid worden tot de galactische breedte van 't centrum. Is b.v. de dichtheid van 'n veld 20,7, z'n galactische breedte 14° en de galactische breedte van 't centrum 3°, dan is

$$log\ 20.7 + [log N]_{3°} - [log\ N]_{14°}$$

de logarithme van de gereduceerde dichtheid voor dat veld.

Nadat op deze wijze de dichtheden op ieder der 11 platen gereduceerd waren op de galactische breedte van haar centrum, werd op volkomen dezelfde manier als boven is aangegeven, de afstandscorrectie voor deze groep van platen opnieuw bepaald. 't Resultaat was, *dat er tusschen de platen van groep I en die van groep III nog altijd 'n vrij aanzienlijk verschil blijft bestaan met betrekking tot de afstandscorrectie,* zooals uit de volgende tabel moge blijken. Hierin zijn in honderdste magnitudes opgegeven de verschillen die men krijgt, door de grensgrootte op 30,50. . . . 130 m.M. van 't centrum te verminderen met die in 't centrum en wel voor de platen van groep I, voor die van groep III vóór de reductie en van de platen van deze laatste groep daarna.

	30	50	70	90	110	130
groep I	+2	—16	—37	—44	—50	—54
groep III (vóór red.)	—6	—22	—46	—62	—87	—95
groep III (na red.)	—6	—19	—40	—52	—72	—79

Waar er dus ten opzichte van de afstandscorrectie nog een verschil [2]) blijft bestaan tusschen de platen van de eerste en die der derde groep, ook nadat deze laatste voor den invloed der galactische condensatie gecorrigeerd zijn, daar zie ik geen kans, dit verschil anders te verklaren dan uit de kleur van de sterren in verband met hare ligging ten opzichte van den Melkweg. Indien dit werkelijk de oorzaak is, dan zou 't logischer zijn de platen niet in drie groepen te verdeelen naar hare gemiddelde dichtheid, doch in twee groepen naar de galactische breedte van haar centrum. Men kan dan ver-

[1]) Dr. P. J. VAN RHIJN. On the Number of Stars of each Photographic Magnitude in Different Galactic Latitudes. Gron. Publ. N⁰. 27, p. 63.

[2]) Dit verschil zou vermoedelijk nog iets grooter worden dan uit bovenstaande tabel volgt, wanneer ook de dichtheden van de platen der eerste groep op de galactische breedte van 't centrum werden gecorrigeerd. Immers ook in deze groep komen nog eenige platen voor, waarvan 't centrum eene geringe galactische breedte heeft.

wachten, dat bij deze nieuwe indeeling de platen van de eerste groep (die buiten den Melkweg) eene afstandscorrectie geven, die de karakteristieke eigenschappen van de curve I van Fig. 1 bezit; de nieuwe curve zou voor deze groep waarschijnlijk minder sterk dalen dan de oude, daar nu platen met geringe galactische breedte niet meer in deze groep voorkomen. De nieuw gevormde tweede groep, die dus uitsluitend platen met geringe galactische breedte van 't centrum zou bevatten, zou eene curve moeten leveren nagenoeg identiek met curve III van fig. 1.

Ik heb de boven aangegeven indeeling uitgevoerd en de resultaten waren in *volkomen* overeenstemming met de verwachtingen. De nieuwe eerste groep bestaat uit 34 platen, waarvoor de galactische breedte van 't centrum $> 20°$ is; de 21 overige platen vormen de nieuwe tweede groep. Evenals curve I van fig. 1 vertoont de curve die voor de platen van de nieuwe eerste groep 't verloop van de grensgrootte aangeeft, een maximum, doch terwijl de oude curve daalde tot —54, daalt de nieuwe slechts tot —48. In onderstaande tabel zijn voor de oude en voor de nieuwe groep I de verschillen gegeven, die men krijgt, door de grensgrootte op 30,50 ... 130 mM. van 't centrum met de grensgrootte in 't centrum te verminderen:

	30	50	70	90	110	130
oude groep I	+ 2	— 16	— 37	— 44	— 50	— 54
nieuwe groep I	+ 3	— 13	— 32	— 39	— 46	— 48

Hieronder volgen deze verschillen voor de platen der oude derde en der nieuwe tweede groep:

	30	50	70	90	110	130
oude groep III	— 6	— 22	— 46	— 62	— 87	— 95
nieuwe groep II	— 10	— 25	— 48	— 62	— 83	— 96

Bij deze nieuwe indeeling zijn noch de platen van de eerste noch die van de tweede groep voor den invloed van de galactische condensatie gecorrigeerd. Men mag trouwens verwachten, dat deze correctie op de afstandscorrectie voor de eerste groep *geen* invloed zal uitoefenen; voor de tweede groep zal deze correctie natuurlijk getallen moeten opleveren, die nagenoeg niet verschillen van de onderste rij getallen uit de eerste tabel (pag. 972). Men kan dus voor de beide nieuwe groepen 't beloop van de zuivere afstandscorrectie, ontdaan van den invloed der galactische condensatie, vinden uit de volgende tabel:

	30	50	70	90	110	130
nieuwe groep I	+ 3	— 13	— 32	— 39	— 46	— 48
nieuwe groep II	— 6	— 19	— 40	— 52	— 72	— 79

Op grond van 't bovenbeschreven onderzoek meen ik de volgende conclusies te mogen trekken:

1°. De platen van de *Harvard Map of the Sky* moeten, wat de afname van de grensgrootte van 't centrum naar den rand betreft, in twee groepen verdeeld worden. Als criterium voor deze indeeling geldt *niet* de gemiddelde dichtheid der platen, doch uitsluitend de galactische breedte van haar centrum.

2°. Voor de platen, waarvan 't centrum *buiten* den Melkweg ligt, neemt de grensgrootte eerst toe tot op ongeveer 16 mM. van 't centrum; daarna neemt ze weer af. Voor de platen, waarvan 't centrum *in* den Melkweg ligt, neemt de grensgrootte direct af; bovendien is deze afname grooter dan voor de platen buiten den Melkweg.

3°. De verschijnselen, onder 1°. en 2°. genoemd, zijn waarschijnlijk een gevolg van 't z.g. „phaenomeen van KAPTEYN."

Gouda, Januari 1919.

Physiologie. — De Heer VAN RIJNBERK biedt eene mededeeling aan van mej. CH. BASTERT: „*Eenige waarnemingen over de adembeweging bij Petromyzon fluviatilis.*" (Mededeeling uit het Physiol. Lab. der Universiteit te Amsterdam).

(Mede aangeboden door den Heer SLUITER).

Prof. V. WILLEM bracht me op de gedachte, om bij eenige exemplaren van Petromyzon, die in het laboratorium aanwezig waren, de ademhalingsbewegingen na te gaan, omdat hierover niet veel zekere gegevens zijn, en het ademtype door de bijzondere levenswijze, een wijziging moet hebben ondergaan.

LITERATUUR.

T. HOME [1]) ziet dat in- en exspiratie door de kieuwen plaats heeft. Een deel van het ademwater treedt in de kieuwdarm. De neusopening laat geen ademwater uit, omdat deze niet met de kieuwen in gemeenschap staat.

G. CANIS [2]). De neusopening dient niet voor het uitlaten van ademwater.

P. BEST [3]). Ziet de in- en exspiratie door de kieuwen gaan, ook door den neus. Zelden gaat tegelijkertijd een waterstroom door den bek naar binnen.

H. A. PAGENSTECKER [4]). Mond en neusopening hebben geen respiratorische functie.

J. CUNNINGHAM [5]). Ziet de ademstroom bij een exemplaar dat geheel in het slijk is ingegraven door den neus gaan.

E. CONVREUR [6]). Bij een niet vastzittend dier wordt de inspiratie veroorzaakt door het naar voren brengen van de tongspier en het

---

[1]) Uber den Bau der Atmungswerkzeuge in Tieren, welche zwischen den Fischen und Würmen zu stehen scheinen. Philos. Transactions. 1815.

[2]) Uber einige Eigentümlichkeiten im Bau der Lamoseten. Meckels Deutsch. Arch. f. Physiol. Bd. 2. 1816.

[3]) Leçons sur la physiologie comparée de la respiration. Paris 1870.

[4]) Allgemeine Zoologie. Bd. 2. Berlin 1880.

[5]) On the structure and development of the redroductive elements in Myxine glutinosa. Quart. Journ. Micr. Sc. 2. Vol. 27. 1888.

[6]) Etudes sur la respiration des poissons. (Ann. de la Soc. de Lyon). 1897.

vergrooten van de kieuwholte, terwijl de uitwendige kieuwen open zijn. Bij de exspiratie wordt de tong teruggetrokken, de kieuwholte verkleind en de kleppen van den kieuwdarm worden gesloten. Soms wordt er water door den bek uitgestooten wat echter niet met de ademhaling in verband staat. Bij een vastzittend dier doet de tongspier niet mee. De exspiratie is dan actief, de inspiratie passief.

J. Dawson[1]). Inspiratie heeft ook plaats door verwijding van den neusblindzak, veroorzaakt door het uitzetten van den kieuwdarm. Het water stroomt door kieuwen en neus in en uit. De kieuwkleppen doen geen dienst maar flotteeren vrij bij een vastzittend dier.

Wil het zich losmaken dan worden de kleppen gesloten en wordt er door samentrekken van den kieuwdarm, water in de mondopening geperst, waardoor het vacuum hier wordt opgeheven. Bij de voeding wordt de kieuwdarm door kleppen gesloten.

S. M. Gage[2]). Petromyzon neemt ook de *O* uit het bloed op, dat als voedsel wordt gebruikt. In de oesophagus wordt het omgezet in methaemaglobin. De larve leeft niet parasitair; maar ingegraven in het zand; en ademt door den bek, terwijl het ademwater door de kieuwen uittreedt.

Bij de inspiratie worden de kleppen vóór de kieuwopening door het water gesloten en kan dit water dus alleen door den bek binnenkomen. Op de grens van kieuwdarm en bek ligt een velum, dat men door het lichaam heen kan zien schemeren.

Dit velum dient 1° als diaphragma om de kieuwdarmholte te verkleinen en te vergrooten, 2° verhindert het dat bij exspiratie het water uit den mond wordt geperst door de beweging van dit velum naar voren toe. Hij verklaart hiermee ook dat er een constante stroom door den bek gaat, en een afgebroken stroom uit de kieuwopeningen. Bij het volwassen dier heeft de in- en exspiratie door de kieuwopeningen plaats. De klep die de branchioporus bij de larve bij inspiratie afsloot, is hier zóó klein geworden, dat er twee nieuwe bij komen, die een trechter vormen en zóó de richting van de in- en exspiratie bepalen. Het velum doet geen dienst meer.

H. Winterstein[3]). Ziet bij Petromyzon plancisi den ademstroom van den mond naar de kieuwen gaan, bij het volwassen dier.

A. Kuljabko[4]) registreert de adembeweging en den hartslag aan

[1]) The breathing and feeding mechanism of the lampreys. Bibl. Bull. Words Holl. Vol. 9, p. 1, 1905.

[2]) The lake and trosk Lampreys of New-York, 1893.

[3]) Handbuch Vergl. Physiol., 1913.

[4]) Quelques experiences sur la suivre prolongée de la tête isolée des poissons. Arch. intern. de physiol., T. 4, 1907.

afgesneden Petromyzon-koppen die met Locke vloeistof doorstroomd worden.

Waarnemingen.

In het bassin van beton, waarin Petromyzon gehouden werd, leefde ze meestal vastgezogen aan den bodem of de wanden, bij uitzondering slechts zag ik ze rondzwemmen. Steeds zoeken ze den donkersten hoek van het bassin.

Het normaal aantal ademhalingen bij vastzittende dieren is 80—100 per min. Zwemmen ze slechts zeer korten tijd rond, dan worden de ademhalingen al aanmerkelijk versneld tot 150—180 per min.

Veel van de proefdieren werden door het vangen en het verblijf in een ondiepen bak met weinig water, dysphoeïsch, wat ook aan de curven te zien is.

Bij eenige vastzittende exemplaren werd wat door carmijn gekleurd water met behulp van een pipetje, tegen de kieuwopeningen gespoten. Steeds kwam na korten tijd, het roodgekleurde water weer door dezelfde opening naar buiten. Dit wijst erop, dat in- en exspiratie door de kieuwen gaat, en er geen spoedige verbinding tusschen de kieuwen onderling is.

Carmijnwater bij den bek gebracht werd nooit naar binnen gezogen, ook niet bij vrijrondzwemmende dieren.

Hetzelfde werd nu herhaald bij de neusopening van een geheel onder water vastzittend dier. Ook hier kwam steeds na eenigen tijd het roode water als kleine rookkringetjes weer naar buiten. Ook hier dus in- en exspiratie.

Nooit kwam gekleurd water dat tegen de kieuwopening was gespoten, door de neusopening naar buiten, of omgekeerd.

Bij nauwkeurige beschouwing blijkt dat er tusschen kieuw- en neusbeweging een synchronisme bestaat.

Fig. I, lengte doorsnede, laat zien dat de neusopening *a* overgaat in een kanaal *b* dat zich verwijdt tot een zak *c*. Deze zak loopt tot

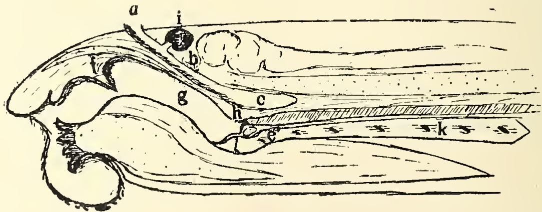
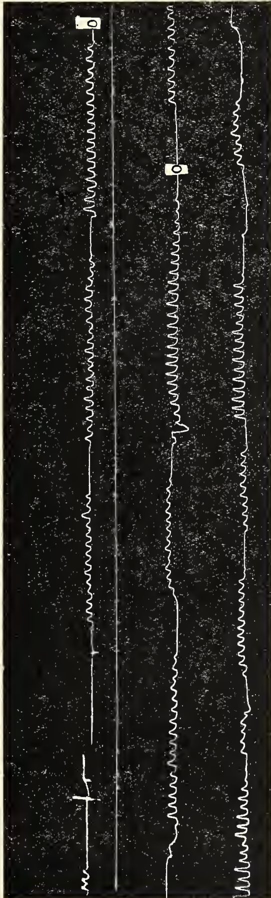
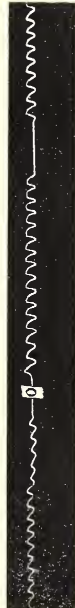


Fig. 1.

voorbij de eerste inwendige kiemopening *e*. Deze zak (hypophysiszak Goodrich) is op de meeste plaatsen door een kraakbeenboog *f* gescheiden van de mondholte *g*. Op de plaats *h* ontbreekt deze boog echter en is er slechts een vliezige, makkelijk beweegbare scheiding. Een zijkanaaltje van de hypophysiszak voert naar het eigenlijk reukorgaan *i* dat vlak tegen de hersens aan ligt.



Curve I.



Curve II.

De kieuwdarm *k* is door het velum *l* met franjevormig aanhangsel gescheiden van den bek.

Bij alle exemplaren ligt dit velum tegen den slokdarm gedrukt, zoodat deze afgesloten is van de mondholte en daardoor op dwarse doorsnee slechts als een nauwe spleet te zien is. Kieuwdarm en mondholte staan met elkaar in verbinding, de franjevormige aanhangsels hangen er alleen voor. Gaat nu een waterstroom van kieuwdarm naar mond, dan worden de franjes opgetild en tegen den slokdarm geslagen, gaat er een stroom van mond naar kieuwen, dan wordt het water gefiltreerd door de franje. Bij het slikken, wordt het velum naar beneden gedrukt.

Ik bracht nu een glazen buisje, dat door middel van een gummislang met een trommel van Marey was verbonden tegen de kieuwopening (branchioporus). Door voorzichtig de buis van de kieuwopening weg te nemen viel de hefboom tot op de nullijn.

Het blijkt dat de druk in de kieuwen onder en boven de nullijn komt, dat er dus afwisselende in- en exspiratie is. Curve I.

In sommige gevallen bleef de kromme onder de nullijn, dit werd veroorzaakt, doordat de tube krachtig tegen de brachioporus werd gedrukt en de opening door de kleppen werd afgesloten. Curve II.

Vóór de brachioporus staan nl. twee kleppen, een in horizontale en een in vertikale richting.

Daarna werd de ademhalingsbeweging zelf geregistreerd door een licht aluminium hefboompje, waardoor de horizontale adembeweging in een vertikale werd overgebracht. Fig. 2, Curve III.

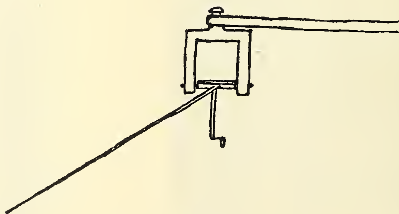


Fig. 2.

Vervolgens heb ik na eenige moeite een tube in de mondopening gebracht; er bleek ook hier een drukschommeling te bestaan, die onder en boven de nullijn kwam. Curve IV. Dit wijst erop dat kieuw- en mondopening met elkaar communiceeren.

Een vergelijking van de twee drukcurven (I en IV) toont dit nog duidelijker.

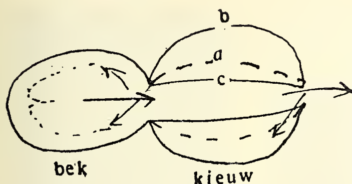


Fig. 3.

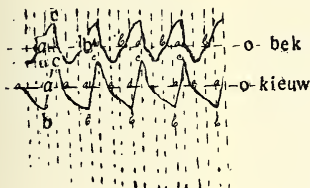


Fig. 4.

Noemen we den ruststand van de kieuwen *a*; de grootste verwijding (inademing): *b*; en het samentrekken (uitademen) *c*; dan is duidelijk dat de druk in de kieuwholte in ruststand gelijk is aan de buiten lucht (nullijn) en bij inademing negatief wordt· Fig. 3 en 4.

Nu stroomt dus water van uit den mond en de omgeving naar de kieuwen toe, zoodat de druk in den mond verminderen zal. Bij de uitademing wordt water uit de kieuwen geperst naar mondholte en omgeving, zoodat de druk in de mondholte vermeerdert.

Inademen geeft dus eerst drukvermindering in de mondholte, daarna vermeerdering tot ongeveer nul. Uitademing geeft drukvermeerdering tot den top *c*.

Doordat de mondholte meedoet bij de ademhaling, ontstaat er een stroomrichting in het ademwater, waardoor het innige contact met de kieuwlamellen sterk bevorderd wordt.

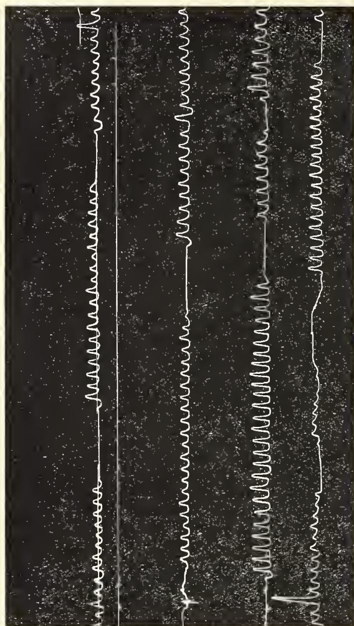
Door de drukschommeling in de mondholte is ook de adembeweging in het neuskanaal te verklaren. Dit kanaal wordt n.l. passief van uit de mondholte vernauwd en verwijd en veroorzaakt zóó een in- en exspiratie die synchroon gaat met de kieuwbeweging.

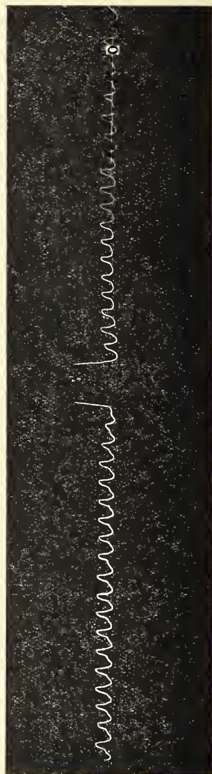
Waarschijnlijk heeft dit kanaal geen respiratorische functie, misschien dient de waterstroom om geuren naar het reukorgaan te brengen. Het is me echter niet gelukt dit aan te toonen.

Samenvattend zien we: dat Petromyzon, in volwassen toestand, zoowel vrijzwemmend als vastzittend, in- en exspiratie door de kieuwen heeft.

Enkele keeren wordt wat water door den bek naar buiten gespoten, vooral nadat het dier eenigen tijd onrustig heeft rondgezwommen hoesten curve IV).

Het velum sluit den slokdarm af en filtreert het ademwater dat van bek naar kieuwen stroomt.


Curve III.



Curve IV.

De vergrooting en verkleining van het neuskanaal, waardoor hier een waterstrooming ontstaat, is passief en wordt veroorzaakt door drukschommeling in de mondholte. Ze gaat synchroon met de kieuwbeweging.

Scheikunde. — De Heer P. Zeeman biedt, namens den Heer A. Smits, een mededeeling aan getiteld: „*Het verschijnsel electrische overspanning*". II.

(Mede aangeboden door den Heer S. Hoogewerff).

In de eerste mededeeling over het verschijnsel electrische overspanning is de overspanning van de waterstof enz. beschouwd die aan onaantastbare electroden optreedt bij het doorleiden van een electrischen stroom. Thans zullen wij het verschijnsel van overspanning bespreken bij de waterstof-ontwikkeling, die optreedt, wanneer metalen op water of oplossingen van zuren inwerken zonder de hulp van den electrischen stroom, *dus zonder toevoer van electronen van buiten.*

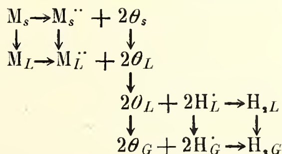
Bij de bespreking van de waterstofontwikkeling bij dompeling van zink in een zure zinkzout-oplossing werd reeds aan de hand van de nevenstaande figuur 1 het volgende opgemerkt.

Wanneer zink ($M^{\cdot\cdot}$) wordt gebracht in een vloeistof van de samenstelling x_1, dan kan het zink met deze oplossing electromotorisch in evenwicht zijn, doch slechts metastabiel, bij een electrische potentiaal, aangegeven door de stippellijn *gf*.

In dit geval zou echter geen waterstof-ontwikkeling op mogen treden.

Het metaal zink werkt echter wèl op de hier ondersteld vloeistof in en er ontwikkelt zich waterstof, waardoor een *driephasen-evenwicht* ontstaat, bestaande uit een waterstofhoudende metaalphase, een waterstofphase en de electrolyt, waarbij moet worden in het oog gehouden, dat door wat men hier aangeeft met electrolyt, de vloeistofphase *in de grenslaag* wordt bedoeld. Bij inwerking van het metaal op den electrolyt zal de samenstelling van de vloeistof in de grenslaag verschillen van die van de vloeistof buiten de grenslaag.

Tengevolge van de plaats grijpende reacties



zal de vloeistof in de grenslaag armer aan waterstof-ionen en rijker aan zink-ionen zijn, dan de electrolyt buiten de grenslaag.

Wanneer het metaal zich nu ook bij snel oplossen oppervlakkig in innerlijk evenwicht stelt, zal de metaalphase op *ad* liggen of op

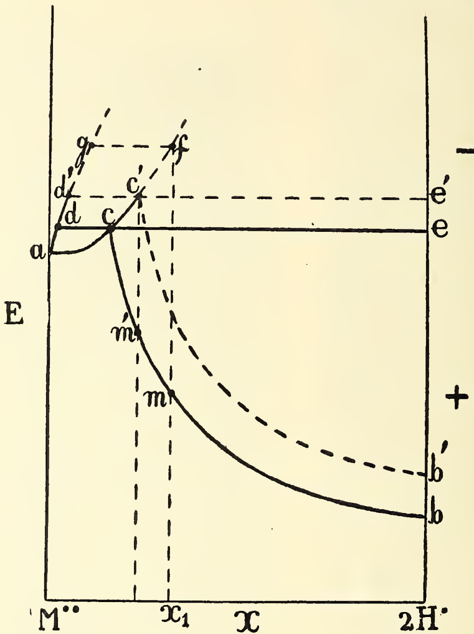


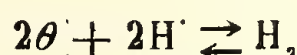
Fig 1

het verlengde van deze lijn, omdat de verschillende punten van deze kromme en haar verlengde voorstellen innerlijke evenwichts-toestanden van het metaal, in electromotorisch evenwicht met electrolyten die op de lijn *ac* of haar verlengde gelegen zijn.

Als niet alleen de metaalphase maar ook de waterstofphase van het zooeven genoemde driephasen-evenwicht in innerlijk evenwicht verkeert, moet de metaalphase in *d*, de waterstofphase in *e*, en de electrolyt in de grenslaag in *c* gelegen zijn, terwijl de electrolyt buiten de grenslaag de samenstelling x_1 bezit. De zink-ionen zullen

dus voortdurend uit de grenslaag naar buiten diffundeeren en de waterstof-ionen in tegenovergestelde richting van buiten in de grenslaag.

Laten wij nu allereerst onderstellen, dat het metaal zich zéér snel in innerlijk evenwicht stelt, doch de waterstof niet. Dit zal zich kunnen voordoen, wanneer het metaal ook bij snelle uitzending van ionen en electronen zijn innerlijk evenwicht handhaaft, terwijl het innerlijk evenwicht



$$2\theta + 2H^{\cdot} \rightleftarrows H_2$$

zich niet snel genoeg instelt, zoodat een gasphase ontwijkt, die te veel electrisch geladen deeltjes d. w. z. te veel ionen en electronen bevat of m. a. w. in *onedele richting* is verstoord. In dit geval zal het driephasen evenwicht: metaalphase-grensvloeistof-waterstofphase aangegeven worden door bv. de drie punten $d'c'e'$.

Wanneer de electrische potentiaal van dezelfde verstoorde waterstofphase gemeten kon worden t. o. v. electrolyten van andere waterstof-ionen concentratie dan c', dan zou de lijn $b'c'$ de electrolyten aangeven, die, bij verschillende electrische potentialen, met dezelfde verstoorde waterstof kunnen koëxisteeren.

Thans zullen wij het geval beschouwen, dat het innerlijk even-

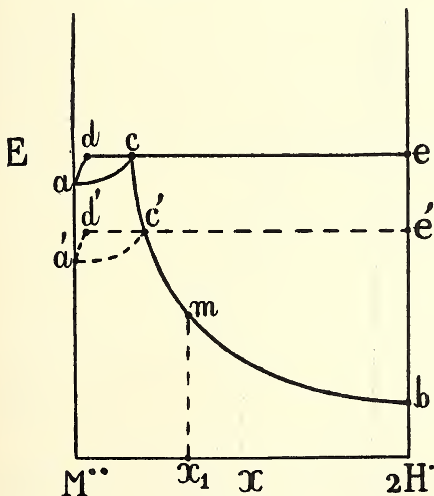


Fig 2

wicht zich bij de waterstof zéér snel instelt, doch dat het metaal wordt verstoord. Daâr hier wordt ondersteld dat het metaal vrij snel oplost zal de vloeistof in de grenslaag ook hier afwijken van die buiten de grenslaag met de samenstelling x_1. De waterstofphase is in innerlijk evenwicht, zoodat de koëxisteerende vloeistof een punt moet zijn van de lijn *bc*. De verstoorde metaalphase is veredeld en heeft dus een minder negatieve electrische potentiaal. Stel dat deze metaalphase wordt aangegeven door *d'* dan worden de drie koëxisteerende phasen voorgesteld door de punten *d'c'e'* en het lijntje *a'c'* heeft alleen beteekenis voor het geval dezelfde verstoorde metaalphase ook met andere electrolyten dan *c'* zou kunnen koëxisteeren.

Nu blijft er nog een derde mogelijkheid over, n.l. deze, dat noch de metaalphase, noch de gasphase zich met voldoende snelheid in innerlijk evenwicht stellen. In dit geval zal dus het metaal te weinig ionen en electronen bevatten, waardoor zijn electrische potentiaal minder negatief is geworden, terwijl de waterstofphase te veel ionen en electronen bevat, met dit gevolg, dat haar potentiaal een meer negatieve waarde heeft verkregen.

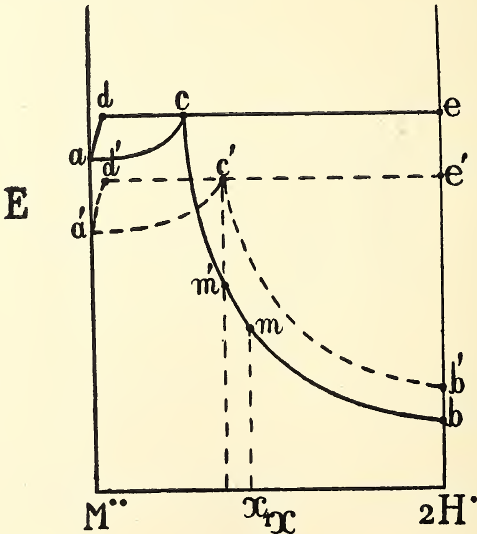


Fig. 3

Het metaal wordt dus in dit geval *veredeld*, maar de waterstof *veronedeld*.

Het is nu de vraag, bij welken potentiaal het driephasen-evenwicht zal liggen.

Wanneer de verstoring van het metaal veel grooter is dan die van de waterstof, dan zal de driephasen-potentiaal hoogstwaarschijnlijk minder negatief zijn dan bij innerlijk evenwicht van metaal en waterstofphase; is echter de verstoring van de waterstof zeer groot, dan is het mogelijk, dat deze verstoring het wint en dat de driephasen-potentiaal negatiever is dan bij innerlijk evenwicht. In de voorgaande teekening, Fig. 3, is het eerste ondersteld.

Het is duïdelijk, hoe wij bij deze beschouwingen geleidelijk worden gevoerd tot het geval dat zich bij Nikkel voordoet.

Daar wordt het metaal verstoord en de waterstof is door haar uiterst langzaam, niet waar te nemen ontwikkeling steeds in innerlijk evenwicht. Door de uiterst geringe inwerking is de samenstelling van de grensvloeistof practisch niet verschillend van die buiten de grenslaag, zoodat de vloeistofphase van het driephasen-evenwicht

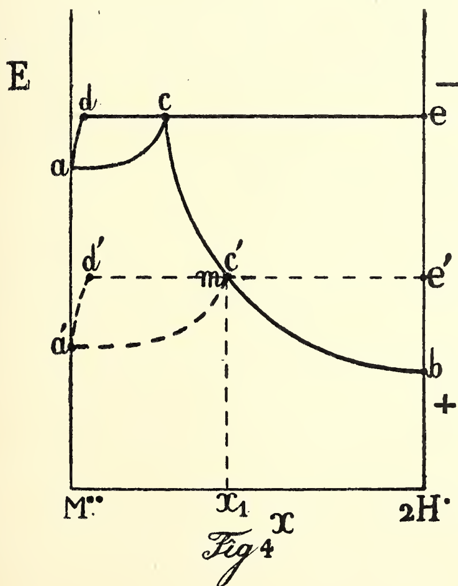


Fig 4

aangegeven zal worden door het punt *m*, zoodat de driephasen-potentiaal samenvalt met de potentiaal van de waterstof-electrode, zooals reeds vroeger werd aangetoond.

Uit de hier gegeven beschouwingen blijkt nu ten duidelijkste, dat men niet mag zeggen, dat, wanneer de waterstof zich aan een metaal ontwikkelt bij een potentiaal die onedeler is dan die van de waterstof-electrode, de waterstof het verschijnsel van overspanning vertoont, Fig. 2 heeft b.v. betrekking op dit geval; hier is de ontwikkelde waterstof niet overspannen, omdat de vloeistof in de grenslaag ligt op de lijn *bc*. Het punt *c'* ligt wel is waar boven *m*, doch dit is alleen daaraan toe te schrijven, dat, door het oplossen van het metaal, de samenstelling van de vloeistof, in de grenslaag, een andere is dan daar buiten.

In de gevallen aangegeven door de Figuren 1. en 3 is de waterstof wel overspannen, maar die overspanning is niet gelijk aan het potentiaal verschil tusschen de potentiaal van de ontwikkelende waterstof en de waterstof-electrode, want om de overspanning te weten te komen zou men de waterstof-electrode ook in de grenslaag van het oplossende metaal moeten hebben.

Uit genoemde figuren, 1 en 3, is de werkelijke overspanning af te lezen, deze is niet de afstand van het punt *m* tot de horizontale lijn *d'e'* doch gelijk aan den afstand *m'c'*.

Algem. en Anorg. Chemisch Laboratorium der Universiteit.

Amsterdam, 20 Januari 1919.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt een mededeeling aan van den Heer F. E. C. SCHEFFER: *„Over metastabiele ontmenging en de classificatie van binaire stelsels"*.

(Mede aangeboden door den Heer JAEGER).

1. In het onlangs verschenen werk over systemen met twee vloeibare phasen bespreekt BÜCHNER in § 4 de verschillende ruimtefiguren van stelsels, waarin behalve twee vloeistoflagen tevens verbindingen optreden [1]). Hij beschouwt daarbij achtereenvolgens de stelsels met quadrupelpunten VL_1L_2G ($V =$ verbinding) en die, welke overeenstemming in gedrag vertoonen met het door BÜCHNER uitvoerig onderzochte stelsel diphenylamine-koolzuur.

In mijn onlangs verschenen verhandeling over de phenyl- en tolylcarbaminezuren [2]) heb ik er op gewezen, dat de stelsels aniline, resp. toluïdinen-koolzuur tot de door BÜCHNER eerst besproken categorie behooren en dat door geschikte keuze van de homologen van aniline een overgang kan optreden in het tweede door BÜCHNER besproken geval. Dit laatste heb ik echter aangeduid als het type zwavelwaterstof-ammoniak. Naar aanleiding hiervan zij het volgende opgemerkt.

2. In alle stelsels, waarin een driephasenlijn SLG de kritische lijn snijdt is een gedeelte van de laatstgenoemde niet stabiel en dus, wanneer vertragingen niet mogelijk zijn, niet realiseerbaar. Dit niet realiseerbare deel van de kritische lijn kan nu òf geheel metastabiel òf gedeeltelijk metastabiel, gedeeltelijk labiel zijn. Het één noch het ander is direct experimenteel na te gaan.

In het door SMITS onderzochte stelsel aether-anthrachinon is tot nu toe steeds aangenomen, dat de kritische lijn geen keerpunten bezit en dus in het onbestendige gebied geen ontmenging optreedt [3]); in het door BÜCHNER onderzochte stelsel diphenylamine-koolzuur wordt echter aangenomen, dat de kritische lijn twee keerpunten in het onbestendige gebied bezit. In het stabiele gebied vertoonen beide systemen echter volkomen analoog gedrag. Reden om in het éene

[1]) BAKHUIS ROOZEBOOM, Heterogene Gleichgewichte. II. 2. (1918) S. 184. u. f.
[2]) Deze Verslagen. **27**. 297. (1918/19).
[3]) BAKHUIS ROOZEBOOM. Heterogene Gleichgewichte II. 1. (1904). S. 378 u. f.

stelsel geen, in het andere wel metastabiele ontmenging aan te nemen is de loop van de kritische lijn in het stabiele gebied; in het éene geval is het mogelijk de beide stabiele deelen van de kritische lijn door een gelijkmatig verloopende kromme te verbinden; in het andere zou de kritische lijn een eigenaardig steil verloop moeten hebben met een sterk uitgesproken maximum. Dit laatste wordt minder waarschijnlijk geacht en kan ook ongedwongen verklaard worden door aan te nemen, dat de kritische lijn twee keerpunten bezit. Ik wil er echter op wijzen, dat bij het stelsel aether-anthrachinon ook metastabiele ontmenging in het onbestendige gebied mogelijk is en dat voor het stelsel diphenylamine-koolzuur de metastabiele ontmenging niet is bewezen, maar alleen waarschijnlijk gemaakt. Een scherpe classificatie van deze typen van binaire stelsels is dus onmogelijk.

Een dergelijk geval doet zich nu bij het stelsel zwavelwaterstof-ammoniak voor[1]). Ik heb bij dit onderzoek theoretisch nagegaan, welke verschijnselen in het stabiele gebied optreden, wanneer een kritische lijn de driephasenlijn VLG snijdt; een beschouwing over metastabiele ontmenging was daarbij niet noodzakelijk, omdat uit den aard der zaak alle verschijnselen in het stabiele gebied uit een systeem zonder ontmenging kunnen worden afgeleid. Gaat men nu de experimenteele resultaten van dit onderzoek na, dan blijkt, dat de kritische lijn, wanneer ze geen keerpunten in het onbestendige gebied bezit, evenals die in het systeem diphenylamine-koolzuur een zeer steil verloop moet hebben. (Ik heb dat in mijn dissertatie ook graphisch aangegeven). Op dezelfde gronden, die in het systeem diphenylamine-koolzuur tot het bestaan van twee keerpunten in de kritische lijn doen besluiten, kan men het stelsel zwavelwaterstof-ammoniak ook tot de stelsels met ontmenging rekenen. Daar dit systeem m. i. dan het meest uitvoerig onderzochte voorbeeld van dergelijke stelsels zou zijn, waarin behalve ontmenging een verbinding optreedt, heb ik in de geciteerde verhandeling het tweede door Büchner besproken geval als het type zwavelwaterstof-ammoniak aangeduid.

1 December 1918. *Delft. Techn. Hoogeschool.*

[1]) Dissertatie Amsterdam. 1909. Zeitschr. f. physik. Chem. 71. 214 en 671 (1910).

Natuurkunde. — De Heer J. D. VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van den Heer J. D. VAN DER WAALS Jr.: *„Over de theorie der Brownsche beweging. Naschrift".*

(Medeaangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

In deze verslagen brengen L. S. ORNSTEIN en H. C. BURGER[1]) eenige bezwaren in, tegen een door mij[2]) ontwikkelde theorie der Brownsche beweging. Ik wil eenige ervan hier in het kort bespreken.

I. Het eerste berust geheel op een misverstand. Het geldt een berekening van $x - x_0 = \Delta =$ de in zekeren *gemeten* tijd t verkregen *gemeten* uitwijking van een gesuspendeerd deeltje. Ik laat bij het opmaken van de middelbare waarde van deze grootheid een term met het product[3]) $\overline{\dot{x}_0 w(t)}$ weg, omdat dit gemiddelde nul zal zijn. O. en B. meenen nu, dat ik bedoel dat de vergelijking

$$\overline{\dot{x}_0\, w(t)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

zal gelden voor iedere waarde van t. Zij maken daartegen terecht bezwaar en toonen aan, dat dit tot ongerijmde uitkomsten zou leiden. Mijn bedoeling was echter, dat deze vergelijking slechts zou gelden voor tijden die voldoende groot zijn. Zij drukt geheel hetzelfde uit, wat O. en B. aangeven in de graphische voorstelling op pag. 409 l.c., n.l. dat $\overline{w(t)}^{u(0)}$ [4]) voor t groot weer tot nul nadert. Dat de tijden, waarin de

[1]) L. S. ORNSTEIN en H. C. BURGER. Deze Verslagen XXVII, p. 407, Sept. 1918.

[2]) J. D. VAN DER WAALS JR. Deze Verslagen XXVI, p. 1317, Febr. 1918.

[3]) Hierin stelt w de kracht voor, die op het deeltje werkt. Vergelijking (1) gelijkt iets op de vergelijking

$$\overline{u\,(t)\,\frac{du(t)}{dt}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1a)$$

welke herhaaldelijk door mej. SNETHLAGE en mij gebruikt is, bij onze beschouwingen over de Brown'sche beweging, en o.a. wordt afgeleid door de vergelijking $\overline{\{u\,(t)\}^2} =$ constant naar t te differentieeren. De vergelijkingen (1) en (1a) berusten echter op zeer verschillende overwegingen en worden op verschillende wijze gebruikt, zoodat zij vooral niet verward moeten worden.

[4]) Een streep boven een grootheid geeft een gemiddelde aan. Staat er geen index bij dan is over alle gesuspendeerde deeltjes gemiddeld. Een index als hier de $u(o)$ achter de streep duidt aan, dat het gemiddelde is genomen over alle deeltjes, die op het oogenblik $t = 0$ de bepaalde snelheid $u\,(o)$ hadden.

waargenomen uitwijkingen bereikt worden, groot genoeg zijn om voor *die* waarden van t de vergelijking te mogen aannemen, is bekend. Uit dat oogpunt kan tegen mijn afleiding dus geen bezwaar bestaan [1]).

II. Een tweede bezwaar van O. en B. geldt mijn bewering l.c. p. 1323 en p. 1331, dat hoogst waarschijnlijk de vergelijking

$$Q \equiv \overline{w(t_1)\int_0^{t_1} w(\vartheta)(t_1-\vartheta)\,d\vartheta} < 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

zal gelden. Ik leid dit af uit de overweging, dat $w(t)$ zal voldoen aan de voorwaarde:

$$\overline{\int_0^{t_1} w(\vartheta)\,d\vartheta}^{\,w(t_1)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

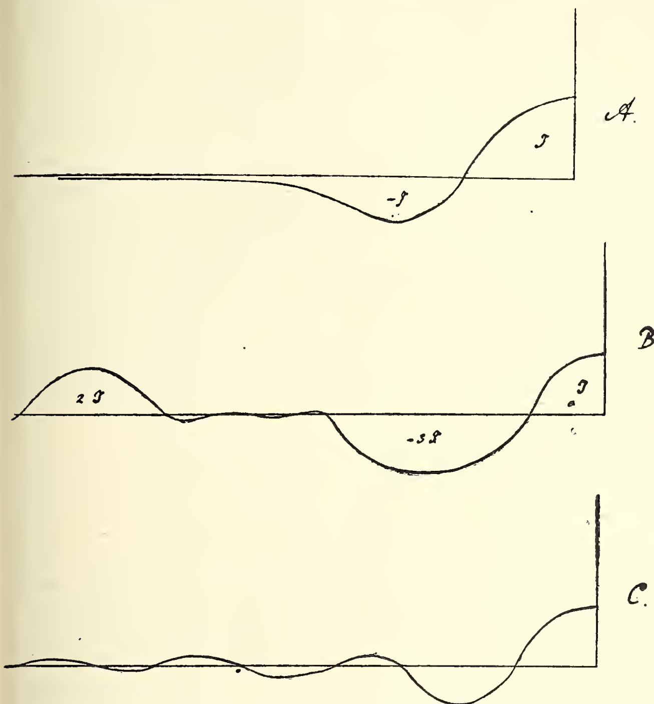
O. en B. zullen nu bewijzen, dat dit onjuist is. Zij ontwikkelen daartoe $w(t)$ in een reeks van Fourier. Nu zou men zeggen, dat de volgende stap, dien zij te doen hadden, was te onderzoeken welken invloed de voorwaarde (3) op de middelbare waarde der coëfficiënten van die reeks zou hebben. Zij spreken echter niet over vergelijking (3) en onderwerpen de coëfficiënten aan geen enkele voorwaarde en zij komen *dan* tot de conclusie, dat Q evengoed positief als negatief zou kunnen zijn. Nu is het aan geen twijfel onderhevig, of, als men $w(t)$ aan geen enkele voorwaarde onderwerpt, het teeken van Q evengoed $+$ als $-$ zou kunnen zijn. Er is geen reeksontwikkeling volgens Fourier noodig om dit aan te toonen. Maar de invloed, die de voorwaarde (3) op dit teeken heeft, blijft bij O. en B. toch wel geheel in het duister.

---

[1]) Hoezeer de Heeren O. en B. zich in mijne bedoeling vergissen blijkt wel op merkwaardige wijze hieruit, dat zij eensdeels, wanneer zij meenen mijn inzichten weer te geven, herhaaldelijk stellingen verkondigen, met mijn bedoeling in tegenspraak, maar dat zij anderdeels, waar zij door het teekenen van bedoelde graphische voorstelling op pag. 409 hunner verhandeling meenen in tegenspraak met mijn theorie te zijn, in waarheid niets anders doen dan een verloop van $\overline{w(t)}^{u(o)}$ in teekening brengen, geheel in overeenstemming met wat ik, gedeeltelijk in samenwerking met mej. Snethlage, aangaande deze grootheid heb verkondigd.

Dat deze kromme met de waarde 0 begint geven O. en B. toe, dat door ons terecht is uiteengezet. Dat ik ook voor groote waarde van t de waarde 0 aan $\overline{w(t)}^{u(o)}$ toeken blijkt uit de zooeven besproken vergelijking (1). Dat verder bij $u(o) > 0$ de waarde van $\overline{w(t)}^{u(o)}$ voor kleine waarden van t negatief wordt, is reeds in de 1e verhandeling van mej. Snethlage en mij over de Brownsche beweging

Wil men nu dezen invloed nagaan, dan moet erkend worden, dat de voorwaarde (3) alleen, niet op mathematisch strenge wijze tot het negatieve teeken voert. Mijn pretensie l. c. was dan ook



aangegeven in de woorden: indien een deeltje een snelheid u in de x-richting heeft, is de gemiddeld erop werkende kracht nul. Er zal echter over een kleine tijd t een kracht op gaan werken, gemiddeld tegengesteld aan u, die deze snelheid uitput. Ten slotte komt *l. c.*, pag. 1330, de vergelijking voor:

$$\overline{\int_0^t w(\vartheta)\, d\vartheta}^{\,\dot{x}_0} = - \dot{x}_0$$

welke naar ik daar aangeef zal gelden voor niet *te* kleine waarden van t en welke toch bezwaarlijk te rijmen is met de onderstelling $\overline{\dot{x}_0\, w(t)} = 0$ voor iedere waarde van t.

slechts het negatief zijn van het teeken „hoogst plausibel" te maken.

Indien de kromme, die $\overline{w(t)}^{w(t_1)}$ als functie van t voorstelt slechts één keer van teeken verwisselt en dus een gedaante van het type van fig. A p. 991 vertoont, is het teeken zeker negatief. Maar wanneer, zooals niet is uitgesloten, $\overline{w(t)}^{w(t_1)}$ meerdere malen van teeken wisselt is (3) niet voldoende om streng tot het negatieve teeken te leiden. Mogelijk is dit met behulp van een analyse volgens FOURIER aan te toonen, maar eenvoudiger is het af te leiden uit fig. B, waar een verloop van de kromme is geteekend, dat wèl aan (3) voldoet en toch een positieve waarde van Q oplevert. Niemand zal echter een dergelijk verloop aannemen. Indien de kromme meer dan één teekenwissel vertoont, zal zij wel door een sterk gedempte slingerlijn van het type van fig. C worden voorgesteld, waarbij het feit, dat zij met een positief stuk eindigt bij $w(t)$ en aan de voorwaarde (3) voldoe het negatieve teeken voor Q toch wel zeer waarschijnlijk maakt.

III. Een van de voornaamste bezwaren van O. en B. geldt nog steeds het feit, dat Mej. Dr. SNETHLAGE en ik herhaaldelijk gebruik maakten van de drie met elkander in verband te beschouwen vergelijkingen:

$$\frac{1}{m}\frac{d\mathfrak{R}_x}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} = -p\,u(t) + q(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$p = \frac{1}{m}\frac{\overline{\mathfrak{R}^2(t)}}{\overline{u^2(t)}} = \text{constant} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\overline{u(t)\,q(t)} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

O. en B. beweren, dat hieruit volgt, dat $\overline{u^2}$ niet constant kan zijn. Gaan wij nu deze vergelijkingen na, dan zien wij, dat (4) niet anders wil zeggen, dan dat wij voor een bepaald deeltje $\frac{d^2u}{dt^2}$ nemen en daar pu bij optellen (p = een positieve, voorloopig onbepaald gelaten constante). Daar u een functie van t is zal ook deze som dit zijn en kunnen wij haar door $q(t)$ voorstellen. Zoo opgevat geldt deze vergelijking natuurlijk niet slechts voor een bepaald oogenblik $t = 0$, zooals ORNSTEIN beweert, maar voor ieder oogenblik. Het is een gewone differentiaal vergelijking en zij kan zonder bezwaar geïntegreerd worden, ofschoon noch uit de vergelijking zelve, noch uit de integraal iets is af te leiden, wanneer men haar niet in verband met (5) en (6) beschouwt, welke als volgt worden afgeleid. Wij differentieeren $\overline{u^2(t)}$ = constant tweemalen naar t en krijgen dan

$$\overline{u(t)\cdot\frac{d^2u(t)}{dt^2}} = \overline{\left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Daar wij op ieder oogenblik kunnen differentieeren geldt ook deze vergelijking natuurlijk voor iedere waarde van t [1]).

Door (4) met $u(t)$ te vermenigvuldigen (*niet* met $u(o)$!) vervolgens te middelen en het resultaat met (7) te combineeren volgt nu, dat (6) geldt voor iedere waarde van t, wanneer men de voorloopig onbepaald gelaten constante p de waarde van (5) toekent.

Terwijl dus (4) niets leert, maar slechts als een definitie van q is op te vatten, zijn (5) en (6) een direct gevolg van $\overline{u^2} =$ constant. En indien O. en B. erin zouden slagen te bewijzen (zooals zij pretendeeren te doen), dat uit het complex (4) (5) en (6) volgt, dat $\overline{u^2}$ niet constant kan zijn, zouden zij niet meer of minder hebben gedaan, dan aantoonen, dat de gebruikte wiskunde in strijd was met het principium contradictionis. Gaat men hun bewijs na, dan komt men tot een andere conclusie. In de eerste plaats vervangen zij onze vergelijking weer door een andere en schrijven „$\overline{q} = 0$ (bij gegeven u_0 en $\dot{u}_0$)" [2]), wat toch wel zal moeten beteekenen, dat $\overline{u_0\, q\,(t)} = 0$ en $\overline{\dot{u}_0\, q\,(t)} = 0$ in plaats van $\overline{u\,(t)\, q\,(t)} = 0$ zooals wij afleidden. Bij het middelen van het quadraat van u laten zij dan ook de termen

$$2u_0 \cos(\sqrt{p}\,.\,t) \times \frac{1}{p}\int_0^t q\,(\vartheta) \sin\{\sqrt{p}\,(t-\vartheta)\}\, d\,\vartheta \text{ en}$$

$$2\frac{\dot{u}_0}{\sqrt{p}} \sin(\sqrt{p}\,.\,t) \times \frac{1}{p}\int_0^t q\,(\vartheta) \sin\{\sqrt{p}\,(t-\vartheta)\}\, d\vartheta$$

ten onrechte weg. Verder ontwikkelen zij $q\,(t)$ in een reeks van FOURIER en onderwerpen de coëfficiënten dier reeks aan dezelfde onderstellingen, die PLANCK voor de straling invoerde, terwijl het zeer questieus is of die onderstellingen hier gelden. Want wel zijn beide kromme lijnen in zekeren zin afhankelijk van toevallige grootheden, maar toch zijn er correlaties tusschen de q's op verschillende

[1]) ORNSTEIN heeft herhaaldelijk beweerd dat deze vergelijkingen *niet* voor iedere waarde, van t gelden, dat (4) *geen* differentiaal vergelijking is en dat men haar *niet* integreeren mag. Eenig bewijs voor deze beweringen is door hem echter nooit aangevoerd. Wel hebben ORNSTEIN en ZERNIKE terecht bewezen, dat het complex vergelijkingen (4), (5) en (6) *niet* geldt, wanneer men de gemiddelden uitstrekt over een groep deeltjes, die op het oogenblik $t = 0$ een bepaalde snelheid $u(o)$ hebben, — en dit is gemakkelijk in te zien, want voor zulk een groep is $\overline{u^2}$ niet constant, — maar dat kan toch geen reden zijn, waarom men het complex niet zou mogen gebruiken met gemiddelden over *alle* deeltjes, waarvoor zij wel gelden.

[2]) Ten gevolge van een verschil in notatie luidt het bij hen eigenlijk $\overline{w} = 0$, pag. 413 l.c.

oogenblikken die invloed op de middelwaarden der FOURIER-coëfficiënten hebben, welke invloed door O. en B. niet is nagegaan.

Op andere bezwaren van de heeren O. en B. zal ik hier niet ingaan. Ik acht ze door hetgeen ik l.c. schreef vooraf reeds voldoende weerlegd. In het bijzonder geldt dit van het bezwaar O. en B. l.c. p. 408 tegen het (schijnbaar) optreden van een term met t^2 in $\overline{\Delta^2}$ waarmee men vergelijke Aanmerking II van mijn artikel l.c. p. 1330.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*Over de toestandsvergelijking voor willekeurige temperaturen en volumina. Analogie met de formule van* PLANCK."

(Mede aangeboden door den Heer F. A. H. SCHREINEMAKERS).

§ 1. Inleiding.

In een viertal stukken [1]) trachtte ik de temperatuurafhankelijkheid der grootheden a en b der VAN DER WAALS'sche toestandsvergelijking op grond van *kinetische* overwegingen nader te bestudeeren. Ik kwam daarbij tot de conclusie, dat de grootheid a met dalende temperatuur gestadig moet toenemen tot een maximumwaarde in de nabijheid van het absolute nulpunt, om daarna weer af te nemen tot de waarde 0 bij $T = 0$. Dit alles bij zeer groot volume.

Ook t. o. v. b voerde ik soortgelijke berekeningen uit, maar de mathematische moeilijkheden worden steeds grooter, en de verkregen uitkomsten zeer gecompliceerd. En voor kleine volumina is een dergelijke behandeling van het probleem nog minder geschikt. Ik zag er dan ook van af het in aansluiting aan de genoemde Verhandelingen nog gevondene te publiceeren, en trachtte het vraagstuk langs anderen en eenvoudiger weg tot oplossing te brengen.

Reeds vroeger was de gedachte bij mij opgekomen het driedimensionale probleem te vervangen door een analoog probleem van ééne afmeting, om daarna op de bekende wijze de uitkomst te transformeeren tot die welke voor drie afmetingen zou gelden. Het is duidelijk dat hierbij de *aard* der te vinden temperatuur- en volumafhankelijkheid van de in de toestandsvergelijking voorkomende konstanten niet zal worden gewijzigd; alleen kan er eenig verschil ontstaan in enkele *numerieke* factoren. Maar deze zijn ten slotte onverschillig, wanneer men in het resultaat sommige groepen van grootheden, genoemde factoren inbegrepen, tot een of meer konstanten vereenigt.

Deze methode heeft ook nog het voordeel, dat zij niet alleen voor groote volumina, maar ook voor *kleine volumina* bruikbaar is, en men dus uitkomsten verkrijgt, welke algemeen geldig zijn; niet alleen

[1]) Deze Verslagen van 27 Oct 1917, 26 Jan., 23 Febr. en 23 Maart 1918.

voor willekeurige temperaturen, maar ook voor willekeurige *volumina*, van $v = \infty$ af tot $v = b$ toe.

Bij het berekenen der verschillende **tijdsgemiddelden** — welke tot nog toe bij dit probleem te veel werden verwaarloosd, terwijl de aandacht zich bijna uitsluitend concentreerde op allerlei ruimtelijke middelwaarden, welke slechts wijziging kunnen brengen in sommige reeds boven aangeduide numerieke factoren — bleek reeds spoedig dat de betrekking tusschen de gemiddelde *Energie* en de *temperatuur* bij kleine volumina en lage temperaturen dezelfde was [1]) als de door PLANCK, onder aanname der zg. „*quanten*"hypothese, ten behoeve der stralingstheorie opgestelde betrekking

$$E = E_0 + \frac{2E_0}{e^{\frac{2/3 E_0}{RT}} - 1},$$

waarin dan slechts E_0 door $^3/_2\, Nh\nu$ zou moeten vervangen worden, om de PLANCK'sche uitdrukking terug te vinden [2]).

Wij zouden dus langs *zuiver kinetischen* weg, ons alleen baseerende op de gewone wetten der *klassieke mechanica*, de beroemde PLANCK'sche uitdrukking kunnen afleiden; wat tot nog toe, naar ik meen, alleen op grond van zeer bijzondere onderstellingen mogelijk was, nl. bij onderstelling van het slechts bij geheele veelvouden van de grootheid $h\nu$ („energie-quanten") *uitzenden* van energie. (De absorptie kan volgens de laatste door PLANCK aangebrachte wijziging in zijn theorie in willekeurige hoeveelheden plaats vinden).

§ 2. Algemeene beschouwingen over den aard der aantrekkende en afstootende krachten.

Wij onderstellen dus dat de moleculen alle gerangschikt zijn langs ééne afmeting, en nemen aan dat daarbij elk willekeurig molecuul M zich aanhoudend heen en weer beweegt tusschen de twee naast liggende moleculen M_1 en M_2. De gemiddelde afstand tusschen de molecuulcentra zij l (het analogon van het volume v bij drie afmetingen), de straal van de attractiesfeer ϱ, de diameter

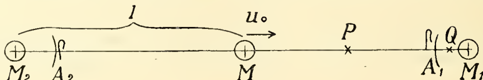


Fig. 1.

[1]) Op een kleinen eindigen term na, welke tegenover den logarithmisch oneindig wordenden hoofdterm kan verwaarloosd worden. (Zie § 6).

[2]) D.w.z. vermenigvuldigd met 3 bij overgang van een lineairen op een ruimtelijken oscilator.

van het molecuul s. Daar M_1 en M_2 zich zoowel links als rechts van de gemiddelde plaatsen M_1 en M_2 kunnen bevinden, zoo kunnen wij onderstellen dat zij zich gemiddeld steeds in M_1 en M_2 zullen bevinden; ook kunnen wij aannemen dat M_1 en M_2 in rust zijn, wijl hunne beweging evengoed naar links als naar rechts kan gericht zijn (zie evenwel § 6). M beweegt zich dus tusschen de als vast onderstelde moleculen M_1 en M_2 gestadig heen en weer. Daarbij noemen wij u_0 de snelheid, welke M in het punt midden tusschen M_1 en M_2 (in Fig. 1 door M aangeduid: het z.g. doode of neutrale punt), hetzij naar links, hetzij naar rechts heeft.

Met deze snelheid doorloopt M het baanstuk MA_1 (bv. in P), maar dan treedt het binnen de attractiesfeer ϱ van het molecuul M_1 (bv. in Q); d. w. z. wij nemen aan dat de aantrekkende kracht zich eerst binnen die sfeer in merkbare mate doet gevoelen, en van daar af gestadig toeneemt tot M het molecuul M_1 aanraakt (afstand der middelpunten $= s$). De snelheid u is dientengevolge ook van A_1 af steeds door toegenomen tot een maximumwaarde u_s. Alsdan treden afstootende krachten óp; de beide moleculen worden een weinig ingedrukt en M wordt teruggeworpen. Tusschen M_1 en M geschiedt alles op geheel dezelfde wijze, alleen in tegengestelde volgorde; en tusschen M en M_2 en terug herhaalt zich alles opnieuw. Van elke heen en weer gaande beweging zullen wij dus slechts het vierde deel, nl. het stuk MM_2, hebben te beschouwen.

Nu ziet men gemakkelijk in, dat er drie gevallen mogelijk zijn. In de *eerste* plaats het in Fig. 1 aangeduide geval, waarbij $l > \varrho$ is, en het molecuul M dus een grooteren of kleineren weg aflegt geheel *buiten* den invloed der aantrekking van M_1, en *altijd* buiten de aantrekkingssfeer van M_2.

In de *tweede* plaats heeft men het overgangsgeval van Fig. 2, nl. $l < \varrho$, maar $> \frac{1}{2}(\varrho + s)$. Alsdan is *$M$ voortdurend binnen* de attractiesfeer M_1A_1 van M_1, en bovendien een tijdlang (van M tot A_2, bv. in P) ook binnen die (M_2A_2) van M_2. Zoodra M het punt A_2 is gepasseerd, bv. in Q, zal het zich buiten den invloed van M_2 bevinden.

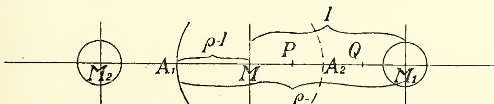


Fig. 2.

In de *derde* plaats kan M ook voortdurend binnen de attractiesfeer van M_2 zijn, zoodra nl. M bij aanraking met M_1 (afstand der middelpunten $= s$) zich nog juist op den rand der attractiesfeer van

M_2 bevindt; d. w. z. wanneer $A_2M_1 = 2l - \varrho$ juist de waarde s heeft. Dan is dus $l = {}^1/_2(\varrho + s)$. In het tweede (overgangs) geval is alzoo $l > {}^1/_2(\varrho + s)$, terwijl voor het derde geval eenvoudig $\underline{l < {}^1/_2(\varrho + s)}$ is.

Nu vonden wij vroeger (zie de geciteerde Verhandelingen), dat ϱ ongeveer $= 1{,}7\,s$ is. Wij zouden dan hebben: 1e geval $l > 1{,}7\,s$; 2e geval $l < 1{,}7\,s > 1{,}35\,s$; 3e geval $l < 1{,}35\,s$.

Bij de kritische temperatuur is $v_k = 3{,}8\,b_0$ (bij "gewone" stoffen althans), derhalve $l = s\sqrt[3]{3{,}8} = 1{,}56\,s$ (het molecuul kubisch gedacht). De *geheele vaste toestand* en *bijna alle vloeistofvolumina*, vanaf het smeltpunt ($l = 1{,}08\,s$ ongeveer) tot ver boven het kookpunt, verkeeren dus in het *derde* geval, waarbij ieder molecuul voortdurend binnen de attractiesfeer der naburige moleculen is. Alleen de volumina vlak bij T_k, zoowel de vloeistof- als de dampvolumina, behooren tot het tweede (overgangs) geval, terwijl bijna alle dampvolumina tot het eerste geval te rekenen zijn (zie Fig. 1).

Neemt men ϱ nog iets grooter dan $1{,}7\,s$ aan, bv. $= 2s$, dan ligt het overgangsgeval tusschen $2s$ en $1{,}5\,s$, en bevat alsdan alleen de kleinste dampvolumina in de nabijheid van het kritische punt, terwijl (praktisch) *alle* vloeistofvolumina tot T_k toe, waar $l = 1{,}56\,s$, tot het derde geval behooren.

Wij moeten thans aangaande den aard en werkingswijze der aantrekkende en afstootende krachten een plausibele onderstelling maken, welke ons tevens veroorlooft de mathematische berekeningen gemakkelijk uitvoerbaar te maken. Onder alle onderstellingen, welke ik t. o. der aantrekkende krachten bij verschillende gelegenheden, nu en vroeger, heb beproefd, is deze wel de eenvoudigste, dat men aanneemt dat de aantrekking *vanaf de aantrekkingssfeer* ϱ *lineair* evenredig met den afstand tot die sfeer toeneemt. Is het molecuul bv. in het punt P (Fig. 2), dan zou de aantrekking, welke het van M_1 ondervindt, $= f \times A_1P$ zijn.

In plaats dus de aantrekkende werking te laten *afnemen*, vanaf het middelpunt van het molecuul naar *buiten* toe tot aan den rand der attractiesfeer (volgens een zekere reciproke macht van den afstand r tot het middelpunt, door bv. te stellen $F = f : r^6$, of $F = (f : r^2) \times e^{-r/u}$, waardoor de integraties altijd onuitvoerbaar of uiterst gecompliceerd worden, en men tevens nooit bereikt dat de aantrekkende werking aan den rand der attractiesfeer $= 0$ wordt), volgt men den omgekeerden weg, en laat de aantrekkende werking *toenemen* van af den rand der attractiesfeer naar *binnen* toe. De resultaten zullen niet veel verschillen, maar men bereikt er een groote vereenvoudiging der berekeningen mede. Alleen zal men bij

verschillende onderstellingen aangaande de aantrekkende krachten quantitatieve verschillen zien optreden (in de numerieke voorfactoren, etc.), maar de gevonden temperatuur- en voluum-afhankelijkheden zullen *qualitatief* onveranderd blijven. En het is nog de vraag of onze onderstelling in verband met de aanname dat de moleculen en atomen alle electronen-systemen zijn, niet minstens even gerechtvaardigd is als de andere bovengenoemde onderstellingen.

Wat de *afstootende* krachten betreft bij aanraking der moleculen, hierbij neem ik het zelfde aan als vroeger (zie o.a. l.c. I, § 7, p. 856), nl. dat zoodra het molecuul wordt samengedrukt (de atomen, of de electronenringen naar binnen gedrukt uit hun evenwichtsstand), er een quasi-elastische afstootende kracht wordt opgewekt, welke (bij niet te groote indrukkingen) eveneens *lineair* toeneemt met de uitwijking uit den evenwichtsstand.

§ 3. Opstelling der grondvergelijkingen.

In het *eerste* der drie boven aangeduide gevallen ($l > \varrho$) is dus, wanneer men in Fig. 1 $MQ = x$ stelt, de aantrekking van M door M_1 voor te stellen door $F = f \times A_1Q$, d. w. z. door $f \quad (MQ - MA_1)$, of door

$$F = f(x - (l - \varrho)).$$

Bij de integraties is dan x van $l - \varrho$ tot $l - s$ te nemen.

In het *tweede* geval ($l < \varrho > {}^1/_2(\varrho + s)$) is in P (Fig. 2) de aantrekking van M door $M_1 = f \times A_1P = f \times (MP + A_1M)$, terwijl die welke M van M_2 ondervindt $= f \times PA_2 = f \times (MA_2 - MP)$ is. Derhalve is, MP weer $= x$ stellende:

$$F_1 = f(x + (\varrho - l)) \quad ; \quad F_2 = f((\varrho - l) - x).$$

Hierbij is bij F_1 x te nemen tusschen 0 en $l - s$; bij F_2 slechts tusschen 0 en $\varrho - l$. Wordt $x > \varrho - l$, dan zou F_2 negatief worden, d. w. z. P treedt buiten de attractiesfeer van M_2.

In het *derde* geval gelden natuurlijk dezelfde uitdrukkingen als in het tweede geval, maar thans kan x bij F_2 ook tusschen 0 en $l - s$ worden genomen, wijl $l - s$ nu $< \varrho - l$ is. ($2l < \varrho + s$).

Gedurende het *geheele* baanstuk tusschen $MP = 0$ en $MP = l - s$ zal alzoo in dit derde geval voor de gezamenlijke werking kunnen worden geschreven $F = F_1 - F_2$, d. w. z.

$$\underline{\underline{F = f \times 2x.}}$$

Het is dus *alsof* de aantrekkende werking van het punt M uitgaat, en evenredig is met den dubbelen afstand van P tot dat neutrale aanvangspunt, waar natuurlijk steeds in al de drie genoemde gevallen de totale werking $= 0$ zal zijn.

Wij zullen dit laatste (derde) geval, zijnde verreweg het belangrijkste,

het eerst behandelen. Op eenvoudige wijze zullen wij daarna de beide eerste gevallen kunnen uitwerken. De nu volgende beschouwingen hebben dus alle betrekking op *kleine* volumina ($l < 1,35$ à $1,5 s$, d. w. z. $v < 2,5$ à $3,4\, b_0$), hetzij bij vloeistoffen, hetzij bij vaste lichamen.

Voor het snelheidskwadraat u^2 in het punt P ($MP = x$) geldt dan

$$u_x^2 = u_0^2 + \frac{2}{m}\int_0^x f \times 2x\, dx = u_0^2 + \frac{2f}{m} x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Bij aanraking der beide moleculen is dus $u^2_{l-s} = u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2$ geworden, terwijl van nu af aan — tengevolge van het optreden der afstootende kracht, gegeven door (de quasi-elastische kracht door 2ε voorstellende)

$$F' = 2\varepsilon\,(x - (l-s)),$$

wanneer P zich binnen den afstand s (bij aanraking) bevindt — de snelheid wordt voorgesteld door

$$u_x^2 = u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2 - \frac{2}{m}\int_{l-s}^{x} 2\,\varepsilon\,(x - (l-s))\, dx,$$

d. w. z. door

$$u_x^2 = u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2 - \frac{2\,\varepsilon}{m}(x - (l-s))^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Men heeft alzoo, daar $u = {dx}/{dt}$ is:

$$dt_1 = \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}x^2}}\,; \quad dt_2 = \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(x-(l-s))^2}}\,;$$

d. w. z. voor de tijden t_1 en t_2 resp. tusschen M en de botsing, en gedurende de botsing tot op het hoogtepunt, waar $u = 0$ geworden is:

$$t_1 = \int_0^{l-s} \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}x^2}}\,; \quad t_2 = \int_{l-s}^{l-s'} \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(x-(l-s))^2}}, \quad . \quad (c)$$

wanneer men door s' voorstelt den afstand der molecuulmiddelpunten op het hoogtepunt der indrukking.

Voor het *gemiddelde snelheidskwadraat*, d. w. z. het *tijdsgemiddelde*, hetwelk ook in de *Viriaalvergelijking* voorkomt, en waaraan de *temperatuur* evenredig is, heeft men nu blijkbaar geheel algemeen:

$$\overline{u^2} = \frac{1}{t}\int_0^{l-s'}\left[u_0^2 + \frac{2f}{m}x^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(x-(l-s))^2\right]dt,$$

d. w. z. met

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}x^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(x-(l-s))^2}},$$

ook

$$\overline{u^2} = \frac{1}{t}\int_0^{l-s}\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}x^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(x-(l-s))^2}\,.\,dx,$$

wanneer men de beide trajecten $x=0$ tot $l-s$, en $x=l-s$ tot $l-s'$ als één geheel beschouwt. Gedurende het eerste traject is dan voortdurend $\varepsilon=0$ te denken, terwijl gedurende het tweede $f=0$ is te stellen. Men kan nu ook de bovenstaande integratie in twee deelen splitsen, en schrijven:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{u^2} = \frac{1}{t}\left[\int_0^{l-s}\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}x^2}\,dx\, + \right. \\ \left. + \int_{l-s}^{l-s'}\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(x-(l-s))^2}\,dx\right]\end{array}\right\} , \quad . \quad (d)$$

waarin $t = t_1 + t_2$ is te stellen (zie (*c*)). In de tweede integraal is bij het aantrekkingsgedeelte x^2 konstant $= (l-s)^2$ geworden, en neemt tengevolge van het buiten werking stellen der aantrekkende kracht niet verder toe. [1])

De beteekenis dezer laatste betrekking is zeer groot. Immers is $^1/_2\, N m\overline{u^2}$ (N is het totale aantal moleculen, b. v. in 1 Gr. mol.) een

---

[1]) Wanneer wij onderstellen dat de aantrekkende werking nog blijft voortbestaan *tijdens* de botsing (wat zelfs plausibel zou zijn), dan moet in (*c*) en (*d*) bij de tweede integratie $\frac{2f}{m}(l-s)^2$ weer door $\frac{2f}{m}x^2$ worden vervangen. Maar dan worden de uitkomsten veel ingewikkelder, terwijl het verschil eigenlijk uiterst gering is, aangezien ε zoovele malen grooter is dan f. De reeds zeer geringe tijdsduur der botsing zou er alleen *iets* grooter door worden, terwijl ook het gemiddelde snelheidskwadraat slechts een geringe wijziging in hare waarde zou ondergaan Wij hebben derhalve van het doorvoeren dezer geheel onnoodige complicatie afgezien; te meer daar toch ook de door ons gemaakte onderstelling aangaande de werkingswijze der aantrekkende krachten (d. w. z. evenredig met den afstand van het middelpunt van het bewegende molecuul tot den rand der attractiesfeer van een der beide andere moleculen, waartusschen het zich heen en weer beweegt) slechts eén benadering is te achten.

maat voor de *temperatuur* van het systeem, zoo zal $\frac{1}{2} N m u_0^2$ een maat zijn voor de *Energie* van dat systeem. Want alleen de snelheid u_0^2, waarmede een molecuul den neutralen stand in M passeert, zal door energie (warmte) toevoer of afvoer willekeurig kunnen worden verhoogd of verlaagd. Hetgeen *bij* $\frac{1}{2} N m u_0^2$ komt, in den term $N\overline{f(l-s)^2}$ b.v. tot aan de botsing, ten gevolge der aantrekkende werking der moleculen, kan *nimmer* door toevoer of afvoer van energie worden gewijzigd. Dit bedrag is *standvastig*, en kan door E_0 worden voorgesteld; d.i. dus de Energie, welke overblijft als $u_0 = 0$ is (geheel potentieel in het neutrale punt M; geheel kinetisch op het oogenblik der botsing). Deze grootheid is derhalve wat Planck e.a. de z.g. *nulpuntsenergie* hebben genoemd, welke alzoo niets anders is dan de energie der aantrekkende krachten, welke ook met de grootheid a/v in verband staat. (Zie ook § 5).

De grootheden $\overline{u^2}$ en u_0^2 zullen alzoo volgens (d) altijd zeer verschillend zijn (alleen bij hooge temperaturen en groote volumina zal er blijkbaar practisch geen verschil bestaan), en reeds jaren lang koesterde ik de overtuiging dat daarin [1]) ten slotte de sleutel moest worden gezocht van de merkwaardige betrekking tusschen T en E, door Planck opgesteld voor lage temperaturen en kleine volumina — maar welke volgens hem slechts op grond van zeer bijzondere onderstellingen (de z.g. „*quanten*"-hypothese) kan worden afgeleid.

§ 4. Berekening van t en $\overline{u^2}$.

Voor t_1 vindt men nu volgens (c) wanneer men $\frac{x}{u_0}\sqrt{\frac{2f}{m}} = y$ stelt:

$$t_1 = \int_0^{l-s} \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}x^2}} = \sqrt{\frac{m}{2f}}\; log\,(y + \sqrt{1+y^2})_{x=0}^{x=l-s}\ ,$$

hetgeen met

$$\varphi = \frac{l-s}{u_0}\sqrt{\frac{2f}{m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

tot

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{2f}}\; log\,(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

voert. Voor $u_0 = \infty$ ($\varphi = 0$) nadert dit tot $t_1 = \sqrt{\frac{m}{2f}}\; log\,(\varphi + 1) =$

[1]) Afgezien natuurlijk van de interpretatie der in de Planck'sche formule optredende grootheid $h\nu$, waarin h een universeele konstante is — welke een *geheel afzonderlijk* probleem vormt.

$= \varphi \sqrt{\frac{m}{2f}} = \frac{l-s}{u_0}$, zooals te verwachten was. De tijd wordt dan door de aantrekkende werking nauwelijks verkort. Maar nadert u_0 tot 0 ($\varphi = \infty$), dan nadert t_1 tot $\sqrt{\frac{m}{2f}} \log 2\varphi = \sqrt{\frac{m}{2f}} \log \left(\frac{l-s}{u_0} \sqrt{\frac{2f}{m}} \right)$, hetwelk alzoo tot logarithmisch oneindig nadert. Dit komt daarvandaan, dat wanneer u_0 uiterst gering is, de tijd waarin het allereerste weggedeelte vlak bij het neutrale punt M wordt doorloopen, niettegenstaande de aantrekkende werking (welke alsdan echter nog zeer klein is) zeer groot zal wezen. Wij zullen dadelijk zien, dat het *deze* omstandigheid is, welke tot het wezen der PLANCK'sche betrekking zal voeren, nl. tot het *logarithmisch* $\left(\text{evenredig met } 1 : \log \frac{1}{u_0}\right)$ tot 0 naderen van $\overline{u^2}$ (d. w. z. van T), wanneer u_0^2 (d. w. z. $E - E_0$) tot 0 nadert. De tijdsintegraal $\int u^2 dt$ blijft nl. *eindig* (tengevolge der aantrekkende werking neemt de uiterst geringe waarde van u_0^2 tot een eindige waarde toe), niettegenstaande t zelf (logarithmisch) tot oneindig nadert.

Voor t_2 wordt nu verder gevonden met

$$y = (x - (l-s)) \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\left(u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2\right)}} :$$

$$t_2 = \int_{l-s}^{l-s'} \frac{dx}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(x-(l-s))^2}} = \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \left(Bg \sin y\right)_{l-s}^{l-s'} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \, Bg \sin \left\{ (s-s') \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m(u_0^2 + etc)}} \right\}.$$

Maar tengevolge van de betrekking

$$u^2 = u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(s-s')^2 = 0$$

op het hoogtepunt der botsing (zie vergelijking (b)) zal de grootheid onder $Bg \sin$ juist $= 1$ zijn, zoodat

$$t_2 = \tfrac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wordt, de bekende uitdrukking voor den vibratietijd onder den invloed der quasi-elastische afstootende krachtswerking, evenredig met de uitwijking uit den evenwichtstoestand. (Dat hier $^1/_2\,\pi$ optreedt in plaats van 2π, komt natuurlijk daarvandaan, dat slechts een vierde gedeelte der geheele slingering is beschouwd (zie boven)).

Wij zullen thans volgens (d) de waarde van $\overline{u^2}$ berekenen. De eerste integraal binnen [ ] geeft:

$$I_1 = \int_0^{l-s} \sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m} x^2}\, dx = u_0^2 \sqrt{\frac{m}{2f}} \int_{x=0}^{x=l-s} \sqrt{1+y^2}\, dy,$$

wanneer wederom evenals boven $\frac{x}{u_0}\sqrt{\frac{2f}{m}} = y$ wordt gesteld. Wij verkrijgen derhalve:

$$I_1 = u_0^2 \sqrt{\frac{m}{2f}} \times \tfrac{1}{2}\Big[\sqrt{1+y^2} - log\,(-y + \sqrt{1+y^2})\Big]_{x=0}^{x=l-s}.$$

De benedenste grens geeft 0; voor de bovenste gaat y weder in φ over, zoodat wij hebben:

$$I_1 = \tfrac{1}{2}\, u_0^2 \sqrt{\frac{m}{2f}} \Big[\varphi \sqrt{1+\varphi^2} - log\,(-\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})\Big] \quad . \quad . \quad (4)$$

De tweede integraal wordt:

$$I_2 = \int_{l-s}^{l-s'} \sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(x-(l-s))^2}\, dx =$$

$$= \Big\{u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2\Big\} \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \int_{x=l-s}^{x=l-s'} \sqrt{1-y^2}\, dy,$$

waarin y thans $= \dfrac{x-(l-s)}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2}} \sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{m}}$ is. Wij vinden dus verder:

$$I_2 = \Big\{u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2\Big\} \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \times \frac{1}{2}\Big[y\sqrt{1-y^2} + Bg\,sin\,y\Big]_{x=l-s}^{x=l-s'}.$$

Voor de onderste grens wordt $y=0$ en verdwijnt alles, zoodat wij alleen overhouden:

$$I_2 = \tfrac{1}{2}\Big\{u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2\Big\} \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \Big[\varphi' \sqrt{1-\varphi'^2} + Bg\,sin\,\varphi'\Big],$$

wanneer $\dfrac{s-s'}{\sqrt{u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2}} \sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{m}} = \varphi'$ wordt gesteld. Evenwel, tengevolge van de betrekking

$$u^2 = u_0^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2 - \frac{2\varepsilon}{m}(s-s')^2 = 0$$

op het hoogtepunt der botsing (zie boven) zal φ' blijkbaar $= 1$ zijn, zoodat wij tenslotte verkrijgen:

$$I_2 = \tfrac{1}{2} u_0^2 (1+\varphi^2) \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \times \tfrac{1}{2} \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dit zijn dus de beide *tijdsintegralen* van het snelheidskwadraat u^2 vóór en tijdens de botsing.

Voor het gemiddelde snelheidskwadraat $\overline{u^2} = \frac{I}{t} = \frac{I_1 + I_2}{t_1 + t_2}$ zal men derhalve hebben:

$$\overline{u^2} = \tfrac{1}{2} u_0^2 \frac{\sqrt{\frac{m}{2f}} \left[\varphi \sqrt{1+\varphi^2} - \log(-\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}) \right] + \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} (1+\varphi^2)}{\sqrt{\frac{m}{2f}} \log(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}) + \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}}, \quad (6)$$

zijnde met $\varphi = \frac{l-s}{u_0} \sqrt{\frac{2f}{m}}$ de gezochte uitdrukking voor $\overline{u^2}$, uitgedrukt in u_0^2, en welke bij *kleine* volumina ($< v_k$) voor *alle* temperaturen zal geldig zijn.

§ 5. Twee belangrijke grensgevallen.

a. Hooge temperaturen.

Voor $u_0 = \infty$ $(\varphi = 0)$ wordt nu:

$$\overline{u^2} = \tfrac{1}{2} u_0^2 \frac{\sqrt{\frac{m}{2f}} \cdot 2\varphi + \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}}{\sqrt{\frac{m}{2f}} \cdot \varphi + \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}},$$

daar $-\log(-\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})$ alsdan tot $-\log(1-\varphi) = \varphi$ nadert, en evenzoo $\log(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})$ en $\varphi\sqrt{1+\varphi^2}$. Voor φ dicht bij 0 zullen de eerste termen tegenover de tweede verdwijnen, en $\overline{u^2}$ derhalve naderen tot

$$(T = \infty) \qquad \underline{\overline{u^2} = \tfrac{1}{2} u_0^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

zoodat het tijdsgemiddelde van het snelheidskwadraat bij kleine volumina en *hooge* temperaturen slechts de helft bedraagt van het snelheidskwadraat in het neutrale punt. Ten gevolge van het verdwijnen van de termen met f tegenover die met ε wordt het tijdsgemiddelde nl. hoofdzakelijk gevormd door de snelheids*vermindering tijdens de botsing*, en niet door de vermeerdering vóór de botsing tengevolge der aantrekking. Deze laatste vermeerdering duurt zóó kort, dat zij t. o. v. de daaropvolgende belangrijke snelheidsvermindering (tot 0 toe) te verwaarloozen is.

Nu is bij een lineair systeem $N m \overline{u^2}$ niet $= 3RT$, maar eenvoudig $= RT$, terwijl in de algemeene betrekking

$$^1/_2\, N m\, u^2_{l-s} = {}^1/_2\, N m \left(u_0{}^2 + \frac{2f}{m}(l-s)^2\right)$$

voor de levende kracht bij den aanvang der botsing, d.w.z. voor de som van kinetische en potentieele energie in het neutrale punt M (en dus in alle punten van de door M doorloopen baan) de grootheid $^1/_2\, N m u^2{}_{l-s}$ niet de geheele ruimtelijke Energie E, maar slechts het $^1/_3$ gedeelte daarvan voorstelt. Evenzoo zal $N f (l-s)^2$ niet de geheele aantrekkingsenergie [1]) (nulpuntsenergie) E_0 voorstellen, maar alweder $^1/_3\, E_0$ [2]). Derhalve is te stellen:

$$N m \overline{u^2} = RT \quad ; \quad {}^1/_2\, N m\, u_0{}^2 = {}^1/_3\,(E - E_0),$$

zoodat men volgens (7) bij hooge temperatuur heeft:

$$(T = \infty) \qquad \underline{RT = \tfrac{1}{3}(E - E_0)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Dat deze vergelijking juist is, blijkt daaruit dat zij voor c_v geeft:

$$(T = \infty) \qquad c_v = \frac{dE}{dT} = 3R = 6$$

in gr. kal., derhalve de verwachte *dubbele* warmtecapaciteit, welke bij groote volumina (gassen) onder dezelfde omstandigheden (d. w. z. hooge temp.) slechts $= 3$ is — altijd in de onderstelling van *een-atomige* stoffen, daar zich anders de inwendige energie der atomen binnen de moleculen nog bij E zal voegen.

Wij merken nog op, dat wanneer de moleculen *volkomen harde* systemen waren, en derhalve ook niet ingedrukt konden worden, de grootheid ε in onze formule (6) voor u^2 *oneindig groot* zou zijn, en derhalve de botsingsduur absoluut $= 0$, zoodat alsdan niet de eerste termen met $\sqrt{\frac{m}{2f}}\,.\,\varphi$ tegenover de tweede met $\frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}$ zouden verdwijnen, wanneer φ tot 0 nadert, maar *juist omgekeerd* deze laatste termen zouden verdwijnen tegen over de eerste, hoe klein deze door φ ook mochten zijn. Maar dan zal ook $\overline{u^2}$ niet $= {}^1/_2\, u_0{}^2$

---

[1]) Wij wijzen er op, dat bij het grensvolume $v = b$ $(l = s)$ onze $E_0 = 3Nf(l-s)^2$ tot 0 zal naderen. Inderdaad, aangezien alle beweging dan onmogelijk is, zoo kan in dit geval de energie $^3/_2\, N m\, u^2$ geen vermeerdering ondergaan tengevolge van den aantrekkingsarbeid. Natuurlijk kan men naast de door ons ingevoerde E_0 altijd nog een andere nulpuntsenergie invoeren, welke met die der atomen (electronensystemen) *binnen* het molecuul in verband staat. De formules worden er echter in geen enkel opzicht door gewijzigd.

[2]) Het deelen door 3 kan ook hierdoor gerechtvaardigd worden, dat bij de door ons beschouwde lineaire systemen de snelheden alle t.o. der moleculen *normaal* gerichte snelheden u_n zijn. En nu is $\overline{u_n{}^2} = {}^1/_3\, \overline{u^2}$.

worden, maar $= u_0^2$, en derhalve $RT = \frac{2}{3}(E-E_0)$, zoodat $c_v = \frac{3}{2}R = 3$ zou worden, en niet $= 6$. Dat dus de warmtecapaciteit bij gecondenseerde systemen niet tot 3 *maar tot* 6 *nadert*, is een bewijs dat de moleculen *niet* als volkomen harde bollen mogen worden beschouwd, maar *elastische* systemen zijn, *voor indrukking vatbaar*, waarbij de *botsingsduur niet* oneindig klein of verwaarloosbaar klein is, maar een zekere, hoewel geringe, toch *eindige* waarde zal hebben.

Het spreekt van zelf, dat zoodra φ niet meer dicht bij 0 is, maar eenige waarde verkrijgt (T niet maar zeer hoog) $\overline{u^2}$ tengevolge van den toenemenden invloed der termen met φ zeer spoedig tot hoogere waarden dan $\frac{1}{2}u_0^2$ zal stijgen, en derhalve c_v van 6 tot lagere waarden zal afnemen.

§ 6 *b*. Lage temperaturen.

Bij lage en zeer lage temperaturen zal u_0 tot 0, d.w.z. φ tot ∞ naderen. De algemeene vergelijking (6) gaat dan over in

$$\overline{u^2} = \tfrac{1}{2}u_0^2 \frac{\sqrt{\frac{m}{2f}}\left[\varphi^2 - log\left(-\varphi + \varphi\left(1 + \frac{1}{2\varphi^2}\right)\right)\right] + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}\,\varphi^2}{\sqrt{\frac{m}{2f}}\; log\left(2\varphi + \frac{1}{2\varphi}\right)},$$

waar in den noemer de zeer geringe tijd der botsing tegenover den tot logarithmisch oneindig naderenden tijd onder den invloed der aantrekkende krachten vóór de botsing kan worden verwaarloosd. Wij verkrijgen alzoo met $-log(1:2\varphi) = log\,2\varphi$, en na deeling in teller en noemer door $\sqrt{\frac{m}{2f}}$:

$$\overline{u^2} = \tfrac{1}{2}u_0^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}\right)\varphi^2 + log\,2\varphi}{log\left(2\varphi + \frac{1}{2\varphi}\right)}.$$

Maar nu kan bij eerste benadering in den teller ook $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{f}{\varepsilon}}$ tegenover 1 verwaarloosd worden, daar ε zoovele malen grooter dan f zal zijn. En bovendien is $log\,2\varphi$ te verwaarloozen tegenover φ^2, wanneer φ tot ∞ nadert. Derhalve wordt tenslotte:

$$(T=0) \quad \overline{u^2} = \tfrac{1}{2}u_0^2 \frac{\varphi^2}{log\left(2\varphi + \frac{1}{2\varphi}\right)} = \frac{u_0^2\,\varphi^2}{log\,(4\varphi^2+2)}, \quad . \quad . \quad (9)$$

waarin $\varphi^2 = \frac{(l-s)^2}{u_0^2} \cdot \frac{2f}{m}$ is (zie (1) in § 4). Hieruit blijkt dus reeds,

dat de verhouding tusschen $\overline{u^2}$ en u_0^2 tot ∞ zal naderen, d. w. z. eveneens de verhouding $RT:(E-E_0)$. Want φ^2 is oneindig groot t.o. van $log\, \varphi^2$. Evenwel zal $\overline{u^2}$ zelf eveneens tot 0 naderen, aangezien $u_0^2\, \varphi^2$ *eindig* blijft (zie ook het begin van § 4). Maar $\overline{u_2}$ nadert dan, terwijl de tijd, gedurende welken de weg onder den invloed der aantrekking doorloopen wordt, tot logarithmisch oneindig nadert, niet gewoon tot 0 op dezelfde wijze als u_0^2, doch in *veel geringer mate*, evenredig met $1 : log \frac{1}{u_0^2}$. D. w. z. de *temperatuur* zal veel langzamer tot 0 naderen dan de Energie; wanneer de temperatuur nog een zekere geringe waarde heeft, zal de „Energie" (d. w. z. $E-E_0$) reeds praktisch $=0$ zijn. Immers de laatste wordt alleen bepaald door u_0^2 in het neutrale punt, terwijl de temperatuur door de tijdsmiddelwaarde van het onder den invloed der aantrekking *vermeerderde* snelheidskwadraat wordt bepaald.

Er is dan ook relatief slechts uiterst weinig energietoevoer noodig, om de temperatuur met een zeker bedrag te verhoogen: m. a. w. *de warmtecapaciteit zal bij lage temperaturen zeer snel tot* 0 *naderen.*

Schrijven wij voor φ^2 hare waarde, dan wordt $u_0^2\varphi^2 = \frac{2f}{m}(l-s)^2$, zoodat met $Nf(l-s)^2 = {}^1/_8\, E_0$ en $Nm\overline{u^2} = RT$ (zie boven) verkregen wordt:

$$T=0 \qquad RT = \frac{{}^2/_8\, E}{log\left(\frac{4E_0}{E-E_0}+2\right)}, \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

aangezien $\varphi^2 = \frac{2Nf(l-s)^2}{N m\, u_0^2} = \frac{{}^2/_8\, E_0}{{}^2/_8\,(E-E_0)} = \frac{E_0}{E-E_0}$ is.

Door (10) wordt dus T uitgedrukt in E, voor het geval van kleine volumina en lage temperaturen. Opgemerkt dient te worden, dat (10) niet *geheel* identiek is met de PLANCK'sche betrekking, maar dat de *logarithmisch oneindige* noemer $log\,(4\varphi^2+2) = log\left(\frac{4E_0}{E-E_0}+2\right)$ met de *kleine eindige* grootheid $log\, 2 = 0{,}69$ zou moeten verminderd worden, waardoor de noemer in $log\,(2\varphi^2+1) = log\left(\frac{2E_0}{E-E_0}+1\right)$ zou overgaan. De oorspronkelijke noemer $log\left(2\varphi+\frac{1}{2\varphi}\right)$ zou dus met ${}^1/_2\, log\, 2 = 0{,}35$ moeten worden verminderd.

Verschillende omstandigheden kunnen worden aangevoerd ter verklaring van dit tot de zaak zelf niets afdoende uiterst geringe

verschil. Vooreerst zal wellicht een slechts geringe wijziging in onze grondonderstellingen aangaande de werkingswijze der aantrekkende krachten, bij behoud van den logarithmischen vorm van t_1, een wijziging kunnen teweegbrengen in dien zin, dat nog een konstante term moet worden aangebracht. En in de tweede plaats zal het in aanmerking nemen der MAXWELL'sche snelheidsverdeeling bij de berekening van t_1 een zekeren invloed kunnen hebben op het resultaat. Ongelukkig kunnen de daarop betrekking hebbende berekeningen niet worden uitgevoerd, daar deze tot een niet voor uitwerking vatbare bepaalde integraal zullen voeren. In de derde plaats kan nog worden aangevoerd, dat het ten opzichte van de snelheid van het bewegende molecuul M niet geheel geoorloofd is de moleculen M_1 en M_2 *in rust* te onderstellen, op grond daarvan, dat de beweging zoowel naar links als naar rechts kan gericht zijn. Daarbij dient te worden opgemerkt, dat wanneer M_1 zich bv. links van zijn gemiddelden stand bevindt, het *sterker* aantrekkend op M zal inwerken dan wanneer het zich rechts daarvan bevindt. En zoo is er meer.

Wij kunnen dus gerust op grond der bovenstaande overwegingen de genoemde t. o. v. den logarithmisch oneindigen hoofdterm uiterst geringe correctie aanbrengen, en schrijven:

$$RT = \frac{{}^3/_2\, E_0}{log\left(\dfrac{2E_0}{E-E_0}+1\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10a)$$

Keert men nu deze betrekking om, dan komt er

$$E-E_0 = \frac{2E_0}{e^{\frac{{}^3/_2 E_0}{RT}}-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hierin

$$E_0 = 3\,Nf\,(l-s)^2 = {}^3/_2\, N\,.\,h\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

stellende, zoo verkrijgt men eindelijk:

$$E = \tfrac{3}{2}\,Nh\nu + \frac{3\,Nh\nu}{e^{\frac{Nh\nu}{RT}}-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11a)$$

hetgeen met de betrekking van PLANCK (na vermenigvuldiging met 3 wegens den overgang van een lineairen tot een ruimtelijken oscillator) overeenstemt.

De door PLANCK ingevoerde grootheid $h\nu$ zou derhalve gegeven zijn door

$$h\nu = 2f\,(l-s)^2\,, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11a)$$

waaruit men h zou kunnen berekenen als ν *bepaald* is (deze grootheid ν zou dus den factor $(l-s)^2$ moeten bevatten, derhalve van het *volume* afhankelijk zijn, zooals trouwens wordt aangenomen), en wanneer f, de door ons ingevoerde konstante der aantrekkende werking, bekend is. Op dit *speciale* vraagstuk komen wij later nog terug.

Wij vestigen er alleen nog de aandacht op, dat onze formule (11) of (11a), resp. (10) of (10a), alleen geldig is voor *lage*, en *niet* voor hooge temperaturen, terwijl PLANCK meent dat de uitdrukking (11a) algemeen geldig is, voor hooge zoowel als voor lage temperaturen. Volgens onze afleiding zou de meer gecompliceerde[1]) formule (6) de algemeen geldige betrekking voorstellen, welke slechts bij zeer lage temperaturen in den vorm (11a) overgaat.

Kerstmis 1918. (*Wordt vervolgd*).

[1]) Ook EINSTEIN, DEBYE e. a. leidden reeds meer gecompliceerde betrekkingen af, welke de verhoudingen beter zouden voorstellen dan de eenvoudige PLANCK'sche formule.

Anatomie. — De Heer BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer ERIK AGDUHR: "*Is the post-embryonal growth of the nervous system due only to an increase in size or also to an increase in number of the neurones?*"

(Mede aangeboden door den Heer WINKLER).

Introduction.

While investigating the effect of training on the post-embryonal development of the nervous system[1]) I was confronted with the following problem. Is there generally an increase in the number of axons during the post-embryonal growth of the nervous system? We are concerned with the roots of the spinal nerves. In the dorsal and ventral roots of the spinal nerves there is, as is shown in more detail below, no *T*- and *Y*-division of the nerve fibres. The problem is thus practically identical with another, viz.: Is there an increase in the number of neurones during the post-embryonal development?

Up to the present time the condition of this question has been such that the possibility referred to has been regarded as almost excluded. This was due to the supposition that the nerve-cells were small bodies so much differentiated that divisions in them could not be imagined. Figures of division of cells in the central nervous system of animals only a few days old have, however, been described, although very eminent investigators, such as MARINESCO, PRENANT, VALENZA, etc. deny that these figures have anything to do with the nerve elements, but consider them to be stroma elements. During recent years the literature points to some extent in the direction of the possibility of a post-embryonal new formation of neurones taking place — although the newly-formed neurones are only considered as replacing those that have been destroyed by degeneration.

The results of the investigation undertaken by me with regard to training (exercising) were of such a nature as to be difficult of explanation in the absence of a real increase in the number of neurones during the post-embryonal growth of the animal. I was

---

[1]) So far only a preliminary communication has been published: Der Einfluss der Trainieren auf das morphologische Bild des motorischen Nervensystems Hygica 1917 (LXXIX).

accordingly compelled to investigate more closely the post-embryonal growth, especially that of the peripheral nervous system.

When these investigations were planned and also during the time when the greater part of the work was being carried out, I was quite unacquainted with the comprehensive American literature connected with this subject, especially the publications of "The Wistar Institute of Anatomy and Biology". It is only a month since I learned about this during a visit to the Central Institute for Brain Research at Amsterdam for purposes of study. For the opportunity of doing so, for the extreme kindness shown to me and for much good advice and valuable criticism I wish to express my most cordial thanks to Dr. ARIËNS KAPPERS and Dr. B. BROUWER. During this journey I also stayed with Prof. J. BOEKE at Leyden and I am deeply indebted to him for his exceedingly cordial reception and very valuable and pertinent criticism. I am also much indebted to my chief, Prof. J. LUNDGREN, for his kindness in revising the English of the manuscript.

The results I obtained in investigating the post-embryonal development of the nervous system confirm in certain points the results obtained by others, especially by "The Wistar Institute of Anatomy and Biology", but on what appear to me to be the most important points my results differ essentially from those of former investigators of this subject. I have attempted to find the causes of this difference and have discovered that they lie in the different methods of investigation that have been used. Previous investigators of this question worked with methods for the staining of medullary sheaths and have determined the number of medullated nerves, whereas I have worked with neurofibril impregnation methods and have determined the number of nerve fibres.

Material and methods.

The majority of the species of animals used in my investigations have, as far as I can find in literature, not been previously subjected to a morphological study of their post-embryonal growth. This was a cause of great trouble to me. It would of course have been more advantageous to use an animal that had been carefully investigated before, when it was a question of explaining something that was essentially new. A very convenient animal of this kind is *Mus norwegicus albinus*, which has been the subject of numbers of detailed investigations concerning its post-embryonal growth at "The

Wistar Institute" and other places. I too shall probably pass on to this animal if I have occasion to continue the present investigations. Although I was unaware of these investigations on *Mus norwegicus albinus*, I have, however, amongst my material a species that is rather closely related to it, namely *Mus rattus* — a male and a female specimen, and their eleven (11) young ones; of the young ones, however, only three (10, 20 and 30 days old respectively) have been investigated up to now. My material consists, in addition, of 58 specimens of *Mus musculus albinus* (of ages ranging from 24 hours to over 2 years). Among these 58 there are several litters — thus, for instance, a male and a female, each over two years old, with several generations of their progeny, 42 altogether. I had also 22 specimens of *Bos taurus* — (half of them two weeks old and the other half over three years — only n. trochlearis and n. oculomotorius were investigated), 5 specimens of *Canis familiaris*, (the two parents and three young ones 6, 17 and 60 days old respectively), a number of specimens of *Felis domestica* (only n. trochlearis and n. occulomotorius have been investigated so far)[1]. Among cold-blooded animals there were 28 toads (*Bufo vulgaris*) of different lengths, ranging from 1,6 to 9,8 cms. from nose to tail — but the number of those that are near the minimum and maximum dimensions is larger than those in between.

The columna vertebralis with its spinal cord and spinal nerves (even including the spinal ganglia of *Bufo*, *Mus musculus* and *Mus rattus*), the central nerve system with the attached sub-dural parts of the spinal and cranial nerves of *Canis* and *Felis* and the subdural parts of nn. trochleares and oculumotorii of *Bos* were fixed in a twenty per cent formalin solution. Previous to this convenient spinal ganglia and pieces of the medulla spinalis had been taken out for fixation in FLEMMING's liquid. The material that had been fixed in FLEMMING's liquid was imbedded in paraffin and was partly cut into sections 3—5 μ thick, which were stained with the iron-alum-hematoxylin of HEIDENHAIN and eosin. The material that had been fixed in formalin was impregnated in pieces according to my modifications[2]) of BIELSCHOWSKY's method of silver impregnation,

---

[1]) I shall give a more detailed account of these matters in a subsequent and more extensive publication.

[2]) AGDUHR, ERIK, Ueber Stückfärbung mit BIELSCHOWSKY's Silberimprägnationsmethode. Einige Modifikationen. Zeitschr. f. wiss. Mikrosk. u. f. mikr. Techn. Bd. 34. 1917.

with the addition that the impregnation in a thirty per cent. $AgNO_3$ solution was made specially long — over ten days and nights. The impregnated pieces were imbedded in paraffin and were cut into conveniently thick sections, 5—15 μ. A number of spinal ganglia were cut in unbroken series of sections, 10—15 μ in thickness. Cross sections were placed on the sub-dural parts of the spinal nerves, partly close to (centrally of) the spinal ganglia and partly close to the spinal cord. In the preparation, in which the spinal cord and the spinal ganglia had been fixed in situ in the canalis med. spinalis, cross-sections were cut right from the caudal end as far in the direction of the cranium as the sub-dural part of the nerve roots had a caudal course — this was, as a rule, up to the posterior third and the posterior half of the thoracal vertebral column. The rest was cut into sagittal sections, during which the microscope was used to verify that conveniently situated parts of the segmental nerves were present in the sections. These sections were made 5—10 μ thick. In determining the number of nerve fibres in the cross sections I used a LEITZ microscope (tripod G.H.) with a cross-table, an oil-immersion $^1/_{12}$ a, and an ocular IV (LEITZ) with the enclosed squared glass plates. It appeared to be necessary to work with such a great magnifying power in determining the number of nerve fibres in order to be able to disintegrate those parts of the preparation in which the nerve fibres were most close, especially in the young animals. Before beginning to count, the square-ocular and the cross-table were adjusted so as to prevent as far as possible unexpected displacements and miscalculations arising from these. Repeated calculations with the same preparations have also shown that the errors in calculation that we are concerned with are small — always less than ten per cent, as a rule not more than five per cent. At first I attempted an approximate method in deciding the number of nerve fibres in the cross-sectioned nerve roots. I counted each nerve fibre in a few hundred squares and found the average number. I then counted the number of squares in a cross-section and multiplied this by the average number. This method appeared, however, to give values that were too uncertain, because nerve fibres of different thicknesses were very unevenly distributed. In order, therefore, to obtain sufficiently exact values, I was thus compelled to count every nerve fibre in the whole cross-section — a method that was certainly troublesome, but necessary in this case, especially with young animals. In counting I always began at the top and at the left, both in the preparation and in the field of the squares, taking care that all the nerve fibres which

were situated on the left and at the top beneath the lines were counted.

A number of spinal ganglia and pieces of the spinal cord (fixed both in FLEMMING and ZENKER liquid and B. impregnated) were arranged in unbroken series for investigation of the figures of cell divisions (sections from 3—5 μ in thickness). Some spinal ganglia with dorsal and ventral roots and a small piece of the spinal cord (all B. impregnated) from animals of various ages were arranged in unbroken series (longitudinal sections of the roots from 5—10 μ in thickness) for investigation as to the occurence of *T*- and *Y*-divisions and figures of growth of the nerve fibres.

The post-embryonal increase in the number of the nerve fibres in the dorsal and ventral roots of the spinal nerves.

With regard to the general growth of whole animals from birth to maturity (or at least during the period of active growth) works have been published on *Gallus domesticus* (MINOT [1]), 1908) *Mus norwegicus albinus* (DONALDSON [2])), *Lepus cuniculus* (MINOT [1]), 1908), *Cavia cobaya* (MINOT [1]), 1891), *Canis familiaris* (ARON, 1911 [1])), *Homo caucas* (ROBERTS, 1878 [1]) and others) and *Homo mongol.* (MISHINA, 1904 [1])), etc. All those who have studied growth have also acknowledged and laid stress on the need for an analysis of the total growth into its components — the organs and their elements the cells. Numerous investigations of the post-embryonal development of the organs and even of the cells have already been published by DONALDSON, HATAI, NAOKI and others. On the other hand, as far as I could find from the literature, no investigation of a post-embryonal growth of the number of axons in the nervous system seems so far to have been published. It is certainly true that there are numerous investigations on the number of nerve fibres in the dorsal and ventral roots of the spinal nerves and in a number of cranial nerves both in full-grown animals and in animals of different ages (especially *M. norwegicus albinus*), by DUNN, HARDESTY, HATAI and others, and in *Homo* by STILLING, INGBERT and others, but they have all been carried out with the help of staining methods for medullary sheaths and so cannot afford

[1]) Quoted from DONALDSON, H. H. An anatomical analysis of growth. Trans. of the 5th. International Congress of Hygiene Demography held at Washington D. C. Sept. 23—28. 1912.

[2]) DONALDSON, H. H., WATSON J. B. and DUNN, E. H. 1906. A comparison of the white rat with man in respect to the growth of the entire body. Boas Memorial Volume, New York.

any information about anything but the number of the medullated nerve fibres under different circumstances. As far as the post-embryonal growth in the number of axons is concerned, these investigations, which in themselves are in many cases very fine pieces of work, afford no information, but with this method one can, of course, only obtain a knowledge of the number of medullated axons, and the total result is that they indicate a gradual process of myelinisation, which is even stated by DONALDSON [1]): "The increase in the number of myelinated fibres in the spinal root with advancing age is due mainly to progressive myelination. Both roots at maturity still contain functional fibres without myelin sheaths (RANSON '06)."

During the progress of the work of counting the number of nerve fibres in the roots of the spinal nerves in the animals I investigated, it soon appeared that it was impossible to get reliable numbers as to the conditions of the nerve fibres in specimens of different ages by counting those in the roots of a single or a small number of spinal nerves. For fairly great displacements and individual variations occur, and these prevent the values from being as good as would be desirable, if only a small number of nerves are taken into consideration. On account of this and also in order to obtain an insight into the distribution of the axons in the different regions I have, in most animals, counted each spinal nerve on the same side and in certain specimens on both sides. As I intend to give a more complete and detailed account of these matters in a future work, I merely include here some totals from a part of the calculations in question.

By calculating the number of nerve fibres in the same section of the root and by using the method of fewest squares for the values, it has been shown that the percentage of error in the dorsal roots of very young animals (from four to ten days old) has not exceeded $\pm$ 10, and that for other places it is, as a rule, about $\pm$ 2. (In the dorsal roots of the spinal nerves the nerve fibres are situated very close together in young specimens, so that one has to work with thin (5 μ) sections and strong light in order to obtain exact results). The totals of the dorsal and ventral roots of the spinal nerves given in the tables below are thus to be considered as exact within the limits of the percentages mentioned. That there is thus a post-embryonal increase in the number of nerve fibres in the dorsal and ventral roots is shown with all the clearness that could be desired

---

[1]) DONALDSON, H. H. The rat, reference tables and data for the albino rat and the Norway rat, 1915, Philadelphia.

1. **Table** showing the total numbers of axons in the dorsal and ventral roots of animals of various ages in the same species and of different species.

Species.	Age in days or length in cms.	Total number of axons in all the roots of the spinal nerves.		Relation between the numbers in the dorsal and ventral roots.	Average total.		Percentage of increase.		Remarks.
		ventral roots.	Dorsal roots.		V. r	D. r.	V. r.	D. r.	
ufo vulgaris.	1.6	3603	4368	1.2 : 1					
" "	1.7	3380	4580	1.36 : 1					
" "	1.7	2947	4156	1.4 : 1					
" "	1.7	3242	4312	1.3 : 1					
" "	1.8	2937	4025	1.3 : 1	3281	4357			
" "	1.8	3891	4399	1.1 : 1					The average numbers for the most different sizes and ages of animals are not reliable, because the increase in the axons that is shown in the table does not proceed at an equal pace during the whole period of growth.
" "	1.8	3661	4367	1.2 : 1					
" "	1.9	3130	4650	1.5 : 1					
" "	2	2742							
	1.77 ←	average	→	1.3 : 1			78	93.8	
" "	3	4325	6129	1.4 : 1					
" "	4.5	5065	6614	1.35 : 1					
" "	5.8	5209	6647	1.27 : 1					
" "	6.8	5284	7824	1.48 : 1					
" "	7.9	5986	7783	1.3 : 1	5854	8276			
" "	9.4	6293	9222	1.46 : 1					
	8,03 ←	average	→	1.41 : 1					
us rattus ♂	about 700	53260	94109	1.76 : 1	53260	94 109			
" " ♀	" 350	38906	78466	2 : 1			116.9	79.3	
" " ♂	10	24554	52469	2.13 : 1	24554	52469			
" " ♂	30	29252	51338	1.75 : 1					
" " ♂	40	30739	57240	1.86 : 1					
	226 ←	average	→	1.9 : 1					

2. Table showing the total numbers of axons in the dorsal and ventral roots of animals of various ages in the same species and of different species.

Species.	Age in days or length in cms.	Total number of axons in all the roots of the spinal nerves. ventral roots.	Dorsal roots.	Relation between the numbers in the dorsal and ventral roots.	Average total. V. r.	D. r.	Percentage of increase V. r.	D. r.	Remarks
Mus musc. var. *albus.* ♂	Days 550	23075	48880	2.11 : 1	23067	48639			
„ „ ♀	550	23060	48399	2.09 : 1					
„ „ ♂	189	19588	38122	1.94 : 1					
„ „ ♀	189	18586	37116	1.99 : 1					
„ „ ♂	151	16523	35097	2.12 : 1					
„ „ ♂	77	16215	33888	2.09 : 1			80	105	
„ „ ♂	49	15414	27279	1.76 : 1					
„ „ ♂	25	14236	26136	1.8 : 1					
„ „ ♂	10	12825	23874	1.86 : 1					
„ „ ♂	10	12762	24190	1.89 : 1					
„ „	4	12431	23824	1.9 : 1	12814	23715			
„ „	4	12497	23311	1.86 : 1					
„ „	4	12936	23432	1.81 : 1					
„ „	4	13432	23663	1.7 : 1					
	129	15970	31229	1.92 : 1	← Average				
Canis fam. ♀	Days about 2190	183188	393489	2.14 : 1	183188	393489			
„ „ ♂	„ 1277	139808	278879	1.99 : 1			72.7	73.9	
„ „ ♀	6	106072	226264	2.13 : 1	106072	226264			
„ „ ♀	17	134867	245089	1.81 : 1					
„ „ ♀	60	124401	237839	1.91 : 1					
	710	137667	276312	2 : 1					

by the above table, which also illustrates to some extent the magnitude of the increase. The increase in the number of axons is proportionately greater during the first part of the period of growth than during the latter part, which is probably not completed in any of the group of animals included in the table. It is interesting to

compare briefly the results arrived at by some of the previous investigators of this subject. The latter have, however, worked with myelins sheath staining methods and have determined the number of medullated nerve fibres in different states.

Dunn [1]) "A considerable increase in the number of medullated nerve fibres occurs during the early life of the albino rat". Dunn investigated the ventral root of *C* II in *Mus norweg. albinus.* The same thing is true, according to Hatai [2]) of the "albino rat" with regard to the ventral roots of *C* VI, *Th* IV and *L* II, and, according to Boughton [3]), with regard to n. occulomotorius in the same animal. Boughton's investigations (06) about cognate problems in the cat and Willems's [4]) in the rabbit point to the same conclusion.

Dunn states: "Ranson's records then are comparable with those presented now, and together they show that in regard to the second spinal nerve of the albino rat the number of medullated nerve fibres in both the dorsal and ventral nerve roots increases during the life of the individual, but that the greatest increase occurs before the sexual maturity or so-called puberty of the animal," and so on. It is thus shown that what is true in this respect for all the axons — as shown by the results of the calculations given in the above table — is also true for only the medullated nerve fibres. The percentage of increase obtained by using myelin sheath staining methods on the material in question is considerably larger than that arrived at by impregnation of the axons. This is due to the fact that the young animal has relatively considerably more axons free from medullary sheaths than the older one. This increase in the number of nerve fibres is decidedly larger in the dorsal than in the ventral roots, a fact which is seen most clearly when the comparison is based on the conditions in a rather large number of animals. This is not so striking in *Canis*, and *Mus rattus* shows an entirely reversed state of affairs. These apparent exceptions are, however, probably due to

[1]) Dunn, Elisabeth Hopkins. The influence of age, sex, weight and relationship upon the number of medullated nerve fibres and on the size of the largest fibres in the ventral root of the second cervical nerve of the albino rat. The Journ. Comp. Neur. Vol. 22. N°. 2. 1912.

[2]) Hatai, Shinkiski. On the increase in the number of medullated nerve fibres in the ventral roots of the spinal nerves of the growing white rat. J Comp. Neur. Vol. 13, 1903.

[3]) Boughton, Thomas Harris. The increase in the number and size of the medullated fibres in the occulomotor nerve of the white rat and of the cat at different ages. J. Comp. Neur. Vol. 16. 1906.

[4]) Willems, Edouard. Localisation motrice et kinesthesique. Les noyaux masticateur et mesencephalique du trijumeau chez le lapin. Le Neuraxe t. 12, 1911.

the fact that the numbers for these animals were based on specimens on a few investigations. The difference between the number of nerve fibres in the dorsal and ventral roots is comparatively greater in old than in young animals of the same species. I shall leave a more detailed discussion of the values obtained for a future and more complete account of the questions that are connected with this problem and shall pass on instead to an attempt to answer the following question:

How does a post-embryonal increase in the number of axons in the dorsal and ventral roots of the spinal nerves arise?

This question forces itself upon our attention when we find that the number of nerve fibres in the dorsal and ventral roots of the spinal nerves increases considerably with the growth of the animal. There may, however, be different opinions as to the manner in which this increase takes place, and this question certainly needs to be subjected to a comprehensive investigation. There are really two possibilities to be taken into consideration. *The increase must depend either on a T- or Y-formed division of nerve fibres, or on an outgrowth from the centre, from nerve cells* (neuroblasts) *that have been newly formed or are lying in reserve.* There is, of course, a third possibility which is, however, not very probable, namely, *that one nerve-cell has discharged two axons in the same direction.*

Does a division of the nerve fibres exist in the roots of the spinal nerves?

Most obvious is of course the supposition that we have here a cleavage (*T*- or *Y*-division) of the nerve fibres on the lines of the process, of which such fine examples may be seen in the peripheral part of the nerves and also in the central nerve system. A cleavage of this kind may be exceedingly frequent; thus, at Prof. BOEKE's in Leyden I saw a preparation which showed, among other things, a nerve fibre that was divided at one place into six branches. STEFANELLI[1]) describes and reproduces a preparation from the tongue of the chameleon, in which a single nerve fibre was divided into branches terminating in no less than thirty-five motory plates. During nerve regeneration after a section one may also see abundant examples of such division. See, for instance, the figures in CAJAL[2])

---

[1]) STEFANELLI, A. La piastra motrice secondo le vecchie e le nuove vedute. Annali di Neurologia Fasc. IV 1912. Quoted by BOEKE L. c. 3.

[2]) CAJAL, RAMON Y. Studien über Nervenregeneration (J. A. Barth, Leipzig) 1908

and BOEKE[1]). NAGEOTTE[2]) reproduces and describes spinal nerve-cells, in which a collateral leaves the axon quite close to the nerve-cell. This collateral terminates in a club-like swelling, which is situated inside the capsule of the same nerve-cell. N. is of the opinion that these collaterals are due to regenerative activity in the cell, with which CAJAL[3]) also agrees. BIELSCHOWSKY[4]) interprets these formations in another way; he includes them among the fenestrate cells and thinks that these processes have nothing to do with regeneration. RANSON[5]) has tried to discover an explanation of this phenomenon by means of experiments. The results given by these experiments have, without exception, indicated that these processes with club-like formations are not a product of regenerative activity in the cell. I have however, been unable to find in the literature any indication of the fact that *T*- and *Y*-divisions occur in the dorsal and ventral roots of the spinal nerves. As a working hypothesis for my continued investigations I took the possibility (which is, in itself, not at all probable) that the above-mentioned, or similar, processes with club-like formations might develop into axons and, in addition, the possibility that *T*- and *Y*-divisions might occur in the intra- and extra-medullar course of the ventral roots as well as in the dorsal roots, which would explain the post-embryonal increase in the axons there which is under discussion.

Silver impregnated dorsal and ventral roots of lumbal and sacral nerves in connection with their spinal ganglia, and a small piece of half the spinal cord on the same side from animals of different ages within the same species, were set up in unbroken series (10 μ thick). These series were well suited for studies of the figures of the growth that might possibly occur, and for investigations made with a view to answering the third possibility that had been advanced, namely whether one nerve cell, the axons of which form the spinal nerves, sends off more than one axon in the same direction. In investigating the preparation a cross-table was used and the microscope was

---

1) BOEKE, J. Studien zur Nervenregeneration II Verhandel. d. K. Akad. v. Wet. te Amsterdam. Deel XIX. N⁰. 5. 1917.

2) NAGEOTTE, J. Recherches experimentales sur la morphologie des cellules et des fibres des ganglions rachidiens Rev. Neurol. Paris. Vol. 15, p. 357.

3) CAJAL S. RAMON Y. Die Struktur der sensiblen Ganglien des Menschen und der Tiere. Anat. Heft. Zweite Abt. Bd. 16. 1907.

4) BIELSCHOWSKY, M. Ueber den Bau der Spinalganglien unter normalen und pathologischen Verhältnissen. J. Psych. u. Neur. B. 11, 1908. Leipzig.

5) RANSON, S. WALTER. The Structure of the Spinal ganglia and of the spinal nerves. J. Comp. Neur. Vol. 22, 1912.

provided with an oil immersion ($^1/_{12}$ a) and ocular four. The preparations were investigated in the most careful way step by step, but not a single example of a division of the nerve fibres could be discovered, either in the roots or in the continuation of the nerve fibres in the ventral horn through the spinal cord up to their root cells. I observed a few cases of spinal ganglion-cells which had the claviform processes mentioned above. These claviform formations were, however, always within the capsules. In no case, however, was I able to discover anything that could be interpreted as a division within the spinal ganglion of either the central axon or that which passes peripherally. I tried to test the negative results obtained from this investigation in another way, in order to obtain if possible a positive result. I made cross-sections of the silver impregnated material through the corresponding nerve roots on the

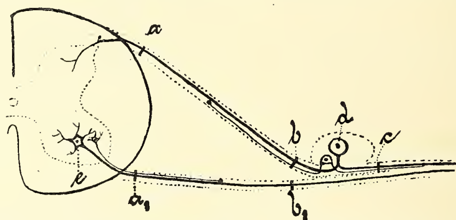


Fig. 1. Schematic representation of the neural growth in the dorsal and ventral roots of the spinal nerves. (a) Cross section at the place with the smaller and (b) cross section at the place with the larger number of nerve fibres in the dorsal root. (a_1) Cross section at the place with the larger and (b_1) cross section at the place with the smaller number of nerve fibres in the ventral root at a spinal nerve from a young animal. (c) Cross section peripherally of the spinal ganglion. (d) Spinal ganglion cell. (e) Ventral root cell.

other side, some close to the spinal cord (a and a_1; fig. 1) and others close to, but centrally of, the spinal ganglion (b and b_1; fig. 1). As the nerve roots that I investigated belonged to the lumbal and sacral nerves, which take part in forming the quada equina, the distance between the two cross sections was fairly great. The nerve fibres in the sectioned preparation were counted. There are three possibilities for the totals that we might expect to obtain for the numbers of nerve fibres. If we take a; a_1; b and b_1 fig. 1 to denote the number of nerve fibres, then $a = b$ or else $a > b$ or finally $a < b$. If $a = b$ then one could scarcely expect any appearance of axon-division or any figures of growth in the piece ab; if, on the

other hand, $a > b$; then one ought to succeed in finding figures of division of the nerve fibres in ab; if, finally, $a < b$, then, of course, one ought to be successful in finding figures of growth in ab. For the ventral root the corresponding line of argument is, of course, as follows: if $a_1 = b_1$, then there are probably neither figures of division nor growth in the piece a_1b_1; if $a_1 > b_1$, there are probably figures of growth in a_1b_1; if $a_1 < b_1$, there are probably figures of division in a_1b_1.

In not a single case did the calculations that were carried out give values for a that were greater than those of b, nor values for b_1 greater than those of a_1. The two values for each root in older animals were — apart from the possibility of error (about 2 %) — equally large. In young animals, on the other hand, as a rule $a < b$ and $a_1 > b_1$. As examples we may give the values for S. I (left side) in a puppy sixty days old: $a = 9209$, $b = 11487$; $a_1 = 3335$, $b_1 = 2623$.

If we correct these numbers according to the percentage of error in the calculation, we then obtain: $a = 9209 + 2\,\% = 9393$, $b = 11487 - 2\,\% = 11251$; $a_1 = 3335 - 2\,\% = 3268$, $b_1 = 2623 + 2\,\% = 2675$.

These figures are very clear evidence against the occurrence of any figures of division in the pieces ab and a_1b_1 respectively in the animals in question. On the other hand they indicate, of course, the existence of a not inconsiderable number of figures of new growth of axons. As far as I can see, I have found a small number of certain figures of new growth — there are undoubtedly more of these. These formations vary, of course, very greatly in their form. Such great differences in the number of nerve fibres in a and b and a_1 and b_1 are, however, not always found even in young animals; the differences are, as a rule, considerably less.

I could not discover any possible method of verifying more effectively the above-mentioned absence of any T- and Y-divison in the spinal cord and the spinal ganglia of the nerve fibres that pass into the roots, and have consequently to be content with the fact that in the above-mentioned preparation no figures of division could be detected in these parts. It might perhaps be said that the number of cells in the ventral horns and in the spinal ganglia compared with the number of axons in the ventral and dorsal roots respectively might afford a means of verification. This is not the case, however, as the number of the ganglion-cells in both the ventral horn and in the spinal ganglion is always considerably greater than the number of axons. (This is discussed in greater detail below.)

As this attempt to explain the increase actually existing in the number of nerve fibres in the dorsal and ventral roots of the spinal nerves as a result of a division of the axons was unsuccessful, I had to proceed to investigate other possibilities. The following possibility has now to be closely considered.

Is it possible that a nerve-cell may send off more than one axon in the same direction?

In order to be able to answer this question, I have carried out investigations in two directions. I first investigated carefully the preparations left over from the preceding series in which, of course, whole spinal ganglia and parts of the ventral horn were set up in unbroken series, and secondly I counted all the cells in a ventral horn of a 10 days' old and of a 360 days' old *Nus musculus var. albus* — between the exits for two spinal nerves from corresponding segments — and also all the cells in a spinal ganglion similarly situated in the two animals. The values obtained for the numbers of cells have been compared with the number of axons in the corresponding ventral and dorsal roots. One cannot, of course, expect to obtain in these two ways an answer to the aforesaid question that would be a priori absolutely certain, but it seems to me that they take us as far as we can generally go with morphological methods of investigation. A careful investigation (of the above-mentioned unbroken series) of the nerve-cells in the ventral horns and in the spinal ganglion did not produce a single figure to support the supposition of more than one axon being sent off in the same direction from the nerve-cell. It is certainly true that in the spinal ganglion there were nerve-cells which have processes beside the axon, but in no single case could these be followed up to a *T*-division. Spinal ganglion-cells of this sort are described by RANSON [1]) and others. I am of the opinion that this part of the investigation produced a negative result.

With regard to the calculations as to the number of cells, they showed that the number in the older specimen was certainly greater than in the younger one, but the difference is not so large compared with the difference in the number of axons in the same specimens. The number of axons seems thus to increase in a relatively higher degree than the number of ganglion-cells during the post-embryonal period. This fact seems, of course, to allow the possibility that the same nerve-cell might send more than one axon into, for instance, the dorsal and ventral roots. There is, however, another and more

---

[1]) L. c.

probable, even a certain, way of explaining this phenomenon, namely that in both the spinal ganglia and the central nerve system there are young cells which have not hitherto sent out any axons and which have the power of dividing. (This point is discussed more completely below). Such cells are considerably more numerous in young specimens than in older ones. I am thus of the opinion that this part of the investigation has not given any support either to an assumption of the possible occurrence of nerve-cells that send two axons into the dorsal or ventral root. Nor have I found in the literature any statement that points to this conclusion. It thus still remains to investigate other possibilities.

Do axons grow either from newly formed or from older nerve-cells lying in reserve.

This part of the investigation, which I tried to avoid as long as possible, in the hope of finding other explanations of the post-embryonal increase in the axons, has, however, gradually become the most central — the main part, on which the entire result is based. Observations made here and there in the preceding parts of the investigation indicated clearly that the solution to the problem was to be sought in this direction. Such a solution, however, does not quite agree with the hitherto prevailing view as to the development of the nerve system and the character of the neurones. There is, however, as we shall see, an abundance of facts to support this solution. I shall begin with an examination of the

Spinal ganglion.

HEIDENHAIN, M.[1]) writes: "Es würde gewiss für die Physiologie von grosser Bedeutung sein wenn wir behaupten könnten, dass wir mit der Anatomie der cerebrospinalen Ganglien im reinen sind. Dies ist jedoch nicht der Fall. Erstlich ist der Ursprung der erwähnten afferenten sympathischen Fasern leider nicht näher bekannt und zweitens befindet sich nach der Zählung von GAULE und LEWIS, ebenso von BÜHLER, in den Ganglien eine ausserordentliche Ueberzahl von Zellen deren Fortsätze wir noch nicht kennen".

Among the many investigations concerned, among other things, with the making of comparisons between the number of *medullated* nerve fibres in the dorsal root and the number of cells in the spinal ganglion belonging to the root, the following may be cited:

[1]) HEIDENHAIN, M. Plasma und Zelle. Jena 1911.

TABLE *a.*

Author.	Animal.	Nerve.	Number of nerve cells.	Number of modullated fibres in the dorsal root.
GAULE and LEWIN [1])	Rabbit	Cocc. I	20361	3173
HATAI [2]) (02)	White rat	C. VI	12200	4227
HATAI [2]) (02)	„ „	L. II	9442	1644
RANSON [4]) (08)	„ „	C. II	7721	2472

From this table we see that the number of nerve-cells is many times greater than the number of medullated axons in the dorsal root belonging to them. HATAI [2]) has investigated the relation between the large and the small cells in the ganglion spinale and has found that in the white rat the small ones are about 60 per cent of the total number. In the case of C II in the cat, WARRINGTON and GRIFFITH [5]) have found that the small cells in the ganglion compose about 70 per cent of the total number. HATAI has investigated the number of cells, both large and small, in the spinal ganglion and the number of medullated nerve fibres in the dorsal roots of C VI, Th IV and L II in animals of different ages of *Mus norvegicus albinus.* A résumé of the values obtained by him is given in the following table *b*°. (See table *b* following page).

With regard to the views of different writers on this subject as to the number of nerve fibres in the dorsal root and the number of cells in the spinal ganglion, all are agreed that the number of cells is considerably greater than the number of medullated axons. Those mentioned above have also investigated this relation only according to the medullary sheath stains. RANSON, who has *Cajal*-impregnated a spinal ganglion and the dorsal root appertaining to this from a dog, has shown the existence of non-medullated fibres in the dorsal root, which he supposes to issue from the small cells in the

[1]) GAULE und LEWIN: Ueber die Zahlen der Nervenfasern und Ganglienzellen des Kaninchens. Centralbl. f. Physiol. Heft. 15 u. 16, 1896.

[2]) HATAI S. Number and size of the spinal ganglion cells and dorsal root-fibres in the white rat at different ages. J. Comp. Neur. Vol. 12.

[3]) HATAI, S. Preliminary note on the presence of a new group of neurones in the dorsal roots of the spinal nerves of the white rat. Biol. Bull. Vol. 3.

[4]) RANSON, S. W. Retrograde degeneration in the spinal nerves. J. Comp. Neur. and Psychol., Vol. 16. Quoted by DONALDSON l. c. (1915).

[5]) WARRINGTON, W. B. and GRIFFITH, F. On the cells of the spinal ganglia and of the relationship of their histological structure to the axonal distribution. Brain. Vol. 28. Quoted by Ranson. 1912. l. c.

spinal ganglion. R. writes: "It is to these non-medullated fibres, the axons of the small spinal ganglion cells, that we are to look

TABLE *b*.

Weight of the body		Total number of cells.	Large cells.	Small cells.	Relation between large and small cells.	Medullated axons.	Relation between the medullated axons and the cells.	Relation between medullated axons and the large cells.
C. VI	10,3	10996	2526	8470	1 : 3,4	1998	1 : 5,5	1 : 1,2
	24.5	9793	2395	7398	1 :·3	2569	1 : 4	1 : 0,92
	68,5	11772	3546	8226	1 : 2,3	3683	1 : 3,2	1 : 0,97
	167	12200	5080	7120	1 : 1,4	4227	1 : 2,7	1 : 1,1
Th IV	10,3	7142	1557	5585	1 : 3,5	607	1 : 1,1	1 : 2,5
	24,5	7068	1824	5244	1 : 2,9	863	1 : 8,2	1 : 2,1
	68,5	7611	2370	5241	1 : 2,2	1420	1 : 5,3	1 : 1,6
	167	7406	2902	4404	1 : 1,5	1522	1 : 4,3	1 : 1,2
L II	10,3	8315	1902	6413	1 : 3,4	723	1 : 11,5	1 : 2,6
	24,5	8200	2044	6156	1 : 3	911	1 : 9	1 : 2,6
	68,5	9514	2934	6580	1 : 2,2	1317	1 : 7,1	1 : 2.2
	167	9442	3677	5765	1 : 1,5	1644	1 : 5,7	1 : 2,2

for the explanation of the discrepancy between the number of spinal ganglion cells and medulated afferent fibres. If a count were made the number would probably closely approximate to that of the spinal ganglion cells." Thus RANSON thinks that in this way he has solved the problem quoted from HEIDENHAIN above. If, however, we examine the figure 15 that R. includes in his work, we see that all the black spots in this drawing cannot be axons, but that, if all points exist in the preparation, most of them are probably precipitates of silver. On the other hand a large number of these black dots, which one can with good reason assume to be axons, show traces of a medullary sheath. It is, however, difficult to decide such a matter when one has not seen the preparation in question, but only what is perhaps a skeleton drawing. My own investigations on this point show, however, that R. has gone too far when he writes "If a count of the afferent fibres were made, the number would probably closely approximate to that of the spinal ganglion cells."

It is true that in counting the nerve fibres on the silver impreg-

nated dorsal roots I have seen some non-medullated fibres, but they have never occurred in my preparations in as great numbers as R. seems to have seen them. A large number of these finer fibres have, as one finds on closer investigation, a medullary sheath, although rather a thin one. This fact has caused me to undertake a closer and renewed examination of the question of the relation between the total number of nerve fibres in the dorsal root and the total number of ganglion cells in the spinal ganglion belonging to this.

From the right side of a 3,5 years' old dog the spinal ganglia with their dorsal roots from Th VI, L IV and L VII were taken. After fixation and silver-impregnation (according to my modifications of the B.-method) the spinal ganglia were put in unbroken series of sections, 15 μ thick, and the cross-sections at *b* and *c* fig. 1 were made 10 μ thick.

The results obtained were as follows:

Th. VI.	Total number of ganglion-cells	= 8422
	,, ,, ,, nerve-fibres at *b*	= 6198
	,, ,, ,, ,, ,, *c*	= 6297
L IV.	Total number of ganglion cells	= 12181
	,, ,, ,, nerve-fibres at *b*	= 9003
	,, ,, ,, ,, ,, *c*	= 9311
L VII.	Total number of ganglion cells	= 29621
	,, ,, ,, nerve-fibres at *b*	= 23627
	,, ,, ,, ,, ,, *c*	= 23987

These figures show that, although each nerve fibre in the dorsal root is counted, one does not reach the total number of the spinal ganglion cells. This is also the case if one counts the nerve fibres situated immediately peripherally from the spinal ganglion. The slightly larger values of the latter nerve fibres are all within the limit error in calculation (± 2 per cent). Thus one cannot conclude from these figures that the nerve fibres which issue out of the spinal ganglion into the nerve are more numerous than those which form the dorsal root. It was noticeable that the medullary sheaths were more powerfully developed at *c* than at *b* fig. 1. On the strength of the results of my own investigations I wish to state that Ranson goes too far, and that the other writers who have worked with the method of medullary sheaths do not go far enough in their conclusions with regard to the relation between the number of ganglion cells and the number of nerve fibres in the dorsal root. Here, as in so many other cases, the motto "in medio veritas" applies. Thus, in spite of Ranson, we must take into account the fact that the

number of ganglion cells exceeds the number of axons and that this excess must have some significance.

From the silver-impregnated series we obtain an indication of the purpose of this excess in the number of cells. We find that, however intensively the spinal ganglia are impregnated — especially in young animals — there are, all the same, a number of cells that cannot be impregnated, in spite of the fact that the adjacent cells show the most splendid neuro-fibril structures. It is, however, not always the smallest cells that cannot be impregnated, but a number of average-sized ones as well, while others of the smallest and the average-sized ones show exceedingly fine impregnation. The question why this or that cell is not impregnated naturally arises. This is by no means the first time that attention has been drawn to the different powers for intensive impregnation shown by the spinal ganglion-cells. Even in his work on "Zell substanz, Kern und Zellteilung" and in the presentation volume to HENLE, FLEMMING points out that cells are stained to different degrees of intensity by the same colouring matter, and is of the opinion that this is due to greater or less density in the colourable fibres of which the protoplasm is constituted. FLESCH, GITISS, KOTLAREVSKY, KONEFF and MÜLLER [1]) and others have dealt with this subject more or less thoroughly. FLESCH and his pupils, and MÜLLER among others, have studied the capacity for staining possessed by the ganglion cells. KONEFF states that the different capacities for staining are not connected with certain species or cells with special morphological characteristics. The cells are large and small, of different shapes, and some of them are distinguished by their chromatic nucleus. For the two kinds of cells — the strongly and the weakly stained — this author suggests the names of chromophila and chromophoba ganglion cells. The author supposes that some of these different cells are in different functional stages and others are developed to different degrees. MÜLLER distinguishes a type of spinal ganglion cells that have, among other characteristics, strongly eosinophile protoplasm and nuclei rich in chromatin; these cells he takes to be developing forms. It is thus not only in silver impregnation, but also with ordinary nuclei and protoplasmic impregnations that this different intensity in the impregnation appears. With regard to these conditions in the BIELSCHOWSKY-preparation, they indicate to some extent, as has been mentioned, cells with elective neurofibril impregnations and to some extent cells in which no neurofibril

---

[1]) MÜLLER, ERIK: Studien über die Spinalganglien. Biolog. förening. förhandl. Bd. I. 1888—89. Stockholm. Other statements in the literature that touch on this subject are referred to here.

structures appear, but where the protoplasm has a marble appearance. The cells with the evident neurofibril structure may be of the most varying sizes and may also occur in different stages of development; this is shown, among other ways, by the fact that in mammals of post-foetal ages a few bi-polar cells are found in this group, besides the ordinary unipolar cells, (see fig. 12). The cells that are without any neurofibril structure, or have merely traces of this, are similarly of very different sizes, and on several of them I have found formations which could hardly be interpreted otherwise than by assuming that the cell is dividing amitotically. On the other hand I have not in a single case been able to observe any indications of amitotic division in a cell of the former type, in which the neurofibril structure was evident. The apolar cells also belong to this category.

In a number of preparations from the spinal ganglia of young animals (dogs) I have found colonies of nerve-cells situated within the same capsule. The number of cells in these colonies varied considerably. Fig. 4 shows one of these colonies with seven cells, in which at a few places protoplasmic bridges (bridging fibrils) go from one cell to the other; there are no processes, and the cells show a pale shade of colour; there is no neuro-fibril impregnation. The references in literature to this condition and a more detailed description of it will be given below. Traces of this difference in neuro-fibril impregnation which is found in the spinal ganglia are also seen in the central nerve system, although it is not so striking there.

These facts have led me to set up the following working hypothesis: The affinity of the neuro-fibrils in the nerve-cells to the silver salts (reducing power) seems to vary from being more or less powerful to total disappearance during certain metabolic or functional stages. The majority of the pale cells seem thus to belong to such an early stage of development that no neuro-fibrils have yet been fully developed in them.

We have now reached the heart of the problem of division, viz. the increase of the ganglion cells in the spinal ganglion. With regard to this problem HATAI [1]) writes as follows: "We can only say at present concerning the division problem that the nerve cells in vertebrates, as well as in invertebrates, have the centrosome and the sphare, which are regarded as the dynamic centres of the mitotic divisions, and, further, that this centrosome is able to take the first

[1]) HATAI, S. On the Presence of the Centrosome in Certain Nerve Cells of the white rat J. Comp. Neur. Vol. XI. N⁰. 1. 1901.

steps of division under certain forms of stimulation, as has been observed by some investigators; but in the normal state the centrosome in an adult cell presents slight morphological differences from that of the embryonic cell, which we interpret as the beginning of degeneration". HATAI comes finally to the conclusion that the only way to find out whether there is generally a division of ganglion cells in the spinal ganglion is to count the number of ganglion cells in corresponding ganglia in animals of different ages. HATAI counted the ganglion cells in *C* VII, *Th* IV and *L* II in four specimens of *Mus norwegicus albinus* weighing 10,3, 24,5, 68,5 and 167 grammes respectively. I have given a synopsis of the results of his calculations in Table *b* above. At the outset I wish to make this criticism on his calculations, namely, that he has contented himself with counting the number of ganglion cells in only one spinal nerve in each of the cervical, thoracal and lumbal regions. Great variation may exist in these, as I have had abundant opportunities of observing during my counting of axons. These variations may be so great that, in a species in which the total increase of the number of nerve fibres in the dorsal roots during post-embryonal growth is, let us say, 100 per cent., certain nerves in the few days' old individual may, in spite of this, contain more nerve fibres than the corresponding nerves in the full-grown animal.[1]) My continued investigations have also shown that a similar variation may be found in the number of ganglion cells in the spinal ganglion. In this case one has to investigate a rather large number of spinal ganglia in order to obtain reliable information by the method used by HATAI. On account of the values obtained by counting (Table *b*) H. concludes that "the total number of the spinal ganglion cells remains approximately constant between 10,3 and 167 grams, though individual variations in the numbers of the cells in corresponding ganglia exist. It can therefore be stated that this number does not increase or decrease with age." We must, however, note that the number of ganglion cells was throughout larger in the older specimens (Table *b*), although the excess in the numbers was not so great. HATAI puts these larger numbers of cells in the older individual within the limits of the variations. It seems as if he cannot admit the possibility that a division of cells in a spinal ganglion might occur. HATAI reveals this especially in his criticism of BÜHLER's[2]) observations. BÜHLER writes:

„Es kommt wie ich mich bei Frosch und Kröte und auch beim

[1]) Further details about this will be given in the more complete account.

[2]) BÜHLER, A. Untersuchungen über den Bau der Nervenzellen. Verh. d. Phys med. Ges. Würzburg. N. T. Bd 39, 1898 Cit. nach HATAI (1902).

Kaninchen überzeugen konnte, physiologischer Weise zum Untergang speziell der grossen Spinalganglienzellen. Die Degeneration verläuft in verschiedenen Formen und allem Anschein nach wenig rapid. Man siet in einem Spinalganglion des Frosches c.a. 20—25 untergehende Zellen, beim Kaninchen relativ noch viel weniger. Die verloren gegangenen Zellen müssen ersetzt werden und dies geschieht wahrscheinlich dadurch, das eine der kleinen durch Wachstum ihre Stelle einnimmt. Da nach dem frühesten Jugendstadium eine Vermehrung von Nervenzellen nicht mehr vorkommt, muss das Spinalganglion, um für die Zeit des Lebens funktionsfähig bleiben zu können, in der Anlage genügendes Ersatzmaterial in Gestalt von Reservenzellen mitbekommen. Genauere Untersuchungen hierüber zu machen, bin ich indessen noch nicht in der Lage gewesen." With regard to this HATAI states: "The above interpretation given by BÜHLER concerning the small cells cannot be accepted as far as white rats are concerned, for he regarded the small cells as replacing the degenerated large nerve cells; if this were the case, then the total number of the spinal ganglion cells must be decreased, but the preceding table shows that the total number is approximately constant."

I have observed in a number of cases in preparations from dogs that a number of the larger nerve-cells in the spinal ganglion show signs of being in process of degeneration, and in my opinion BÜHLER is right in saying that these degenerating cells are replaced by young cells which grow out in their place. HATAI's argument to the contrary: "If this were the case, then the total number of the spinal ganglion cells must decrease" proves nothing at all. It is even fairly certain that the degenerate cells are replaced by young cells, which grow out and, notwithstanding this degeneration, increase the absolute number of ganglion cells during the post-embryonal growth. As a matter of fact, HATAI has unconsciously proved this last point by his calculations (Table *b*), and his evidence in favour of it would certainly have been very much clearer if he had made use of greater material and had counted the cells in a larger number of corresponding spinal ganglia in the animal investigated.

The calculations I am making (which I have, however, not yet completed) of the number of ganglion cells in the spinal ganglia of animals of different ages in the same litter, seem to show that there really is an increase in the number of ganglion cells during post-embryonal life, although this increase is not nearly so large as the increase in the axons. My preparations have also afforded information as to the way in which this increase is brought about.

(*To be continued*).

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van de Heeren L. S. ORNSTEIN en H. C. BURGER: *„Statistiek van getallenreeksen"*.

Deze mededeeling zal in het volgende zittingverslag worden opgenomen.

De Heer I. K. A. WERTHEIM SALOMONSON biedt voor de bibliotheek ten geschenke aan een exemplaar van de dissertatie van Mevrouw E. S. RATU LANGI—HOUTMAN: „Over den invloed van den tonus op den tetanus".

De vergadering wordt gesloten.

ERRATA.

Zitt. Versl. XXVI p. 693 regel 2 van beneden: lees 0.99165 in plaats van 0.99265.

---

28 Mei 1919.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 22 FEBRUARI 1919.

DEEL XXVII.

N°. 8.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Missive van Zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 3 Februari 1919 n°. 441[1] Afd. K. W. met

verzoek om advies aangaande een aan den Minister gezonden request van den Heer Dr. C. U. Ariëns Kappers te Amsterdam, waarin deze een Rijkssubsidie vraagt voor de uitgave van een werk over de vergelijkende anatomie van het zenuwstelsel bij werveilooze dieren, bij gewervelde dieren en bij den mensch.

De Voorzitter stelt deze missive met het request in handen van de Heeren I. K. A. Wertheim Salomonson en E. D. Wiersma met verzoek om daarover in de volgende vergadering te adviseeren ten einde te voldoen aan het verlangen van den Minister om tijdig genoeg antwoord te mogen ontvangen, zoodat bij het opmaken der begrooting voor het jaar 1920 met het request eventueel rekening zal kunnen gehouden worden.

2°. Missive van denzelfden Minister dd. 8 Februari 1919 n°. 552/1 Afd. K. W. met verzoek om advies aangaande een aan den Minister ingediend request van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen, waarin deze een Rijkssubsidie vraagt voor de voltooiing der uitgave van de volledige werken van Christiaan Huygens, waarvan door haar zorgen reeds het 13e deel is verschenen.

Door den Voorzitter wordt deze missive met het request gesteld in handen van de Heeren J. Cardinaal, H. Kamerlingh Onnes en J. C. Kapteyn met verzoek hierover van advies te dienen in de volgende vergadering om de Afdeeling in staat te stellen tijdig genoeg haar antwoord aan den Minister te geven, opdat deze bij het opmaken der ontwerp-begrooting voor het jaar 1920 met het request eventueel rekening zal kunnen houden.

Aan den Heer Kamerlingh Onnes, niet ter vergadering aanwezig, zal kennis gegeven worden dat hij ten deze tot mede-adviseur is aangewezen.

3°. Missive van denzelfden Minister dd. 17 Februari 1919 n°. 551 Afd. K. W. met verzoek om advies aangaande het tot den Minister gericht request van de Commissie voor het Internationaal Embryologisch Instituut te Utrecht om toekenning aan die instelling van een jaarlijksch Rijkssubsidie van ten minste *f* 6000.—. De Minister zal bij het antwoord gaarne een overzicht ontvangen van de geldmiddelen, waarover het Instituut thans heeft te beschikken en van de verschillende uitgaven, die jaarlijks zijn te bestrijden.

De Voorzitter stelt de missive met het request in handen van de Heeren C. Winkler, G. van Rijnberk en H. J. Hamburger met verzoek om advies, uit te brengen in een volgende vergadering ten einde den Minister van antwoord te kunnen dienen.

4°. Van de Commissie van Uitvoering voor het Zoölogisch Insulinde-Fonds het volgende verslag:

Eerbeek / Amsterdam, 20 Februari 1919.

Aan het Bestuur der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

Gevolg gevende aan de bepaling van artikel 8 van de Statuten van het „Zoologisch Insulindefonds", hebben wij de eer verslag uit te brengen over de werkzaamheden van de Commissie van uitvoering gedurende het jaar 1918.

De Commissie ontving op 1 Februari 1918 van den Heer R. van Eecke, Conservator bij het Rijks-Museum van Natuurlijke Historie te Leiden, het verzoek om toekenning eener subsidie uit het Insulindefonds voor het uitgeven van twee gekleurde platen met afbeeldingen van „vlinders" in de „Zoologische Mededeelingen" van genoemd Museum. De afbeeldingen betreffen belangrijke vlinders, verzameld door den Heer Edw. Jacobson op het eiland Simaloer en op de Satelliet-eilanden.

Een derde, eveneens voor de publicatie benoodigde gekleurde plaat alsmede zwarte platen en tekstfiguren zullen door het Rijks-Museum voornoemd betaald worden, maar het kan bij de huidige hooge kosten van publicatie, vooral ook van gekleurde platen, niet verder gaan, zoodat de onkosten voor de beide resteerende platen uit anderen hoofde gedekt moeten worden.

Nadat onze Commissie een onderzoek ingesteld had naar den aard en de beteekenis der publicatie van den Heer Van Eecke, heeft zij bij schrijven van 9 Februari 1918 aan Uw Bestuur voorgesteld aan den Heer van Eecke voor het beoogde doel eene subsidie van *f* 350 toe te kennen.

Uw Bestuur heeft dienovereenkomstig besloten, waarvan wij mededeeling ontvangen mochten door Uwe missive van 19 Februari 1918, Afd. Bestuur N°. 6. Onzerzijds gaven wij hiervan dadelijk kennis aan den Heer van Eecke.

Intusschen is diens publicatie verschenen.

De Commissie van uitvoering voor het Zoologisch Insulinde-Fonds:

(get.) Max Weber, *Voorzitter.*
„ C. Ph. Sluiter, *Secretaris.*

Anatomie — De Heer BOEKE biedt eene mededeeling aan van den Heer ERIK AGDUHR: "*Is the post-embryonic growth of the nervous system due only to an increase in size or also to an increase in number of the neurones?*" (Second part).

(Mede aangeboden door den Heer WINKLER).

Mitoses.

In connection with these matters I have found specially interesting phenomena in the thoracic region of a puppy seventeen days old. The spinal ganglia were fixed according to FLEMMING's method, cut up in paraffin sections from 3μ to 5μ thick and stained with the iron alum hematoxilin of HEIDENHAIN. In these continuous series of sections I found a large number of mitoses — an approximate calculation showed that in a single one of these ganglia there were over two hundred mitoses. Figures 5, 6, 7, and 8 show how these mitoses appear in the preparation. One would be inclined at first sight to refer these mitoses, especially the ones reproduced in figures 5 and 6, to the large ganglion cells — the light field round the chromatin showing, of course, a rather diffuse transition to the rest of the protoplasm. Owing to the continuous series I was able, however, to follow the cells from one section to the other, and then I found that the real nuclei of these ganglion cells were not found in a stage of division, and that these mitoses must belong either to other small cells situated between the ganglion cell and its capsule or probably to cells that form the capsule itself. In fig. 7, on the other hand, merely from the sharp outline which the light field makes against the surrounding protoplasm it is clear that there can be scarcely any question of the existence of a mitosis in the ganglion cell — this was also confirmed by the investigation of the same ganglion cell in the preceding and following sections. In fig. 8 we have again an example of a cell which is going to divide mitotically, and which is situated outside the capsules of the surrounding ganglion cells. With regard to size it resembles most closely the cells in mitotical division in figures 6, 7, and 8, but on closer examination, for instance, if they are traced from section to section, one finds that it is surrounded by capsule cells. We thus seem to be quite justified in describing

this figure as a spinal ganglion cell at such an early stage of development that it had not lost its power of increasing in number through mitotical division. I found another mitosis of this kind in the series just mentioned. Among the other group of mitoses, namely those in cells that are situated inside or in the capsule of an older ganglion cell, my preparation shows at least a few forms in which one can clearly follow the capsule peripherally of the cell that is engaged in mitotic division and where the latter must therefore be situated beneath the capsule. There are thus good reasons to support the assumption that, even among this group of mitoses, some are to be referred to very young undifferentiated cells, which on good grounds — for instance on account of their position — can be assumed to develop into nerve cells. By far the larger number of mitoses are, however, undoubtedly to be referred to ordinary capsular cells. But is the difference between the capsular cells and the nerve-cells really so great? Are not the former perhaps to be regarded as matrix cells for the latter? I must leave these problems to a subsequent and more detailed account of this question and confine myself to saying that there are points in the preparation that support such an assumption [1]). These facts are all the more worthy of attention because, among the investigators who formerly looked for mitoses in spinal ganglia, FLEMMING [2]), DAAL and LENHOSSEK have been unable to show any in young animals. MÜLLER [3]), on the other hand, found them in new-born animals, but in no later age. The very large number of mitoses in the spinal ganglia shown in the present and other investigations of young animals clearly support the considerable post-embryonic increase in the number of capsular cells in this region, an increase that could scarcely be explained if the ganglia did not increase in number too. In my opinion the exceedingly great number of mitoses that are found in the spinal nerve-cells, according to what has been shown above, cannot possibly be explained by an increase in size merely of those spinal nerve-cells which were already present at birth. This is the less probable because the spinal ganglion-cells must decrease in number with the years if new ones do not grow out and replace all those that degenerate and die away during post-embryonic life. And this degeneration of the nerve-cells is admitted and shown by all the chief investigators of this problem.

---

[1]) See addendum!

[2]) FLEMMING, DAAL and LENHOSSEK. Quoted from MÜLLER E.

[3]) MÜLLER ERIK, Untersuchungen über den Bau der Spinalganglien. Nord. med. Ark. Stockholm. Bd. 23. 1891.

That such degeneration is rather common is also proved by the fact that no slight number of cells in a spinal ganglion of even a young animal show signs of degeneration. The new growth in this region has thus the task not only of replacing the ganglion-cells that have been destroyed by degeneration, but also of increasing their number. A fairly considerable increase of this kind takes places, as is shown above, during the animal's period of growth. To judge from my preparations, nature seems in this generation to make use of both mitotic and amitotic division. In no case have I been able to refer the cells that show the latter type of division to such small forms as those in which mitoses occur; the former cells seem to belong to remaining ganglion cells that are somewhat older and sometimes, at least, with a certain degree of development, for I have been unable to find fully developed processes among them.

Amitoses.

Besides the figures of mitoses one also sees in the preparations in question figures of cells which produce a strong impression of being engaged in direct division. As shown below one sees cells that seem to be in different stages of this division. The cells of this type, however, always belong to the young ones, to those cells (in the silver-impregnated preparations) that have taken a very slight amount of silver or even none at all during the impregnation.

The different stages of a direct division which are found in my preparations appear as follows: One sees cells, in which the nucleolus is being divided or has just divided (fig. 1*a* and fig. 2*b*) and where the two nucleoli are still in each other's immediate neighbourhood. The two nucleoli then move away from each other and the nucleus begins to show signs of incision in the middle (see fig. 3*b* and fig 2*b*). After this there follows a complete division of the nucleus, which is also frequently accompanied by a division of the protoplasmic body, fig. 3*a* and fig. 2*a*. Fig. 3*a* must be interpreted as a young apolar ganglion cell in which, after the nucleus had first divided into two, the protoplasmic body began to divide in the middle, after which the two nuclei again began a new division. The preparations in which these observations were made were particularly well fixed and impregnated, so that it is fairly certain that there was no possibility of artificial products. Another thing that further supports the idea of natural formations is the fact that these figures above-mentioned do not occur in such very great numbers. It is true that there are many nuclei of ganglion cells (among the smaller ones) which have two

or more nucleoli, but there are fewer that show signs of division.

I shall discuss at greater length below some of the literature concerning direct post-embryonic division of nerve-cells. I will only mention here that RODHE[1]) describes four differents types of amitotic division of the ganglion cells in full-grown evertebrates. PALADINO states that direct division is a very common way for young ganglion-cells in the higher vertebrates to increase.

In fig. 4*a* I reproduce a group of nerve-cells from a silver-impregnated spinal ganglion in a sixty days old puppy. In it the cells are packed close together into a formation shaped like a string of beads, lying within the same capsule. Between the cells at a few places one can also clearly see bridges of protoplasm, which connect cells that are close to each other. The series of sections of the spinal ganglia from this animal show numerous examples of similar groups (MÜLLER E.) of cells situated within the same capsule. I have obtained the impression, however, that they do not occur in equally great numbers in all the spinal ganglia of the same individual; similar groups of cells have been observed in puppies of six and seventeen days — but they were not so numerous as in the sixty days old animal[2]). In the 3,5 years old dog, among five spinal ganglia that were investigated, I did not come across more than a few of these groups of cells and in the five years old dog among a still greater amount of material, I did not succeed in finding such a group in more than a single place. It is thus an obvious assumption to regard these groups of cells as formations belonging to the post-embryonic growth of the spinal ganglia — forms produced by the spinal ganglion cells during the post-embryonic increase in their number.

In spite of the considerable number of works that have been published on spinal ganglia in the course of years, the information about these groups of cells to be found in this literature is exceedingly small. Before 1880, however, they had been observed by a number of investigators and were described most thoroughly by P. MAYER[3]). After that the subject seems to have been almost forgotten, until in 1889 and 1891 MÜLLER ERIK[4]) gave more thorough and valuable descriptions of similar groups of spinal ganglion cells within the same capsule. Since MÜLLER's description of these groups of nerve-cells they seem to have been neglected again in recent

1) RODHE, Ganglienzellkern and Neuroglia. Ein Kapital über Vermehrung and Wachsthum der Ganglienzelle. Arch. f. mikr. Anat. Bd. 47.

2) The sixty days old dog was rachitic.

3) MAYER, S., Arch. f. Psychiatrie, Bd. 6, 1876.

4) MÜLLER, E., L. c.

literature — I have not found a single mention of them in a whole series of recent publications on this subject that I have looked through. Müller gives the name of "*Cellkolonien*" to these groups of nerve-cells and distinguishes between regular and irregular colonies. "Die ersteren" — the regular ones — "sind nach aussen durch eine cirkelrunde Kapsel vom selbigen Aussehen wie diejenige, welche die grossen Zellen umgiebt, begrenzt; innerhalb dieser Kapsel finden zich zwei, drei oder vier Zellen sehr regelmässig wie Sectoren um einen Mittelpunkt geordnet". Müller also found bridges of protoplasm connecting the different cells of the colony with each other. I have not found in my preparations any colonies of cells which showed this regular arrangement of their cells, resembling a sector of a circle, although there are several figures of colonies in which the cells are very nearly equal in size; but in these cases they are situated side by side, although they do not always form such long rows as the one shown in fig. 4. Most of the colonies observed by me are quite clearly built up of cells that are different in size, and it seems as if one might place them all in the group that Müller describes as *irregular*. With regard to the significance of these colonies Müller writes: "Vielleicht steht das Vorkommen dieser Bildungen mit Regenerations-phänomenen in den Spinalganglien in Verbindung", but he points out that, as he had no opportunity of studying the processes of these cells, his statement on this point can only be a supposition. He continues: "So viel geht jedoch aus dem unbedeutenden Vorkommniss bei älteren Thieren von diesen Bildungen — Kolonien und Halbmonden — welche bei jungen Thieren zahlreich auftreten, hervor, dass sie Entwicklungsstadien von Ganglienzellen repräsentieren und ferner, dass die Entwickelung der Spinalganglien eine langsame ist, welche erst in späteren Zeiträumen von dem Leben des Thieres abgeschlossen wird."

In tearing preparations of older animals the same investigator found that the crescent-shaped cells that are situated within the same capsule as other ganglion cells, have no processes. The observations of mine, however, are not made from tearing preparations, in which one has of course always to reckon with the possibility of the removal of processes that have really been present, but are made from continuous series of intensely impregnated Bielschowsky-preparations, in which one can very easily look for these colonies section by section. In the series of sections from which fig. 4 is taken there is no trace of any processes. The spinal ganglion in question is intensely impregnated according to the method mentioned above. The impregnation is very successful; not only the axons,

ɪeuron



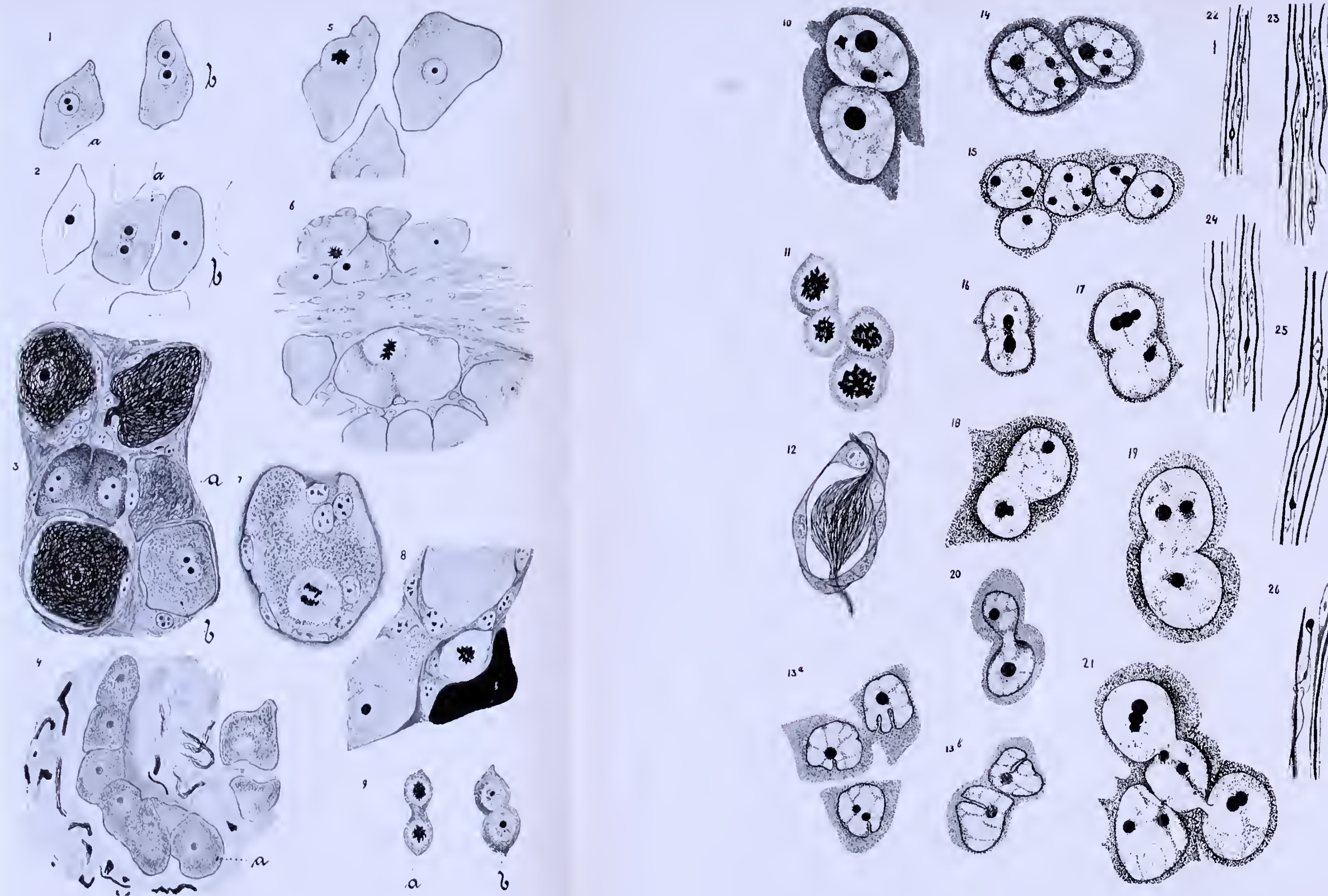






literature — I have not found a single mention of them in a whole series of recent publications on this subject that I have looked through. Müller gives the name of "*Cellkolonien*" to these groups of nerve-cells and distinguishes between regular and irregular colonies. "Die ersteren" — the regular ones — "sind nach aussen durch eine cirkelrunde Kapsel vom selbigen Aussehen wie diejenige, welche die grossen Zellen umgiebt, begrenzt; innerhalb dieser Kapsel finden zich zwei, drei oder vier Zellen sehr regelmässig wie Sectoren um einen Mittelpunkt geordnet". Müller also found bridges of protoplasm connecting the different cells of the colony with each other. I have not found in my preparations any colonies of cells which showed this regular arrangement of their cells, resembling a sector of a circle, although there are several figures of colonies in which the cells are very nearly equal in size; but in these cases they are situated side by side, although they do not always form such long rows as the one shown in fig. 4. Most of the colonies observed by me are quite clearly built up of cells that are different in size, and it seems as if one might place them all in the group that Müller describes as *irregular*. With regard to the significance of these colonies Müller writes: "Vielleicht steht das Vorkommen dieser Bildungen mit Regenerations-phänomenen in den Spinalganglien in Verbindung", but he points out that, as he had no opportunity of studying the processes of these cells, his statement on this point can only be a supposition. He continues: "So viel geht jedoch aus dem unbedeutenden Vorkommniss bei älteren Thieren von diesen Bildungen — Kolonien und Halbmonden — welche bei jungen Thieren zahlreich auftreten, hervor, dass sie Entwicklungsstadien von Ganglienzellen repräsentieren und ferner, dass die Entwickelung der Spinalganglien eine langsame ist, welche erst in späteren Zeiträumen von dem Leben des Thieres abgeschlossen wird."

In tearing preparations of older animals the same investigator found that the crescent-shaped cells that are situated within the same capsule as other ganglion cells, have no processes. The observations of mine, however, are not made from tearing preparations, in which one has of course always to reckon with the possibility of the removal of processes that have really been present, but are made from continuous series of intensely impregnated Bielschowsky-preparations, in which one can very easily look for these colonies section by section. In the series of sections from which fig. 4 is taken there is no trace of any processes. The spinal ganglion in question is intensely impregnated according to the method mentioned above. The impregnation is very successful; not only the axons,



EXPLANATION OF FIGURES.

Figures 1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 22, 23, 24 and 25 nre drawn after magnifying with LEITZ immers. $^1/_{12}$ and ocul. 4 and using REICHERT's drawing apparatus.

Figures 3, 7, 8, 12 and 26 are drawn after magnifying with ZEISS apochr. immers.; 2 mm. Apart. 1.3 and Comp. ocul. N^0. 6, with the help of Abbe's drawing apparatus.

Figures 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 and 21 are drawn after magnifying with ZEISS Apocbr. imm., 2 mm. Apart. 1.3 and Comp. ocul. N^0. 12, with the help of LEITZ's drawing apparatus.

Fig. 1. Repr. $^2/_3$. Gangl. spin. (Fix. FLEMMING staining Jhtx and Eos.) of a 17 days' old dog. *a*. Ganglion cell with division of the nucleolus just started. *b*. Nucleus dividing amitotically. This small distinct collum-formation between the nuclei is very rare.

Fig. 2. Repr. $^2/_3$. Gangl. spin. (Fix. and staining the same as the preceding) from the same section series as in fig. 1. *a*. Ganglion cell dividing amitotically. *b*. Ganglion cell in which the nucleus has two nucleoli.

Fig. 3. Repr. $^2/_3$. Gangl. spin. (Silver-impregnated according to the BIELSCHOWSKY-method with my own modifications) of a six days' old dog. *a*. Ganglion cell dividing amitotically. *b*. Ganglion cell with the beginning of amitotic division of the nucleus.

Fig. 4. Repr. $^2/_3$. Gangl. spin. (Impr. as in fig. 3) of a sixty days' old dog. *a*. Colony of apolar cells. Between the three cells in the middle there are bridges of protoplasm.

Fig. 5. Repr. $^2/_3$. Gangl. spin. (Fix. and staining as in fig. 1) of a 17 days' old dog The ganglion cell on the left imitates a mitosis. The mitosis in reality belongs to a capsular cell.

Fig. 6. Repr. $^2/_3$. Gangl. spin. (Fix. and stain. as in fig. 1) of a 17 days' old dog. The mitoses in the capsular cells or in cells subcapsularly situated, which have a tendency to become ganglion cells (?).

Fig. 7. Repr. $^1/_2$. Gangl. spin. (Fix. and stain. as in fig. 1) of a 17 days' old dog. Mitosis in the capsular cell.

Fig. 8. Repr. $^2/_3$. Gangl. spin. (Fix. and stain. as in fig. 1) of a 17 days' old dog. Mitosis in a very young ganglion cell.

Fig. 9. Repr. $^1/_1$. Spinal cord. (Fix. and stain. as in fig. 1) of a 24 days' old *Mus musculus var. albus*. *a*. Mitosis. *b*. Amitosis in a young nerve cell.

Fig. 10. Repr. $^2/_3$. Spinal cord (Fix and stain. as in fig. 1) of a 24 days' old *Mus musculus var. albus*. Syncytium or plasmodium of young nerve cells.

Fig. 11. Repr. $^1/_1$. Spinal cord (Fix. and stain. as in fig. 1) of a 24 days' old *Mus musculus var. albus*. Mitosis in the nerve cells.

Fig. 12. Repr. $^2/_3$. Spinal ganglion (Imprägn. as in fig. 3) of a 17 days' old dog. Bipolar ganglion cell.

Fig. 13. Repr. $^2/_3$. Spinal cord (Fix. and stain. as in fig. 1) of a full-grown M. musc. v. alh. An example of fairly frequently occurring indentations on nuclei of nerve cells; in my opinion these indentations have very probably no connection with amitotic division.

Fig. 14. Repr. $^2/_3$. Spinal cord (Fix. and stain. as in fig. 1) of a ten days' old *Mus musculus v. albus*. An example of a stage in amitotic (?) division in which the nuclei are quite separated but the protoplasmic body is not quite divided.

Fig. 15. Repr. $^2/_3$. Spinal cord (Fix. and stain. as fig. 1) of a ten days' old *Mus musc. var. albus*. Cell plasmodium or syncytium, situated just ventrally of the canalis centralis.

Fig. 16. Repr. $^2/_3$. Spinal cord (Fix. and stain. as in fig. 1) of a ten days' old Mus musculus v. albus. An example of a cell at an early stage of amitotic division.

Fig. 17. Repr. $^2/_3$. Spinal cord (as in the preceding figure). An example of direct division of the nucleoli and a somewhat later stage than in the proceding figure of direct division of the cell in its entirety.

Fig. 18. Repr. $^2/_3$. Same material as in the preceding figure. Young ganglion cells (neuroblast) engaged in direct division.

Fig. 19. Repr. $^2/_3$. Same material as in the preceding figure. A cell engaged in direct division.

Fig. 20. Repr. $^1/_1$. Spinal cord (Fix. and stain. as in fig. 1) of a 24 days' old *M. musc. v. alb*. A young nerve-cell in a far advanced stage of direct division.

Fig. 21. Repr. $^2/_3$. Same material as in fig. 16. Young nerve cells from the base of the dorsal horn in a very far advanced direct division into four.

Figs. 22, 23 and 24 are probable and figs. 25 and 26 certain figures of growth in the roots of the seventh lumbar nerve in a 17 days' old dog. The material is silver-impregnated according to my modifications of the BIELSCHOWSKY-method.

but the neuro-fibrils appear exceedingly distinct. One may thus postulate that if processes of the cells in this colony had really existed, they would also have clearly appeared in the sections. That these cells are likewise at an early stage in their development is indicated, in addition, by the fact that there are evident bridges of protoplasm between some of them. In this series of sections there are, however, colonies of cells which, as far as one can judge, are at later stages in their development — in these the different cells have processes, there are no bridges of protoplasm between them, and the future capsules of the separate cells exhibit the first traces of their development. In the cells of some of the colonies found in the 3,5 year old dog I have been able to show processes — there were also signs showing that these colonies were at a later stage of development than the one shown in fig. 4. In the five year old dog, as has been mentioned above, I found only a single colony of cells and no apolar cells. The results of counting the ganglion cells and their axons indicate, however, that there really are apolar cells here as well [1]). The purely morphological observations in the 3.5 and 5 year old dogs do not, of course, quite exclude the possibility of there being colonies of cells here as well at a very early stage of development, but with regard to this they indicate that in older animals these formations are relatively very rare. It is to be noted that such eminent investigators as KEY and RETZIUS [2]), SCHWALBE [3]) and of recent years RANSON [4]), are decidedly against the opinion that apolar cells are to be found in the spinal ganglia on the other hand. KÖLLIKER [5]), MÜLLER [6]) and others hold the opinion that such cells really exist. It would lead me too far from my real subject were I to discuss in detail the literature concerning apolar cells in the spinal ganglia. I must content myself with the references already given, and in connection with this point I wish to state that there are also investigators who have observed processes from cells in colonies similar to those described above; such are ARNDT [7]) and STIENON [8]) etc.

---

[1]) These and other explanatory details will be given more fully in a forthcoming and more complete work.

[2]) KEY and RETZIUS. Studien in d. Anat. d. Nervensyst. u. Bindegewebe, Bd. 2, 1876.

[3]) SCHWALBE, Arch. f Mikr. Anat. Bd 4; 1868.

[4]) RANSON, L. c.

[5]) KÖLLIKER, Handbuch der Gewebelehre, 5 Aufl., 1867, quoted from MÜLLER E.

[6]) MÜLLER, E., l c.

[7]) ARNDT, Archiv f. Mikr. Anat., Bd. 10, 1873.

[8]) STIENON, Annales de l'université libre de Bruxelles, 1880, quoted from MÜLLER E

If now we summarize the observations that have been made and given above on these colonies of cells and the processes of the cells that belong to them, it seems to be clearly shown *that some at least of the apolar cells in these colonies grow out to new neurones during the postembryonic growth of the animal.* On the other hand it does not seem to me so easy to decide how these colonies of cells arise. The way is perhaps that small cells from the capsule cells which have been developed mitotically, or are at least situated within the capsule, grow out into new ganglion cells, which are added to other ganglion cells already existing within the same capsule. Might not a relatively large ganglion cell, which in some respects is at an earlier stage of development — for instance, apolar — increase in number and become one of these colonies of cells by means of amitotic divisions. I have not been able to decide with certainty whether one or other or both of these methods of formations occur, though, as a matter of fact, there are signs in my preparations to support the idea that both these methods of formation may occur.

If, as seems to be shown above, a new formation of neurones in the spinal ganglion really occurs post-embryonally, one would and might, of course, also expect to find, during post-embryonic life, figures of growing axons in the peripheral nerves. I have examples of such claviform figures, which are quite evident in silver-impregnated preparations of, for instance, the dorsal and ventral roots of young dogs. More details of this will, however, be given below.

I consider that I have now shown that the cells in the spinal ganglia sufficiently explain the origin of the actually existing and fairly considerable post-embryonic numeric growth of axons in the dorsal roots of the spinal nerves. I shall now pass on to examine to some extent in connection with those matters the

Medulla spinalis.

There is but exceedingly scanty information about post-embryonic divisions of the ganglion cells of the central nervous system to be found in literature, and the existing accounts are not generally admitted to be correct. These accounts, however, take two directions. Some investigators maintain that the cells in this region divide by means of mitoses, others say that the usual method of increase in this case is that of amitotic cell division.

Mitoses.

Allen [1]) states that in the spinal cord of an "albino rat" twelve

[1]) Allen, Ezra. The cessation of mitosis in the central nervous system of the *Albino rat;* J. Comp. Neurol. Vol. 22, pp. 547—568, 1912.

days old he found (counting in mm³) 46 mitoses in the cervical, 75 in the thoracic and 14 in the lumbar region, but that in an animal twenty days old he could not show a single one.

Hamilton[1]) found in thirteen succeeding sections, 6,75 μ thick, from the medulla spinalis of a four days old rat mitoses in the ependyma and 64 situated extraventricularly.

Addison W. H. F.[2]) found in an "albino rat" nearly 22 days old mitoses "in the other granule layer" of the cerebellum.

Sclavunos G.[3]) has observed mitoses in the central nerve system of new-born dogs.

Sugita Naoki[4]), who has studied the post-embryonic growth of the cortex of the brain in the "albino rat", found that the value for the number of cells in this region in the ten days old animal was 1,9 $\times$ the value at birth, and that the number of cells increases further during the next ten days and is complete at twenty days. After this time the number of cells is practically constant and the number of cells in the fully-grown state is approximately twice as great as at birth. These calculations are based on the determination of the number of cells in only two layers at only one place and therefore their general value may be questioned. S. has, however, previously shown by measurements made at different places on the cortex of the brain that it undergoes the same relative increase in thickness between birth and maturity. S. considers that the values obtained may therefore with great probability be generalized for the whole cortex. With regard to the way in which such a post-embryonic increase in the number of cells in the cortex takes place one can, of course, herein supported by Allen, who in 25 days old specimens of the "Albino rat" found as many as 27 mitoses per mm³ of tissue in the cerebrum, consider that it is due to mitotic division.

The values given for the number of mitoses and for the increase in number of the cells in the central nervous system do not refer to any definite number of cells, but apply to all the cells taken together, and thus do not exclude an increase in the number of

---

[1]) Hamilton, Alice, The division of differential cells in the central nervous system of the white rat. J. Comp. Neur., Vol. II, pp. 297—320, 1901.

[2]) Addison, W. H. F., The development of the *Purkinje* cells and of the cortical layers in the cerebellum of the *Albino rat.* J. Comp. Neurol. Vol. 21, pp. 459—487.

[3]) Sclavunos, G., Ueber Keimzellen in der weissen Substanz des Rückenmarks von älteren Embryonen und Neugeborenen Anat. Anz., Bd. 16, 1899.

[4]) Sugita Naoki, Comparative Studies on the growth of the Cerebral cortex III, IV and VI. Journ. Comp. Neur. Vol. 29, 1918.

both glia and ganglion cells. The mitoses found in the central nervous system of young animals do not seem to refer to so-called neuroblasts (HIS)[1]), but the preparation indicates that KOELLIKER[2]) is right when, partly by reasoning and partly by direct observations, he comes to the conclusion that those "Keimcellen" that are in mitosis are undifferentiated epithelium-cells, which give rise to both glia and ganglion cells. SCHAPER[3]) arrives at the same result by his investigations of the course of differentiation in the central nervous system of the trout. We thus seem to be justified in postulating as a fact that as long as mitoses can be shown in the central nervous system a new formation of ganglion cells is also taking place.

In PRENANT[4]) we read as follows: *a.* "Les cellules nerveuses, en se différenciant, ont perdu le pouvoir de se reproduire, *b.* Les rares multiplications qu'il a été possible d'observer dans les cas de cicatrisation de portions du névraxe, appartiennent à la neuroglie (VALENZA, MARINESCO, MONTI); *c.* Enfin il n'est pas exclus que les quelques mitoses observées doivent également être assignées à la neuroglie". Among the investigators who do not seem to be able to admit the possibility of an increase of the neurones during post-embryonic life I want to mention also BIZZOZERO[5]) and MARINESCO[6]). In deciding such matter these authors seem more or less to have proceeded from the idée préconçu that the neurons have a very long life and are nearly perpetual. They consider that this is an absolutely necessary qualification if the individual is to perserve its psychical inheritance, to form associations of ideas, and for memory in general. A close study of suitable preparations of, for instance, the spinal cord from animals of different ages will soon convince us that this does not quite agree with the real facts. For in these preparations one finds not infrequently figures of ganglion cells which are degenerating as well as those which indicate generation. Nor is the literature on the subject without scattered statements about observations of such degeneration in the central nervous

---

1) HIS, Die Neuroblasten und deren Entstehung im embryonalen Mark. Arch f. Anat. u. Entwickelungsgesch. 1889.

2) v. KOELLIKER, Gewebelehre, Bd. 2, 1893.

3) SCHAPER, Archiv. für Entw. mech. der Organ. Bd. 5.

4) PRENANT, Histologie et Anatomie microscopique, t. II, p. 353, 1911.

5) BIZZOZERO, G, Accrescimento e rigenerazione nell'organismo (Conferénce du Prof. G. BIZZOZERO au Congrés international tenu à Rome en 1894). Voir, en outre, dans le 2e volume des oeuvres scientifiques du même auteur publié a Milano en 1905, et dans les Arch. ital de Biol. t. XXI, p. 93, quoted from PALADINO.

6) MARINESCO, G., La cellule nerveuse, Vol. 1, p 400, Paris 1909.

system. Among the investigators who have made such observations we quote RETZIUS, v. GEHUCHTEN, RAMON Y CAJAL, DEJERINE.

The presence of degenerating nerve elements in individuals that are growing also renders the possibility of a regeneration of such very probable. If there is no regeneration, the nerve elements would, of course, decrease during growth—a phenomenon that is not indicated by any recorded observations. The probability of generation becomes certainty, however, when one investigates suitable preparations from the central nervous system, for instance from the spinal cord of animals at various post-embryonic ages. Such preparations show numerous figures of new growth, which seem to me sufficient to explain not only how degenerated ganglion cells are replaced, but also how the increase in nerve fibres in the central roots arises, which I proved above to exist during the period of growth.

I have made suitable preparations for these investigations from the spinal cord of toads, mice, rats and dogs of different post-embryonic ages. The material was fixed either in FLEMMING's or ZENKER's fixing liquids and the paraffin sections cut from it were impregnated either with HEIDENHAIN's iron-alum hœmatoxylin or with ERLICH's acid hœmatoxylin. I have in addition, quite excellent BIELSCHOWSKY-preparations from this material.

In the hœmatoxylin-impregnated preparations from toads 2 cm. long (from neck to sacrum) and ten days old mice I found some — but very few — mitoses. On the other hand I have not found any certain examples of such mitoses in the older individuals of this species nor in six and seventeen days old dogs or in full-grown ones. In a young mouse 23 days old (*Mus musc. var. albus*) I found three appearances, which are reproduced in figs. 9 and 11. The figures are carefully drawn from preparations — which are from the material that was fixed by FLEMMING's method — and, at the first glance, certainly produce the impression of being mitoses, and it is possible, of course, that this is the case. A number of facts seem to me, however, to render this doubtful; these are first, that I have not found any more mitoses in this animal and, secondly, that in other mice of equal age, in which the material was fixed according to ZENKER's method — this method gave better and finer results — and impregnated in the same way, I have not found any trace of mitoses. In any case I have not found any appearance of a mitosis in preparations of the spinal cord of white mice more than 24 days old. My observations of mitoses in the spinal cord of growing individuals thus agree on the whole with those previously made by other in-

vestigators. As far as the animals investigated by me are concerned, an increase in the number of neurones by means of mitotic division of nerve cells seems thus to be concluded during the first month of post-embryonic life. DONALDSON's [1]) statement: "Moreover, in the case of the albino subjected to modifying conditions after 30 days of age, *the number of neurones is already complete at this age, so that the changes induced are again merely of size* [2]), unless some neurones should have been destroyed," is an assertion that I cannot agree with, as far as my material is concerned, and I am inclined to think that it does not describe the conditions in any animal. If one gives a strict definition of a neurone as being a nerve-cell with its processes, one of which is a axon and the others dendrites, and one adds to this the generally accepted condition, which by means of the evidence put forward about it, has almost become a certainty, namely that one cell in the ventral horn does not send more than one axon out into the ventral root and that the axons do not show any T-division on their way through this root, the considerable post-embryonic increase in the number of axons in this region, which has been shown above to be an actual fact, is a proof of the real existence of an increase in the number of neurones during a considerably longer period of development than the one given by DONALDSON.

The Wistar school (DONALDSON and others) have, as has been stated above, with their splendid statistical and experimental investigations found, by means of the methods they have used (staining of medullary sheaths), that post-embryonic growth in the nerve roots is principally merely an advancing myelinisation. The most important of all the changes that take place during this process, namely the post-embryonic growth in the number of axons, has quite escaped their notice. There was therefore no need to look for an increase in the number of neurons going on for a longer time postembryonally than the time during which the mitosis in the central nervous system showed clearly that an increase of this kind really existed. But is mitosis the only way in which an increase or a new formation of the cells in the central nervous system can take place?

Scattered statements in the literature exist to the effect that a new formation of nerve-cells may also take place by means of

---

[1]) DONALDSON, H. H., HATAI, S. and KING, H. D. Post-natal growth of the Brain under several experimental conditions. Studies on the albino rat. Journ. Nerv. and Mental Disease. Vol. 42, 1915.

[2]) The italics are mine.

Amitotic division.

Most investigators believe, with FLEMMING, that mitotic cell division is the only way in which a new growth in a healthy body can take place. And it is generally admitted that amitotic cell division occurs only in pathological tissues and, apart from this, only in cells that have a very short life. As has been pointed out above, the nerve cells are generally admitted to have a life equal in length to that of the individual; it is therefore obvious that any idea of an-increase in these by amitotic division must be out of the question. And I must myself confess that the idea of the permanence and high position of the neurones among the cells in general has become so deeply rooted through studying handbooks of medicine as well as the majority of special treatises on this subject that it is really difficult to get accustomed to the idea that there may be another possibility for the increase in the nerve-cells than mitotic division. If, however, one comes quite freely, as I did, to the problem of explaining the actually existing increase in the nerve-fibres during the whole post-embryonic development, and finds that this explanation has to be sought in an increase in the number of the neurones and not in a cleavage of the axons — and this at the same time as one finds signs of how a large number of the nerve cells are degenerating and dying away, then of course the new formation of ganglion cells, even after mitoses no longer occur in these regions, must be considerable. There are also in the central nervous system, as will be described in more detail below, appearances that seem to indicate that amitotic division of young cells really takes place there. Observations pointing in this direction have already been made and described in literature, although this information seems to have attracted but little attention.

ROHDE[1]) described in 1896 how ganglion cells in invertebrates increase by amitotic division. R. distinguishes four different types of such a division in these animals. As invertebrates have not been the object of my investigations in this matter, I cannot criticize R's statements, although some of them seem somewhat strange.

PALADINO[2]) (1914) describes amitotic division of cells in the central nervous system of vertebrates. P. states that the neurones degenerate and perish, and in connection with this there is a new development of nerve elements. There are good reasons for believing that this

[1]) ROHDE, l. c.

[2]) PALADINO, l. c.

development takes place by means of the activity of the ependyma and to a subordinate and limited extent by means of direct division. Where these elements exist they sink down and gradually disappear, sending off a first process, which grows and is lengthened, while others are also developed, so that gradually a multipolar cell arises. "Avant d'arriver à cette différenciation, ces éléments se divisent ça et là par scission directe, qui, ou bien se complète — et alors les nouveaux éléments restent en connexion avec un des prolongements — ou bien ne s'achève pas, et on a alors des formations gemellaires de divers degré. Ces faits peuvent s'observer le long de la moelle épinière d'individus d'âge différent et dans des préparations obtenues avec des séries de sections frontales et avec les divers colorations". PALADINO accompanies his statement with a figure to show how the epithelium-cells (ependyma) are further differentiated and move down into the surrounding tissue. On the other hand it is to be regretted that P. did not add a figure showing a cell engaged in direct division and that he did not give a more detailed description of the amitoses in the central nervous system observed by him.

The more thoroughly I study my preparations from the central nervous system of animals of various post-embryonic ages, the more convinced am I that PALADINO is right in his statements as given above. In these preparations of mine I have found, in a number of places, appearances that indicate, just as clearly as P.'s figure, a movement of cells from the ependyma into the surrounding tissue. These appearances are not, however, found continuously along the whole central canal but occur scattered here and there — this too agrees with P.'s statements. On the other hand, with regard to figures of direct cell division, I have observed a large number which, in my opinion, are to be interpreted in this way. And as a matter of fact I have obtained series of such appearances which show the different stages of a direct cell division. Notches, indentations and irregularities in shape occur very often in the nuclei of the nerve cells. If, however, such appearances be examined more closely, we shall find in most cases that they cannot be counted as figures of amitotic divisions. Thus figures which may with a great degree of probability be considered as stages of amitotic cell divisions do not occur in such abundance in my preparations of the spinal cord from the above-mentioned animals. Fig. 13 shows a type of these notches, which are very common in the nuclei of ganglion-cells, but which, as far as one can see, have nothing at all to do with amitotic divisions of the cells. Figs. 14 and 15 are cell-plasmodia or syncytia, of which one often sees examples, especially close to the ependyma. The

syncytium in fig. 14 was situated immediately beneath the ependyma, and that in fig. 15 in the dorsal horn of the spinal cord in a young white mouse ten days old. Figures *1b*, *2a*, *3a*, *9b*, 10, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, and 21 are pictures of different stages of young nerve cells engaged in amitotic division. These figures are all drawn from appearances in the spinal cord of a white mouse, the two first from an animal 24 days old and the others from 10 days old animals. In the material from toads and dogs that was investigated, similar appearances to those in the white mouse have been found to about the same extent. Fig. *9b* shows one stage of direct cell division which in my opinion is very rare; I myself have only found this single case. Fig. 20 shows the most advanced incision usually seen. Transitional stages between this and complete division of the nuclei occur exceedingly seldom. I obtained a particularly welcome opportunity through Professor BOEKE's great kindness during my visit to Holland last summer — of observing in eelembryos that it really is a fact that the appearance of amitoses is very rare in cases where the daughter-nuclei show only very narrow communicating bridges between each other. It is, as we know, generally recognized that the nuclei in the myogene tissue increase by direct division during a later stage of its differentiation into muscular fibres. Eel-embryos are particularly suitable for the study of this development (GODLEWSKI E. [1]). BOEKE's very fine preparations of these embryos showed in this region numerous nuclei engaged in amitotic division. It is worthy of note that here too, among this mass of nuclei in amitotic division, no stage could be discovered in which the nucleus showed a far advanced incision — and consequently a very small communicating bridge between the two daughter-nuclei. — Accordingly, after studying this material, I was inclined to assume that the last part of the process of division took place rapidly, without any narrow drawn-out communicating bridge between the daughter nuclei being formed. With this in view, it is not strange that I looked upon the appearances that form the basis of fig. 21 with a certain amount of surprise and doubt. Does this figure really show stages of amitotic cell division or are they only artifical products? The preparations were well fixed and as a matter of fact do not support the idea of there being artificial products. The nucleoli show a particularly great generative tendency. If we

---

[1]) GODLEWSKI, E. Ueber Kernvermehrung in den quergestreiften Muskelfasern der Wirbeltiere, Bull. intern. de l'Academie des Scien. de Cracorie, 1900.

[2]) GODLEWSKI, E. Die Entwicklung des Skelet- und Herzmuskelgewebes der Säugethiere. Arch. f. micr. Anat. B. 60, 1902.

add that this picture is the only one among my extensive material in which I found such far advanced incisions in the nuclei, these facts certainly support the idea that there really are natural formations. All these cells that show signs of amitotic division are very young. Some of them have no signs at all of processes (fig. 19 and 20), while others show indications of the beginning of a development of these (figs. 9*b*, 16, 17, 18, and 21). I can agree with PALADINO's statement quoted above that it is only before the differentiation of the processes that amitotic division takes place. On the strength of the appearances in this material I am of the opinion that the amitotic division proceeds in the way:

a) The nucleolus [1]) increases in length and begins to show incisions in the middle; this incision becomes deeper and deeper (figs 16 and 17) and finally one has a division into two nucleoli, each of which moves to an end of the nucleus of the cell, which has begun to become drawn out into a more or less oval formation. The nucleoli often exhibit a continued power of generation even after they have moved out to the future daughter-nuclei; it is this that causes us often to see in such daughter-nuclei either one nucleolus engaged in direct division or else several nuclei, a number of which may be seen moving out of the nucleus. I have not been able to decide with certainty whether the filaments (nuclear fibres) of the nucleus thereby have any specific function. It is a fact, however, that there are sometimes appearances which point to this being really the case (fig. 16 and 17). *b*) The drawn-out, elliptical nucleus begins to show signs of incision in the middle (fig. 16, 17, and 18). This incision usually takes place in the middle, so that the two daughter-nuclei are equally large. There are, however' figures showing the existence of a slight dissymmetry (fig. 18). The incision grows deeper, but is not as a rule, however, deeper than is shown in fig. 20, the connection between the nuclei being retained. Incision of the nuclei as far advanced as that shown in figs. 9*b* and 21 is exceedingly infrequent and these figures are the only ones I found of this type. There are also figures that indicate that the fibres of the nucleus may have something to do with the division of the nucleus. *c*) If the cell in which the nucleus divides amitotically is at a very early stage of development, a cleavage of the protoplasm does not, in most cases, ensue, but a cell plasmodium arises. These cells are

[1]) It should, however, be noted that such phenomena of new growth often appear in the nucleoli without the nucleus otherwise showing any signs of an amitotic division.

then situated most frequently in the neigbourhood of the central canal (fig. 15). If the cell is at a somewhat later stage of development, an incision of the nucleus is usually accompanied by a division of the surrounding protoplasm, which even at the same stage shows protoplasmic processes engaged in development (fig. 10). Cells of this last type are situated farther away from the central canal.

It is noteworthy that the structure of the nucleus in the cell engaged in amitotic division seems to be relatively intact in comparison with the corresponding condition in mitotic cell division.

With regard to the degree of the neurone formation I think that, on the ground of the reasons given above, I may go a step further than PALADINO when he writes: "En conclusion, le tissu nerveux ne fait pas exception à la loi, d'après laquelle tout tissu vit dans l'ensemble et se renouvelle isolément, pour remplacer les éléments qui se détériorent et se détruisent; en d'autres termes, le tissu nerveux, lui aussi, est un siège de *regénération* pour ainsi dire *restauratrice*." It seems to follow from what has been shown above that we are not dealing with merely a restoration of, but also with an increase in the number of neurones.

In order to complete this survey I shall add the results of my investigations of the

Appearances of growth

of the axons in the dorsal and ventral roots of the spinal nerves. As has already been shown above, the calculations of the number of the nerve fibres in cross-sections of the dorsal and ventral roots of the spinal nerves made at a, a_1 and b, b_1 text fig. 1 gave such values that one might expect that figures of growth might also really be shown in longitudinal sections of these roots. Silver-impregnated roots from some intact lumbal nerves of a 17 days old dog were set up in series of sections of suitable thickness and then the preparations were searched for figures of growth. These investigations showed the occurrence of a large number of figures of nerve-fibres free from medullary sheaths, whose ends are situated between the two section surfaces of the preparations; the shape of these ends shows that they could scarcely be due to the nerve-fibres having been cut off when the sections were cut. Of the different shapes that the ends of these nerve-fibres take I will only mention one here, namely, that which shows a swelling at the point; this swelling has in most cases a claviform shape (figs. 22, 23, 24, 25, and 26). The nerve-fibres in these cases were very fine, and showed repeated convolutions during their course (fig. 26). A large number of such nerve-

fibres with a winding course were to be found in my preparations, although I could not find the free end of all of them. Of these figures of growth at least those that form the basis of figs. 22, 25, and 26 may be considered as being absolutely reliable. These figures resemble, of course, those usually found in preparations of nerves engaged in regeneration (in the regeneration of a peripheral end of a nerve, being produced experimentally), BOEKE, RAMON Y CAJAL, etc. We thus arrive at the interesting fact that in the roots of the segmental nerves of fully intact animals as old as those we are dealing with there really exist neurites engaged in growth, and also a new formation of neurones — a phenomenon that must be considered of fundamental importance for a comprehension of the post-embryonal growth of the whole individual.

Résumé and conclusions.

The investigations of the material in question have shown that the post-embryonic growth of the peripheral nerves is not due — as far as the axons are concerned — solely to an advancing myelinisation (DONALDSON, etc.) and an increase in the thickness of the separate axons, but is also due to an increase in the number of axons. This increase in the number of axons is, however, relatively larger during the earlier than during the later post-embryonic period of the animal's development. It is of special interest to note that the results of counting the axons show that the increase in the number of axons goes on for a considerable length of time during the post-embryonic life of the individual (see the table). This post-embryonic period during which an increase in the number of nerve fibres in the roots of the spinal nerves takes place is many times longer than that during which mitoses can be shown in the spinal ganglia and the spinal cord.

Investigations carried out with the object of explaining the method in which such a post-embryonal increase in the number of axons arises have shown that it can *not* be explained by means of *T*- or *Y*-division of the nerve fibres or by assuming that the same nerve cell sends off more than one axon, but that the explanation must be sought *in a real increase in the number of the neurones.* This increase in the neurones seems to a great extent to be due to the fact that from young cells lying in reserve processes are developed, among which the so-called axons grow out in, among other regions, the roots of the nerves and the peripheral nerves. Probably the young cell material in the spinal cord comes from undifferentiated

cells in the ependyma and that in the spinal ganglia from undifferentiated cells among the capsular cells. These cells increase during their differentiation into ganglion cells, among others, partly by means of mitotic division and as far as I can see from my preparations also partly by means of amitotic division. This post-embryonic increase in the number of the cell-material is greater during the first month of post-embryonic life, but seems to continue afterwards as well. It is only during the first month of the post-embryonal life of the individual that one sees mitoses in these cells, but even during its continued life cell-division seems to occur; it then takes place amitotically. These new ganglion cells that have arisen by mitotic or amitotic division seem to develop into neurones, which not only replace older neurones that have been destroyed by degeneration (PALADINO), but also help to increase the absolute number of neurones.

Figures of growth for the axons have been shown morphologically in the dorsal and ventral roots of the lumbar nerves of a 17 days old dog [1]). These figures of growth have been, among various other shapes, claviform — thus under completely physiological conditions the same shape is found for the figures of growth of the axons as is usually found in experimentally produced regeneration of peripheral nerves.

Addendum.

It seems as if the post-embryonal increase in the neurones can be effected by external influences. Thus, for instance, it has appeared that in growing animals (among others *Mus musculus var. albus*) the increase in the number of axons can be intensified by suitably adapted and gradually increased training. If, on the other hand, the training has been made too intense, quite a contrary result is obtained — the number of axons has been found to be relatively less in these animals than in the controlling animals. During my continued investigations of this problem I have succeeded in showing, in, among other animals, a 3,5 year old dog, numerous transitional stages from indifferent cells — as large as small capsular cells — to fully developed ganglion cells. These different transitional stages have been examined with regard to the position, size, offshoots and neuro-fibrillar structure of the cells. These questions will be dealt with more fully in a later and more complete account.

[1]) This is the oldest animal that I have investigated so far with regard to this.

Anatomie. — De Heer Bolk doet eene mededeeling: *„Over de ontwikkeling van het Gebit van Elephas africanus.”*

In deel XIX van de Verhandelingen dezer Sectie van de Akademie heb ik de voornaamste anatomische bijzonderheden medegedeeld over een Fetus van Elephas africanus. Van ditzelfde Fetus heb ik een der helften van boven- en onderkaak gebruikt voor een mikroskopisch onderzoek naar den aanleg van het gebit, terwijl de andere helft voor het prepareeren van het skelet was gebruikt. Beide kaakhelften werden in een serie coupen ter dikte van 20 μ gesneden. Een bruikbaar resultaat leverde dit echter slechts voor de onderkaak op; ten gevolge der krachtige ontwikkeling van het skelet die reeds had plaats gegrepen, en door den aanzienlijken omvang van het object, mislukte de serie van de bovenkaak. De waarnemingen die ik omtrent den aanleg der tanden in de onderkaak doen kon, waren echter van dien aard dat ik in staat ben een tamelijk volledig overzicht te geven over den aanleg van het gebit. Ik geef dit in zeer verkorten vorm in de volgende bladzijden, de uitvoerige beschrijving zal elders geschieden.

Er waren bereids drie kiezen aangelegd, terwijl in het achterste gedeelte der tandlijst juist een eerste begin gemaakt was met den aanleg van het emailorgaan van een vierde kies. Deze laatste omstandigheid was een buitengewoon gelukkige, want hierdoor werden gegevens omtrent den allereersten aanleg der tanden bij den olifant verkregen, die het mogelijk maakten, meerdere verschijnselen, die zich voordeden bij de meer naar voren gelegen tanden, welke reeds verder in ontwikkeling voortgeschreden waren te begrijpen. En deze gegevens waren dààrom zoo welkom, omdat in het bijzonder de ontstaanswijze van het emailorgaan bij den olifant op zoo geheel andere wijze verloopt als bij de overige zoogdieren. Door de combinatie nu der verschijnselen bij den aanleg van het vierde emailorgaan waargenomen, met die bij de meer naar voren gelegen tanden, werd het mogelijk een volledig beeld van de ontogenie der olifantskiezen te ontwerpen.

In Figuur 1 is in een zestal schetsen de aanleg van het emailorgaan van een gewonen zoogdiertand schematisch weergegeven. Ik heb mij hierbij het achterste deel der tandlijst afgesneden gedacht, terwijl de snede door het midden van den aanleg van een email-

orgaan gaat. Schets *a* doet den aanleg van het orgaan in knopvormigen toestand zien, als een plaatselijke aanzwelling aan den onder-

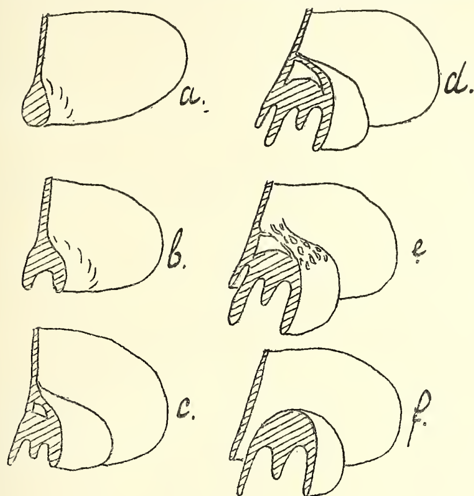


Fig. 1.

rand der tandlijst. In schets *b* is de aanleg klokvormig geworden, en begint hij zich van het overige deel der tandlijst scherper af te grenzen. In schets *c* is de aanleg nog zelfstandiger geworden, terwijl de emailnis en de laterale tandlijst ontwikkeld zijn. In schets *d* is de afsnoering van het orgaan begonnen, er is een mediale tandlijst ontstaan en de emailnis is ruimer geworden. In schets *e* is de laterale tandlijst doorzeefd gedacht als voorbereiding voor haar verdwijnen, terwijl het emailorgaan aan zijn linguale vlakte nog slechts door middel van een dunnen verbindingsboog met de tandlijst verbonden is. In schets *f* eindelijk is deze laatste verbinding verbroken, de laterale tandlijst is eveneens geheel opgelost; het emailorgaan, geheel vrij geworden van de tandlijst, is een volkomen zelfstandig lichaam geworden.

Dit korte overzicht van de ontwikkeling van het emailorgaan van een gewonen zoogdiertand, berustend op den ontwikkelingsgang zooals ik dezen in mijne „Odontologische Stndiën" heb leeren kennen, kwam mij gewenscht voor, om de tegenstelling met de ontstaanswijze van het orgaan bij den olifant beter tot haar recht te doen komen.

Deze ontstaanswijze is in beeld weergegeven in de zes schetsen van Figuur 2. Als in Figuur 1 heb ik mij ook hier gedacht het achterste gedeelte der tandlijst, waarbij de snede gaat door het midden van den aanleg van een emailorgaan. Aan de hand dezer schetsen zal een korte beredeneerde beschrijving van de ontwikkeling van zulk een orgaan gegeven worden.

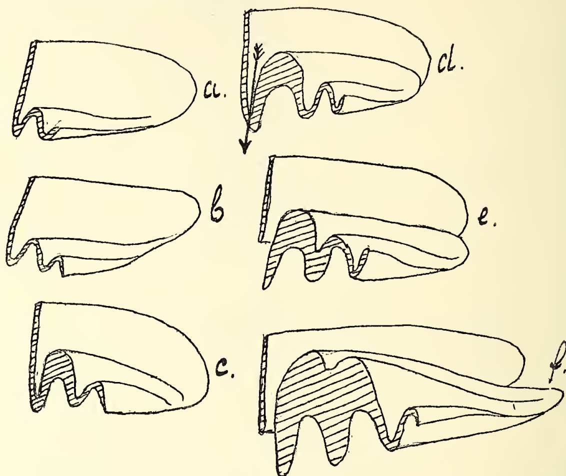


Fig. 2.

Als eerste aanduiding van zulk een ontwikkeling begint het onderste deel der tandlijst, door den vrijen tandlijstrand begrensd, zich in overlangs verloopende plooien te leggen. In schets *a* zijn anderhalve plooi ontwikkeld, in schets *b* heeft zich de vrije tandlijst nogmaals omgebogen en er zijn nu twee naast elkander liggende plooien gevormd. Naar achter toe worden deze plooien allengs vlakker, het geplooide veld gaat gelijkmatig in het achterste deel der tandlijst over, is nog niet scherp hiervan afgegrensd. Terwijl de tandlijst zelve ongeveer vertikaal gericht is, ligt het geplooide gedeelte meer in een horizontaal vlak. Evenals de tandlijst zelve, bestaat ook het geplooide veld uit een dubbele epitheelmembraan, van een differentieering van pulpacellen is nog niets te zien. Deze eerste naast elkander liggende plooien bepalen reeds het toekomstig relief van den olifantstand in bukko-linguale richting.

Bij de verdere ontwikkeling gaat nu het geplooide veld zich naar achter toe scherper van het overige deel der tandlijst afgrenzen,

terwijl zich in de meest mediale — dus eerst aangelegde plooi pulpacellen tusschen de beide bladen beginnen te ontwikkelen. Schets *c* heeft op deze phase der ontwikkeling betrekking. Deze pulpadifferentieering begint in het voorste deel der plooi, en zet zich geleidelijk naar achter voort. Terwijl dit geschiedt, begint nu het omgevend bindweefsel te woekeren door de tandlijst heen, en wel daar waar het niet geplooide deel der tandlijst in het geplooide overgaat. Deze plaats is in schets *d* door een pijltje aangeduid. Op deze wijze wordt het geplooide veld der tandlijst van het overige afgescheiden en wel volledig, zoodat het van nu aan een geheel zelfstandig onafhankelijk orgaan vormt.

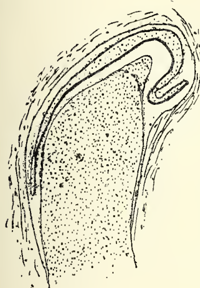


Fig. 3.

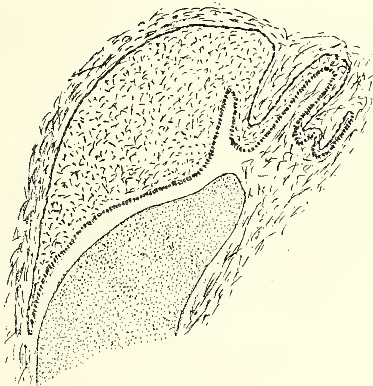


Fig. 4.

Dit orgaan is dus in werkelijkheid een stuk der tandlijst, en de bukkale rand ervan is inderdaad niet anders dan de oorspronkelijke vrije rand der tandlijst. Deze rand nu groeit nog verder uit en vormt, zooals uit de schetsen *d*, *e* en *f* blijkt, naast de beide bestaande nog een derde plooi.

Terwijl het nu zelfstandig geworden emailorgaan op deze wijze nog in bukko-linguale richting uitgroeit, schrijdt de pulpadifferentieering in dezelfde richting voort, en grijpt ook in de tweede plooi plaats.

Met de afsnoering is — en dit verschijnsel is van zeer groote beteekenis — de groei van het orgaan in lengterichting niet geëindigd, aan zijn achterrand blijft het in de lengte groeien, en de beschreven plooivorming en pulpadifferentieering volgen dit verlengingsproces op den voet. Het emailorgaan van een enkelen tand laat

dus alle phasen zijner ontwikkeling zien, het verst ontwikkelde gedeelte bevindt zich vooraan, naar achter eindigt dan het orgaan in een eenvoudige nog niet geplooide epitheliale dubbelmembraan. Bovendien is het linguale gedeelte steeds in ontwikkeling voor bij het bukkale deel.

Terwijl het bovenstaande elders uitvoeriger zal worden toegelicht, zijn in Figuur 3, 4 en 5 een drietal sneden door de achterste helft van den derden tandaanleg afgebeeld, die het voorgaande kunnen toelichten. Van deze sneden ligt die in Figuur 3 het meest naar voren, het bukkale deel van het emailorgaan bevindt zich rechts in de figuur. Het orgaan is van de tandlijst, die men in de Figuur boven het orgaan aantreft, afgesnoerd, en vertoont twee en een halve plooi. In de beide volledige plooien grijpt de pulpadifferentieering reeds plaats, de derde plooi is in dit niveau nog slechts in haar opgaand been aanwezig, en bestaat uit een epitheliale dubbelplaat. Vervolgt men den aanleg nu verder naar achter dan ontwikkelt zich geleidelijk het beeld in Figuur 4 geschetst. De pulpadifferentieering beperkt zich allengs tot de meest mediale plooi, de middelste plooi krijgt het karakter van een epitheliaal dubbelblad, dat zich bukkaalwaarts voortzet in het opstijgend been der derde plooi. Tusschen beide in vormt het orgaan nog een zeer laag, kort plooitje. Nog verder naar achter verdwijnt de pulpa geheel, de middelste plooi wordt onvolledig en een beeld ontstaat als in Figuur 5.

Ontwikkelingstoestanden van het emailorgaan als b.v. in Figuur 4 geschetst, zouden moeilijk te begrijpen geweest zijn, wanneer niet ook de aanleg van het vierde emailorgaan in het preparaat aanwezig was geweest. Dit orgaan bestond nog slechts uit door de tandlijst gevormde plooien, waarbij de eerste pulpadifferentieering in het voorste gedeelte tot een zeer klein gebied beperkt was. In Figuur 6 zijn drie doorsneden door den aanleg van dit orgaan geschetst. De snede *a* ligt het meest naar voren, hier vormt de tandlijst reeds een dubbelplooi, meer naar achter volgt de snede *b* met nog slechts een enkele plooi, snede *c* ligt weer meer naar achter, de tandlijst begint hier haar eerste plooi te vormen.

Wij zien dus dat aanleg en ontwikkeling van het emailorgaan bij den olifant geheel afwijken van die bij de overige zoogdieren en op een tot nu onbekende wijze verloopen. In plaats van de knopvormige aanzwelling die ons bij andere zoogdieren bekend is, ontstaat het emailorgaan hier uit een van de tandlijst afgesplitst stuk, dat bevorens geplooid was, en dat na de afsplitsing nog verder groeit zoowel in bukkale als in longitudinale richting, maar vooral in deze laatste.

Een niet minder merkwaardige eigenaardigheid treft men in de inwendige structuur van het emailorgaan aan. In een bijzonder

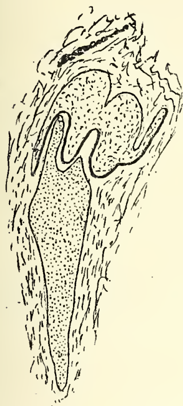


Fig. 5.

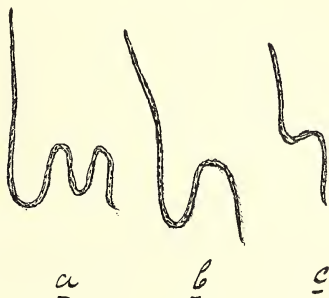


Fig. 6.

hoofdstuk mijner „Odontologische Studien I" is uitvoerig het voorkomen beschreven van een septum in het emailorgaan der zoogdieren. Dit septum is sagittaal gericht, en verdeelt het orgaan in een bukkale en een linguale helft. De wijze waarop dit septum ontstaat, en zijn betrekking tot de mesenchymateuze kiem van den tand, vormen een der grondslagen mijner dimeer-theorie van den zoogdiertand, volgens welke elke tand uit twee primaire elementen, elk homoloog aan een reptilientand, is opgebouwd. Het eene element — het protomeer — vormt het complex der bukkale knobbels, het tweede element — het deuteromeer — dat der linguale knobbels.

Het emailorgaan van den olifant wijkt nu in twee richtingen van dit algemeene type af. In de eerste plaats is het aantal septa talrijker, en in de tweede plaats staan deze niet in een sagittaal, doch in een frontaal vlak, zij volgen dus achter elkander.

Het aantal septa in het emailorgaan wordt bepaald door het aantal platen of lamellen waaruit de tand is opgebouwd. Telkens tusschen den mesenchymateuzen aanleg van twee platen in, bevindt zich in het emailorgaan een septum. Dit is een zeer belangrijk feit, want het geeft aanleiding tot de stelling dat dus elke plaat van de olifantskies, homoloog moet zijn met een primair element van de gewone zoogdierkiezen, en dat dus deze kies niet als een dimeer, maar als een polymeer object moet worden beschouwd. Beide boven-

genoemde feiten, — aantal en richting der emailsepta — openen in verband met een hypothese die ik vroeger reeds daaromtrent opgesteld heb perspectieven over de morphologische beteekenis van den olifantsmolaar. Alvorens echter op dit meer theoretisch gedeelte in te gaan, zal ik in 't kort de waarnemingen schetsen die ik over aanleg en ontwikkeling van den mesenchymateuzen tandkiem gedaan heb.

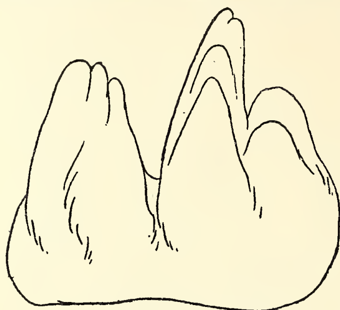


Fig. 7.

Vooraf ga de opmerking dat volgens GIEBEL's opgaven bij den afrikaanschen olifant de eerste tand bestaat uit vier platen, de tweede, derde en vierde uit zeven, de vijfde uit acht of negen, de zesde uit tien tot twaalf. Bij het door mij onderzochte object was nog geen begin gemaakt met de vorming noch van dentine, noch van email.

De mesenchymateuze aanleg der drie tanden heb ik op de gebruikelijke wijze in was gereconstrueerd en in de Figuren 7, 8 en 9 is het linguale aspekt dezer modellen geschetst, waarbij de voorrand van den tand in de figuur zich links bevindt. Een gedetailleerde beschrijving der modellen zal niet gegeven worden, slechts de voornaamste voor het verder betoog noodzakelijke feiten zullen worden genoemd.

Aan den mesenchymateuzen aanleg van elken tand is te onderscheiden een grondpapil, waarop zich de aanleg der lamellenpapillen verheffen, en op hun vrijen bovenrand dragen de meeste dezer weder den eersten aanleg der digitellenpapillen. Dit is een eerste feit waarop de aandacht gevestigd moet worden. Want hieruit blijkt dat de chronologische opvolging in den aanleg der den tand opbouwende deelen de volgende is: grondpapil of gemeenschappelijke basale massa, lamellenpapillen, digitellenpapillen. Deze laatste verschijnen dus het laatst, in tegenspraak alzoo met de hypothese van RÖSE over het ontstaan van den olifantenmolaar, volgens welke eerst zouden aangelegd worden de digitellen, deze zouden aan hun basis groepsgewijze versmelten en de lamellen vormen, en deze zouden op hun beurt basaal weder zich met elkaar verbinden. Gaat men nu het aantal lamellen na dat bij elken tandaanleg reeds tot ontwikkeling gekomen is, dan blijkt, dat de eerste molaar (Figuur 7) nog slechts twee lamellen heeft, en het begin van een derden aanleg vertoont, bij de tweede molaar

(Figuur 8) verheffen zich op den basaal-papil nog slechts vijf lamellen-papillen, terwijl de derde (Figuur 9) molaar nog slechts drie lamellen-papillen tot ontwikkeling bracht.

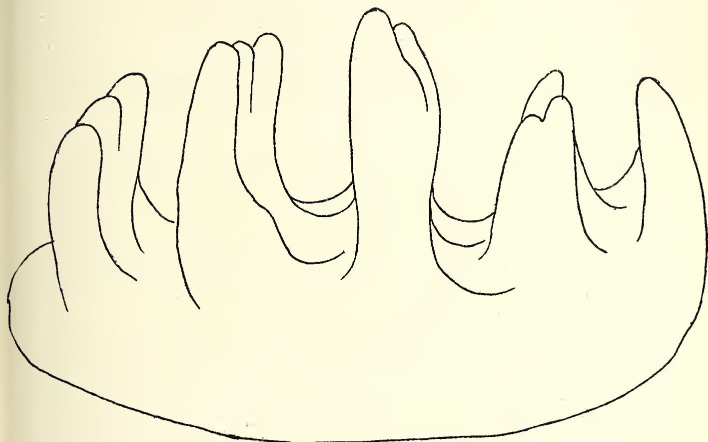


Fig. 8.

Vergelijkt men dit aantal lamellen met dat der volwassen tanden, dan blijkt dat van elken tand slechts een onvolledig aantal is aangelegd, van de eerste ontbreekt er nog een, van de tweede nog twee, en van de derde nog vier. Hieruit volgt, dat aan elken tandaanleg nog een bepaald stuk ontbreekt, dat grooter wordt naar gelang de tand meer naar achter is gelegen. Welk deel ontbreekt nu? Dit is zeer gemakkelijk aan te geven. Van alle tanden is slechts een voorste stuk aangelegd, en een korter of langer achterste stuk is nog afwezig. Dit volgt uit het feit dat van elk der drie tandkiemen het voorste deel het verst ontwikkeld is, niet alleen in de breedte, maar ook in den aanleg der digitellen-papillen. Uit dit feit is dus het gewichtige besluit te trekken dat de mesenchymateuze tandkiem van den olifant niet, zooals dit bij de overige zoogdieren het geval is in toto wordt aangelegd, en zich dan

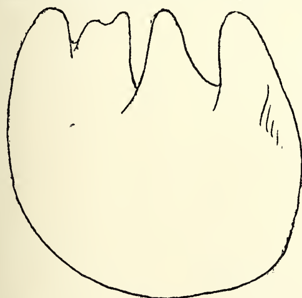


Fig. 9.

in toto differentieert, doch het voorste eind is in aanleg het oudste, en successievelijk groeit nu de kiem naar achter uit, de achterwand van den kiem is dus een appositioneele groeizone. Terwijl b.v. bij den tweeden tand de eerste of voorste lamelle reeds tamelijk breed is, en goed gedifferentieerde digitellenpapillen draagt, is de vijfde lamel nog slechts als een kegelvormige stomp aan den achterrand van den aanleg aanwezig, en is van de zesde en zevende lamel nog niets te zien. Bij den derden molaar springt het onvolledige nog veel duidelijker in 't oog.

Wij zien dus dat er overeenstemming bestaat in de ontwikkelingsverhoudingen van het emailorgaan en van den mesenchymateuzen tandaanleg. Wij konden vaststellen dat het eerste eenvoudiger is gebouwd, naar gelang men meer den achterrand nadert, en dat deze achterrand nog eigenlijk het karakter der ongedifferentieerde tandlijst bezit. Ook het emailorgaan verlengt zich nog naar achter evenals de mesenchymateuze tandkiem.

Het beeld dat wij nu in zijn hoofdlijnen van aanleg en ontwikkeling van de olifantskies kunnen ontwerpen, wijkt af van dat bij de overige zoogdieren. Terwijl toch bij deze laatste een mesenchymateuze tandkiem zich instulpt in het knopvormige epitheliale emailorgaan en dit daardoor klokvormig wordt, waarna in hetzelve twee centra van pulpavorming optreden, een bukkaal en een linguaal, waardoor een enkelvoudig emailseptum ontstaat, waarna op de tandpapil de sekundaire papillen ontstaan, die den grondslag voor de toekomstige knobbels vormen, ziet men, dat bij den olifant een deel der tandlijst zich eerst in plooien legt, waardoor het toekomstig relief van den mesenchymateuzen tandkiem in bukko-linguale richting reeds wordt bepaald. Daarna wordt dit geplooide stuk van de tandlijn afgesplitst, en vormt het emailorgaan. Na zijn afsplitsing groeit dit stuk nog zelfstandig naar achter uit, en op gelijke wijze verlengt zich ook de mesenchymateuze tandkiem naar achter. Bij dit uitgroeien naar achter worden geleidelijk de lamellen van den kies aangelegd, totdat het voor elken tand vereischte is bereikt. Met elke lamel van den mesenchymateuzen kiem, correspondeert een zelfstandig centrum van pulpadifferentiatie in het emailorgaan. Deze centra volgen dus achter elkander, en worden onderling van elkander gescheiden door emailseptum, die dus in hun ligging telkens met een dal tusschen twee lamellen correspondeeren. In Figuur 10 is schematisch een lengtedoorsnede door den geheelen tandaanleg weergegeven, waarbij ik mij den ontwikkelingsgraad van den tweeden molaar van het door mij onderzochte object als voorbeeld koos.

Als het, voor de opvatting van de morphologische beteekenis der

olifantskiezen, meest beteekenende feit, beschouw ik het successievelijk uitgroeien naar achter van het emailorgaan, nadat dit zelfstandig

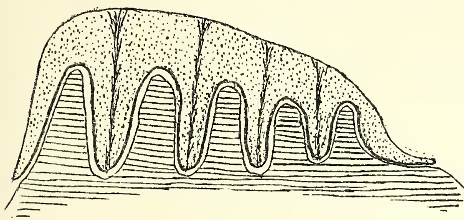


Fig. 10.

geworden is, en van den tandkiem, waarbij achtereenvolgens de lamellen tot ontwikkeling komen, en in het emailorgaan evenzoovele centra van pulpadifferentieering optreden. Hieruit vloeit voort dat het voorste deel van den tand, de eerste lamel dus, de oudste is, de achterste is de jongste. De genetische lengteas van den tand, verloopt dus van voren naar achter, in tegenstelling tot het verloop dezer as bij de gewone zoogdiertanden, die, het proto- met het deuteromeer verbindend, in bukko-mediale richting verloopt. Hieruit moet de gewichtige conclusie getrokken worden dat de kies van den olifant, in vergelijking met die der overige zoogdieren 90 graden gedraaid is. De bukkale rand van den gewonen zoogdiertand, met het protomeer, is homoloog met den voorrand van den olifantskies, met de eerste of voorste lamel. Dat men deze in den loop der phylogenetische ontwikkeling tot stand gekomen draaing niet mag denken als een mechanische, van den volledig geformeerden tand, doch als een potentieele in de beide elementen van den tandaanleg, het epitheliale en het mesenchymateuze, zal elders uitvoeriger worden toegelicht.

De betrekking van den tandaanleg bij den olifant tot die van den aanleg bij de overige zoogdieren, is uit het bovenstaande duidelijk geworden: de eerste lamel is homoloog met het protomeer, de tweede lamel met het deuteromeer, zooals het eerste septum in het emailorgaan homoloog is met het eenige septum in den tandaanleg der gewone zoogdiertanden. Homologa voor de derde en volgende lamellen, worden bij de overige zoogdieren in 't algemeen gemist. Het aan de bovenkaakskiezen van laatstgenoemden wel eens optredend tuberculum impar of Carabellis knobbeltje, kan als tritomeer homoloog worden gesteld met de derde lamel. Voor de hand ligt het voorts om de polylophodonte kiezen van sommige Rodentia (Hydrochoerus b.v.) in hun morphologische beteekenis van hetzelfde gezichts-

punt uit te beschouwen als de kiezen van den olifant. Dit standpunt is door mij reeds vroeger ingenomen ten opzichte der kiezen van de Multituberculata (zie Odontologische Studiën I, blz. 119).

In deze zelfde studie heb ik, op grond van mijn theoretische opvattingen over de betrekking tusschen het gebit der zoogdieren en dat der reptilien ter zooeven aangehaalde plaatse een hypothese ontwikkeld over de morphologische beteekenis en de ontstaanswijze der olifantskiezen, waarop ik hier ten slotte iets nader zal ingaan, om aan te toonen dat het hoofdbeginsel dier hypothese, door de boven medegedeelde feiten, als juist wordt gekenmerkt. De beteekenis dezer bevestiging mijner theoretische beschouwing, zoude ik in de voornaamste plaats niet daarin willen zoeken, dat mijne hypothese over de olifantsmolaren als zoodanig nu een daadwerkelijken grondslag heeft gekregen, doch daarin, dat mijne meer algemeene theorie over de betrekking tusschen het zoogdiergebit en het reptiliengebit, hierdoor een nieuwen steun heeft gekregen. Want de bedoelde hypothese was slechts de logische consequentie der meer algemeene tandtheorie. De bedoelde hypothese komt in 't kort op het volgende neer. Het uitgangspunt werd gevormd door de verschijnselen der tandwisseling bij de Reptilien. Deze geschiedt zoodanig, dat in de, het geheele leven door bestaande tandlijst, een aantal tandvormende matrices zich bevinden. Nadat een matrix een tand heeft gevormd, — die in de meeste gevallen triconodont is, bij uitzondering, zooals bij de krokodillen eenvoudig kegelvormig — schuift deze langs de tandlijst in de richting van het kaakepitheel, hetgeen doorboord wordt, en de tand treedt in functie. Na korter of langer tijd begint de matrix een tweeden tand te vormen, ook deze verschuift zich in de aangegeven richting en stoot zijn voorganger uit, om op zijn beurt door een volgend product der matrix vervangen te worden. De matrix vormt dan achtereenvolgens een aantal tanden, alle producten eener matrix heb ik als een „tandfamilie" onderscheiden, elke tand stelt een generatie dezer familie voor. Het aantal leden eener tandfamilie is practisch onbeperkt, daar de matrix der familie haar potentie gedurende geheel het leven behoudt, niet ongelijk aan de matrix der nagels bij de zoogdieren, die echter in afwijking der tandmatrix bij de reptilien, niet periodisch maar ononderbroken functioneert. De periodiciteit is echter bij de verschillende reptiliën zeer verschillend, er zijn vormen met zeer intensieve, anderen met zeer trage tandwisseling.

Deze verschijnselen der tandwisseling bij de reptiliën vormen den grondslag mijner opvatting over de morphologische waarde van den zoogdiertand. De zoogdiertand is homoloog te achten aan een gene-

ratie-arme tandfamilie der Reptiliën, immers slechts twee generaties worden hier gevormd, die echter, daar zij gelijktijdig tot aanleg komen met elkander zijn vergroeid, de eerste generatie vormt de primitief trikonodonte buitenhelft van den zoogdiertand, het protomeer, de tweede de eveneens potentieel drieknobbelige binnenhelft — het deuteromeer. De tand is dus dimeer. Nu en dan kan in rudimentairen vorm een derde generatie verschijnen, als het tuberculum impar, der bovenkaakskiezen.

Ik stelde mij de vraag of bij de zoogdieren het geval zich kan voordoen, dat de tandmatrix weder aan een grooter aantal generaties het aanzijn gaf, en dus een tandvorm zou doen ontstaan, die met een generatierijke tandfamilie der Reptiliën te vergelijken was. In mijn genoemde studie vestigde ik toen de aandacht in de eerste plaats op de Multituberkulaten, en onder de recente vormen op de tanden der Proboscidiërs. Ik verklaarde inderdaad het ontstaan dezer tandvormen zóó, dat de tandmatrix hier weder (— of dit „weder" ook voor de Multituberkulaten geldt, moge onbeslist blijven —) het vermogen gekregen had om in plaats van twee, een grooter aantal generaties voort te brengen, die echter substantieel niet van elkander gescheiden waren zooals bij de Reptiliën, de rustperiode der matrix tusschen de vorming van twee generaties bleef uit. Tegenover den dimeren gewonen zoogdiertand is dus de olifantskies als een polymeer object te beschouwen.

Deze opvatting omtrent de morphologische beteekenis van den olifantstand, moest echter noodzakelijk een hulphypothese met zich brengen. Want bij de Reptilien zijn de generaties in bukko-linguale richting ten opzichte van elkander gelegen. En zoo zou dus ook bij den olifant, de polymeere kies dwars in de bek zijn komen te staan. En daar zij nu inderdaad overlangs in de kaak zijn ingeplant, stelde ik als hulphypothese, dat dus de genetische lengteas van de kiezen, die bij den gewonen zoogdiertand transversaal verloopt, bij de olifantskies 90 graden moest zijn gedraaid, zoodat de tand in voor-achterwaartsche richting uitgroeide.

In deze theoretische beschouwingen waren dus twee elementen vervat, die wel van elkander onderscheiden moeten worden; ten eerste de grondhypothese dat de olifantskies moet beschouwd worden als een tot één geheel verbonden generatierijke tandfamilie der Reptilien, en ten tweede de daaruit noodzakelijk voortvloeiende hulphypothese dat de olifantskies, in vergelijking met den gewonen zoogdiertand, 90 graden gedraaid is.

In hoeverre nu worden deze theoretische beschouwingen door de waargenomen feiten gesteund of bewezen? In de eerste plaats kan

ik er op wijzen dat de hulphypothese — de draaiing der genetische lengteas van de kiezen — door de waarneming ten volle bevestigd is. Wij hebben kunnen vaststellen, dat zoowel aan de mesenchymateuze tandkiem, als aan het epitheliale emailorgaan de achterrand een groeicentrum is, door welks actie, zoowel het orgaan als de tandkiem naar achter, dat is dus volgens de lengterichting van de kaak, verlengd wordt. Het voorste deel van de kies is dus het oudste, het eerst tot ontwikkeling gekomene. Maar van grooter beteekenis nog acht ik als bewijs der draaiing, de richting der septa in het emailorgaan. Ligt het eenige septum bij den gewonen dimeren zoogdiertand, in een sagittaal vlak, bij de polymere olifantskies zijn de verschillende septies in het emailorgaan in een transversaal vlak gelegen. Deze beide feiten zijn wel als een afdoend bewijs der juistheid van de hulphypothese te beschouwen. Dat deze draaiing niet als een mechanische, doch als een potentieele — dat is als een omlegging der groeirichting in de kiemen — moet beschouwd worden, is reeds vroeger opgemerkt.

Het bewijs van de juistheid der hulphypothese komt nu zeker ten goede aan de aannemelijkheid der grondhypothese: de polymere olifantskies is te beschouwen als een tot een morphologische eenheid verbonden generatierijke tandfamilie der reptilien. Een absoluut bewijs van de juistheid dezer grondstelling wordt echter ook door de embryologische waarneming niet geleverd, en zal ook uit den aard der zaak wel nimmer geleverd kunnen worden. Maar toch maken deze waarnemingen de gestelde hypothese wel aannemelijk en waarschijnlijk.

Want van zeer groot gewicht is het paralellisme dat er bestaat in de ontstaanswijze van een tandfamilie der Reptilien en die van een olifantskies. Men behoeft zich slechts te denken dat de perioden van latentie, die bij de vorming van een tandfamilie, telkens tusschen twee generaties bestaat, wegvallen, de opvolgende leden der familie verkrijgen dan geen zelfstandigheid, doch blijven met elkander verbonden, en in plaats van een serie zelfstandige tanden, ontstaat een samengesteld geheel, waarvan de elementaire bestanddeelen, als in een keten aan elkaar verbonden zijn. En zooals bij de Reptilien de verschillende generaties successievelijk aangelegd werden en zich ontwikkelen, zoo worden ook bij de olifantskies de elementen — dat zijn de platen — successievelijk aangelegd. En zooals bij de Reptilien elke generatie der familie, dat is elke tand, haar eigen pulpavormend centrum heeft, in het bij haar behoorend emailorgaan, zoo heeft ook bij de olifantskies elke plaat haar eigen pulpacentrum in het emailorgaan.

Dit alles pleit er wel sterk voor dat men de olifantskies inderdaad te beschouwen heeft als een tot een geheel geconcentreerde tand-familie der Reptilien. Het is niet te beschouwen als een product dat door secundaire vergroeiing van embryologisch zelfstandige elementen is ontstaan, zooals RÖSE's hypothese dit wil. Ook hier moet men, als bij den gewonen zoogdiertand het begrip concrescentie laten vallen, om in de plaats daarvan te spreken van concentratie.

De ontstaanswijze van den olifantstand, zooals deze boven, als theoretische constructie en op grond van waargenomen feiten, geschetst is, maakt het begrijpelijk, waarom van twee zoo na verwante vormen als de beide thans nog levende soorten van olifanten, de kiezen in quantitatieven zin zoo verschillend gebouwd zijn. Want bij Elephas indicus kan het aantal platen of lamellen dat een kies samenstelt, tot 25 stijgen. Dat wil dus zeggen dat het aantal tand-generaties dat aan de vorming van zulk een kies deelneemt zeer aanzienlijk hooger is dan het maximum bij den Afrikaanschen olifant. Dit feit laat zich gemakkelijk toelichten door de overweging, dat wanneer eenmaal, zooals dit bij de Proboscidiers het geval is, de tandmatrix het vermogen herkrijgt om tandgeneraties in grooter aantal te vormen, deze eigenschap in haar uiting even onbegrensd is, als dit bij de Reptilien het geval is. Aan hoeveel generaties elke matrix het aanzijn geven zal wordt dan door uitwendige factoren bepaald. En van dit zelfde standpunt uit moet ook het verschil in aantal der platen — tandgeneraties — beoordeeld worden, waaruit de tanden van eenzelfde gebit zijn opgebouwd. Hoe later de tand in functie treedt, des te grooter wordt dit aantal.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „*Een involutorische transformatie der stralenruimte, welke door twee involutorische homologiëen is bepaald.*"

1. In een vlak α beschouw ik de *involutorische homologie* (centrale collineatie) die A tot centrum en a tot as heeft, in een vlak β een dergelijke involutie met centrum B en as b. Als P, P' een paar der eerste involutie, Q, Q' een paar der tweede is, voeg ik de stralen $t \equiv PQ$ en $t' \equiv P'Q'$ aan elkaar toe. Daardoor ontstaat een *involutie in de stralenruimte*, die in het volgende zal worden onderzocht.

Wanneer PQ en $P'Q'$ elkaar in een punt M snijden, is het paar Q, Q' de centrale projectie van P, P' uit M als centrum. Door die projectie worden de op $p \equiv PP'$ gelegen paren der involutie $[\alpha]$ omgezet in de paren van een op $q \equiv QQ'$ geplaatste involutie; deze heeft één paar gemeen met de involutie, welke door de homologie $[\beta]$ op q wordt bepaald. Bijgevolg draagt M één paar stralen t, t'.

Langs AB vallen twee stralen t en t' samen. Ook de rechten door A naar de punten van b en door B naar de punten van a zijn *dubbelstralen* der involutie (t, t'). De overige *dubbelstralen* vormen de *bilineaire congruentie*, welke a en b tot richtlijnen heeft.

2. Zij t_α een rechte in α; elk van haar punten kan beschouwd worden als haar doorgang P, terwijl haar doorgang Q gelegen is op de rechte $c \equiv \alpha\beta$. Is C_β het punt, dat in $[\beta]$ overeenkomt met $C \equiv Q$, en t'_α het beeld van t_α in $[\alpha]$, dan voegt de involutie (t, t') aan t_α alle stralen t van den waaier toe, welke C_β tot top heeft en in het vlak $(C_\beta\, t'_\alpha)$ ligt. *Alle stralen t_α zijn dus singulier.*

Als t_α om C wentelt, zal t'_α een waaier beschrijven om het punt C_α, dat in de homologie $[\alpha]$ met C overeenkomt. De aan t_α toegewezen waaiers (t') behooren tot de ster $[C_\beta]$; hun vlakken gaan door de rechte $C_\alpha C_\beta$.

Wanneer C de rechte c doorloopt, beschrijft C_β de rechte c_β, die in $[\beta]$ aan c is toegevoegd. Dus zijn aan de *singuliere stralen* t_α toegewezen de stralen t' van den *axialen, lineairen, complex* $|c_\beta|$, die c_β tot richtlijn heeft.

Analoog zijn de stralen van den *axialen complex* $|c_\alpha|$ toegewezen

aan de *singuliere stralen* t_β; met elken straal t_β komen de stralen t' van een tot $|c_\alpha|$ behoorenden waaier overeen.

De doorsnede der complexen $|c_\alpha|$ en $|c_\beta|$ is een bilineaire congruentie, waarvan de stralen zijn toegevoegd aan den straal $t \equiv c$. Dus is de rechte c een *hoofdstraal*; inderdaad kan men twee willekeurige punten van c als doorgangen P en Q beschouwen.

Alle stralen t door een punt $P \equiv Q \equiv C$ van c zijn toegewezen aan den straal t', die P' en Q' verbindt; dus is ook t' een hoofdstraal. Als C zich langs c verplaatst, beschrijven P' en Q' twee projectieve puntenreeksen op c_α en c_β; $P'Q'$ beschrijft dan een regelschaar $(c)^2$. *De quadratische regelschaar* $(c)^2$ bestaat dus uit *hoofdstralen*, die ieder zijn toegevoegd aan de stralen van een ster $[C]$.

3. Als t_α om een punt T wentelt, zal C_β zich langs c_β verplaatsen en de waaier, die C_β tot top heeft en waarvan de stralen t' rusten op de in $[\alpha]$ aan t_α toegevoegde rechte t'_α, zal een congruentie bepalen. De puntenreeks, welke C_β op c_β beschrijft, is projectief met den waaier (T'), dien t'_α doorloopt; wordt zij uit eenig punt M op α geprojecteerd, dan zullen er twee stralen t'_α zijn, die door de projectie van het overeenkomstige punt C_β gaan. Door M gaan dus twee stralen der congruentie. Een willekeurig vlak μ bevat één punt C_β en tevens den doorgang van den overeenkomstigen straal t'_α, dus één straal t' der congruentie. De *waaier* (t_α) wordt dus afgebeeld door een *congruentie* (2, 1).

Daar de straal $T'C_\beta$ in elk van zijn standen tot de (2,1) behoort, is $(T'c_\beta)$ een der *singuliere vlakken* der congruentie. Ook α is een *singulier vlak*, want het bevat den waaier, waarvan de top in het snijpunt $C \equiv C_\beta$ van c met b ligt.

4. Wanneer t een waaier (T, τ) in het vlak τ doorloopt, zullen zijn doorgangen P en Q op de rechten $p \equiv \alpha\tau$ en $q \equiv \beta\tau$ projectieve reeksen beschrijven. Maar dan zijn ook de puntenreeksen, welke de homologe punten P' en Q' op p' en q' beschrijven, projectief, zoodat $P'Q'$ een quadratische regelschaar zal doorloopen. In de transformatie (t,t') is derhalve het *beeld* van een *waaier* in het algemeen een *quadratische regelschaar*.

Als t een stralenveld μ beschrijft, zullen de doorgangen P en Q op de rechten $p \equiv \alpha\mu$ en $q \equiv \beta\mu$ blijven; dan liggen P' en Q' op de homologe rechten p' en q'. Het *stralenveld* wordt dus afgebeeld door een *bilineaire congruentie*.

De in μ gelegen straal t' verbindt de punten pp' en qq', is dus een dubbelstraal der involutie.

Wanneer t tot de ster $[M]$ behoort, zullen de doorgangen P en Q twee projectieve velden vormen. Daar dan ook P' en Q' in projectieve velden overeenkomen, vindt men als *beeld* van de *ster* een *congruentie* (3,1).

Van de drie stralen, welke deze congruentie door een willekeurig punt zendt, zijn er twee in de involutie (t,t') aan elkaar toegevoegd, terwijl de derde een dubbelstraal is (§ 1). De straal t', dien zij in een willekeurig vlak μ legt, is het beeld van den straal t welken de aan μ toegevoegde (1,1) door M zendt.

Daar de ster $[M]$ den waaier bevat, waarvan de stralen op de rechte c rusten, behoort de regelschaar $(c)^2$ tot het beeld (3,1) der ster.

De ster $[M]$ bevat een waaier van stralen t, die op c_β rusten. Deze bepaalt op den doorgang m van het vlak (Mc_β) met α een puntenreeks (P''). Het homologe punt P'' bepaalt met het aan C_β toegewezen punt C telkens een straal t_α. Elke waaier (t_α) met top C bevat dus één straal, die overeenkomt met een tot $[M]$ behoorenden straal van den axialen complex $|c_\beta|$. Maar ook de rechte c behoort tot de congruentie (3,1), daar zij het beeld is van de transversaal door M over c_α en c_β. De beelden t_α der stralen van den waaier in (Mc_β) omhullen dus een kegelsnede. Hieruit blijkt, dat α en β tot de *singuliere vlakken* der congruentie (3,1) behooren; anders gezegd, α en β zijn osculatievlakken der kubische ruimtekromme, waarvan de assen (doorsneden van twee osculatievlakken) de (3,1) vormen.

5. De stralen t, die op de rechten d_1 en d_2 en tevens op c_β rusten, vormen een quadratische regelschaar; hun doorgangen P liggen dus op een kegelsnede δ^2. De overeenkomstige punten P' vormen op een kegelsnede δ'^2 een puntenreeks, die projectief is met de reeks der punten C_β, dus ook met de reeks der punten C. Derhalve omhult de straal t' een *kromme der derde klasse*. Door een punt N' van α gaan nu vier rechten t', die de beelden zijn van stralen t der bilineaire congruentie met richtlijnen d_1, d_2, n.l. drie stralen t_α en bovendien de straal, die toegevoegd is aan den straal, welken het punt N naar de (1,1) zendt.

De bilineaire congruentie, welke het stralenveld $[\mu]$ afbeeldt, heeft twee stralen gemeen met de boven bedoelde (1,1); het beeld der laatste heeft dus twee stralen in het vlak μ. Bijgevolg wordt een *bilineaire congruentie* afgebeeld door een *congruentie* (4,2).

Deze heeft α en β tot *singuliere vlakken* van de derde klasse.

De stralen, welke de (4,2) door een punt M zendt, zijn de beelden

van de stralen, welke de (1,1) gemeen heeft met het beeld (3,1) der ster $[M]$.

De beelden van twee bilineaire congruenties hebben o.a. de regelschaar $(c)^2$ gemeen; immers elke ster $[C]$ levert aan elke der beide (1,1) een straal.

6. De *axiale complex* met as d wordt door de transformatie (t, t') omgezet in een *quadratischen complex* $\{t'\}^2$; immers, met de twee stralen der regelschaar $(t)^2$, die den waaier (t') afbeeldt, komen twee in den waaier (t') gelegen stralen van den beeldcomplex overeen.

Daar $[d]$ uit elken waaier van singuliere stralen één straal afzondert, bevat $\{t'\}^2$ de beide stralenvelden $[\alpha]$ en $[\beta]$. Twee congruenties $\{t'\}^2$ hebben, behalve die twee congruenties (0,1) nog een congruentie (4,2) gemeen; hieruit blijkt op nieuw, dat een bilineaire congruentie in een (4,2) wordt omgezet.

Het beeld (3,1) van een ster $[M]$ heeft vier stralen gemeen met het beeld (1,1) van het veld $[\mu]$. Een daarvan behoort tot de regelschaar $(c)^2$ en is toegevoegd aan elken straal, welken de overeenkomstige ster $[C]$ met $[M]$ en $[\mu]$ gemeen heeft. Een tweede valt langs c; immers $[M]$ en $[\mu]$ zenden ieder een straal over c_α en c_β.

De rechte door M en het in μ gelegen punt C_β behoort tot een waaier, die toegevoegd is aan een bepaalden straal t_α; daar ook μ een straal van dien waaier bevat, hebben de beeldcongruenties (3,1) en (1,1) dien straal t_α gemeen. Analoog hebben zij een straal t gemeen.

De beelden van twee stralenvelden $[\mu]$ en $[\mu^*]$ hebben twee stralen gemeen. Een daarvan is het beeld der rechte $\mu\mu^*$, de andere is de rechte c; zij is toegewezen aan de beide transversalen van c_α en c_β, die in μ en in μ^* zijn gelegen.

Het beeld (1,1) van het veld $[\mu]$ heeft zes stralen gemeen met het beeld (4,2) van een bilineaire congruentie met richtlijnen d_1, d_2. Daartoe behoort de straal der regelschaar $(c)^2$, die toegevoegd is aan de ster, waarvan de top in het punt $(c\mu)$ ligt. De rechte c hebben zij tweemaal gemeen, want twee transversalen van c_α en c_β rusten tevens op d_1 en d_2, terwijl één rechte van μ op c_α, c_β rust. De transversaal door het punt (μc_β) over d_1, d_2 behoort tot een waaier, die ook een straal in μ heeft; met beiden komt een zelfde rechte t_α overeen. Analoog hebben de beeldcongruenties een rechte t_β gemeen. De zesde gemeenschappelijke straal is het beeld van de in μ gelegen transversaal van d_1 en d_2.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „*Een straleninvolutie, welke door een congruentie van* REYE *en een involutorische homologie wordt bepaald.*"

1. In het vlak α is een involutorische homologie $[\alpha]$ gegeven, welke A tot centrum, a tot as heeft. Verder zij gegeven de bilineaire congruentie $[\beta^3]$ van kubische ruimtekrommen, welke door de vijf hoofdpunten B_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) gaan. Een willekeurige rechte t is bisecante van *een* β^3; aan haar doorgang P op α is in $[\alpha]$ een punt P' toegewezen; de bisecante t' van β^3, welke door P' gaat, worde aan t toegevoegd; daardoor ontstaat een involutie (t, t') in de stralenruimte. Alle rechten door het punt A of door een punt A^* der as a zijn blijkbaar *dubbelstralen* der involutie.

Elke rechte s_1 door B_1 is *singulier* voor de congruentie, daar zij bisecante is van alle β^3, die gelegen zijn op den quadratischen kegel $(B_1)^2$ met top B_1, welke door de overige vier punten B en de rechte s_1 kan worden gelegd. De rechte s_1 is tevens *singulier* voor (t, t'); immers aan $s_1 \equiv B_1 P$ worden toegevoegd alle bisecanten t' door P' aan de ∞^1 krommen β^3 van $(B_1)^2$. Deze krommen bepalen een involutie I^3 op den doorgang α^2 van $(B_1)^2$ met α; de rechten, welke de paren dezer I^3 dragen, omhullen een kegelsnede; in α liggen dus twee van de aan s_1 toegewezen stralen t'. Aan den singulieren straal s_1 zijn dus de stralen van een *kegel* $(P')^2$ toegevoegd.

De kegel $(B_1)^2$ bevat de vier ontaarde figuren, samengesteld uit een rechte $B_1 B_k$ en een kegelsnede β^2 in het vlak β_{lmn} der punten B_l, B_m, B_n. Hij bevat evenwel geen figuur welke $b_{23} \equiv B_2 B_3$ tot bestanddeel heeft; de kegel $(P')^2$ kan b_{23} dus slechts in B_2 en B_3 snijden. De figuur, die uit b_{12} en een kegelsnede in het vlak β_{345} bestaat, zendt een bisecante door P', die b_{12} buiten B_1 en B_2 snijdt; de kegel $(P')^2$ gaat dus *niet* door B_1, wel door de overige vier punten B_k.

Laat men den doorgang P van s_1 de kegelsnede α^2 doorloopen, dan zal P' zich eveneens over een kegelsnede, α'^2, verplaatsen, die α^2 in twee op a gelegen punten snijdt. De bij s_1 behoorende kegel $(P')^2$ doorloopt dan een stelsel met basispunten B_2, B_3, B_4, B_5, waarvan de toppen op α'^2 zijn gelegen. De ribben t' van die kegels vormen een stralencongruentie.

2. De stralen t' toegevoegd aan de stralen s_1 der ster $[B_1]$ vormen een complex. Om den graad van dien complex te kunnen bepalen, beschouw ik een waaier van stralen t', met top T, waarvan het vlak τ met het vlak α de rechte p gemeen heeft. De β^3, welke een dier stralen t' tot bisecante heeft, wordt uit B_1 in de kegelsnede α^2 geprojecteerd; deze bepaalt op de met p' homologe rechte p twee punten P^*, die aan den doorgang P' van t' worden toegevoegd en tevens aan het met P' homologe punt P. Omgekeerd zal een punt P^* van p, door middel van de rechte B_1P^*, een kegel $(B_1)^2$, dus een kegelsnede α^2 bepalen, en de homologe kegelsnede α'^2 levert op p' twee punten P'; de overeenkomstige punten P worden aan P^* toegewezen. Daar P^* viermaal met P samenvalt, bevat de waaier (T, τ) vier stralen t', ieder toegevoegd aan een singulieren straal s_1.

Met elke der vijf sterren $[B_k]$ *komt dus een complex van den vierden graad overeen.* De complexkromme in het vlak μ heeft den doorgang $p' \equiv \alpha\mu$ tot dubbelraaklijn. Immers, de kromme β^3, welke p' tot koorde heeft, wordt uit B_1 in een kegelsnede α^2 geprojecteerd, en de snijpunten van α^2 met de rechte p bepalen twee stralen s_1, die ieder aan p zijn toegewezen.

Aan een singulieren straal $s_2 \equiv B_2P'$ is een kegel $(P)^2$ van stralen t toegevoegd, die o.a. door B_1 gaat, dus de ribbe B_1P gemeen heeft met den door $s_1 \equiv B_1P$ bepaalden kegel $(B_1)^2$. Elke straal s_2 behoort dus tot den complex $\{t'\}_1{}^4$, die met de ster $[B_1]$ overeenstemt. Die complex heeft m. a. w. de vier *hoofdpunten* $B_k\,(k \neq 1)$.

Ligt P' op de doorsnede p'_{345} van β_{345} met α, dus P op de daarmee homologe rechte p_{345}, dan is aan den singulieren straal B_1P de waaier (P', β_{345}) toegevoegd, die dan bestanddeel is van den kegel $(P')^2$. De vlakken $\beta_{klm}\,(k, l, m \neq 1)$ zijn dus *hoofdvlakken* van den complex $\{t'\}^4$.

Ook α is *hoofdvlak*. Immers, de in α gelegen straal t'_α is bisecante van een β^3, en deze wordt uit B_1 in een α^2 geprojecteerd, die den homologen straal t_α in twee punten P ontmoet, waarvoor het punt P' op t'_α is gelegen.

Dat B_1 *geen* hoofdpunt is, blijkt aldus. De kegels $(B_1)^2$ vormen een bundel en snijden dus α volgens een bundel (α^2). Deze is projectief met den homologen bundel (α'^2), en de beide bundels brengen een figuur van den vierden graad voort. Daar twee overeenkomstige kegelsneden elkaar op a snijden, bestaat die figuur uit de rechte u en een kubische kromme, welke invariant is t.o.v. de homologie $[\alpha]$. Elke twee punten P, P' van die kromme leveren twee aan elkaar toegevoegde singuliere stralen t, t', terwijl de punten der as a een waaier van dubbelstralen door B_1 leveren. De complex-

kegel van B_1 bestaat dus uit een waaier en een kubischen kegel.

3. Elke rechte van het vlak β_{123} is *singuliere bisecante* voor de congruentie $[\beta^3]$, maar tevens *singuliere straal* voor (t,t'). Immers β_{123} bevat een bundel van kegelsneden β^2, die elk met de rechte b_{45} een tot $[\beta^3]$ behoorende figuur vormen. De rechte t van β_{123} is bisecante van elke dier figuren, dus toegevoegd aan de bisecanten t', welke zij door het aan den doorgang P van t toegewezen punt P' zenden. De waaiers (t'), die aldus zijn toegevoegd aan de stralen t van het veld $[\beta_{123}]$, vormen blijkbaar een bilineaire congruentie, waarvan b_{45} en de rechte p'_{123} (homoloog met den doorgang p_{123} van β_{123}) de richtlijnen zijn. Maar ook de stralen t' dezer congruentie zijn *singulier*, want aan een straal met doorgang P' zijn toegewezen de stralen van een waaier met top in P.

Er zijn dus tien velden van singuliere stralen, die ieder behooren bij een bilineaire congruentie van singuliere stralen.

4. Elke straal t_α van α is *singulier*; immers elk van zijn punten kan als doorgang worden beschouwd, dus ook elk punt van t'_α als doorgang P' van een straal t'; deze is bisecante van de kromme β^3, die t_α tweemaal snijdt. Bijgevolg zijn aan den singulieren straal t_α de stralen t' van de *regelschaar* $(t')^4$ toegevoegd, die de meetkundige plaats is van de bisecanten der β^3, welke op de rechte t'_α rusten.

Als t_α door A gaat, dus met t'_α samenvalt, ontaardt $(t')^4$ in de beide quadratische kegels, welke de overeenkomstige kromme β^3 uit haar snijpunten met t_α projecteeren.

De regelscharen $(t')^4$ vormen een complex. Om daarvan den graad te kunnen bepalen, beschouw ik het oppervlak Φ voortgebracht door de krommen β^3, welke de stralen t' van een waaier (T,τ) tot bisecanten hebben. Hiertoe behooren tien figuren, ieder samengesteld uit een rechte b_{kl} en een haar snijdende kegelsnede. De doorsnede van Φ met β_{123} bestaat dus uit de rechten b_{12}, b_{13}, b_{23} en de aan b_{45} gekoppelde kegelsnede; bijgevolg is Φ een oppervlak van den vijfden graad.

De meetkundige plaats der puntenparen, welke de krommen β^3 van Φ op de stralen t' bepalen, is blijkbaar een kromme τ^4 met dubbelpunt T. Het vlak τ heeft met Φ^5 de kromme τ^4 en dan nog een rechte l gemeen; derhalve is Φ^5 tevens de meetkundige plaats der krommen β^3, die de rechte l snijden.

Zij nu (M,μ) een willekeurige waaier, en μ^4 de met τ^4 analoge kromme, dus de meetkundige plaats der puntenparen, waarin de

stralen m van (M, μ) door krommen β^3 tweemaal worden gesneden. De kromme μ^5 volgens welke het oppervlak Φ^5 door μ wordt gesneden, heeft met de kromme μ^4 de doorgangen der tien rechten b_{kl} gemeen; maar elke straal m, die op een dier rechten rust, snijdt μ^4 en μ^5 in verschillende punten, omdat b_{kl} door de beide waaiers (t) en (m) aan verschillende kegelsneden wordt gekoppeld. De overige tien snijpunten der beide krommen liggen paarsgewijs met M collineair; de waaier (m) bevat dus vijf bisecanten van krommen β^3, die op Φ^5 liggen. Anders gezegd, *de bisecanten der krommen* α^3, *welke ieder een bisecante met een gegeven waaier gemeen hebben, vormen een complex van den vijfden graad.*

Zij nu p' de doorgang van het vlakke τ, p de homologe rechte. Met elk punt P van p komt een punt P' van p' overeen. De kromme β^3, welke den straal $t' \equiv TP'$ tot koorde heeft, bepaalt in α drie bisecanten t_α, welke op p drie punten P^* insnijden. De complex $\{u\}^5$ der bisecanten van de krommen β^3, welke de stralen t' van den waaier (T, τ) tot koorden hebben, zendt vijf rechten u door het punt P^*; met dit punt komen dus vijf stralen t' en daardoor vijf punten P overeen. Telkens wanneer een punt P^* met een homoloog punt P samenvalt, draagt P een straal t_α, waaraan een door P' gedragen straal t' is gekoppeld. *De singuliere stralen van het veld* $[t_\alpha]$ *worden derhalve afgebeeld door de stralen van een complex van den achtsten graad.*

De kegel $(P')^2$, die (§ 1) aan den straal $s_k \equiv B_k P$ is toegevoegd, bevat twee stralen t_α. Elke straal der ster $[B_k]$ is dus tweemaal als straal van den complex $\{t'\}^8$ te beschouwen. Deze complex heeft bijgevolg de punten B_k tot *dubbele hoofdpunten.*

Elke in α gelegen rechte t' is aan twee stralen t_α toegewezen. Immers, als t' koorde $Q''Q'''$ is van een β^3, die α nog in Q' ontmoet, dan blijkt t' toegevoegd te zijn aan elk der beide stralen $Q'Q''$, $Q'Q'''$. De rechte t'_α, die met $Q'Q'' \equiv t_\alpha$ in $[\alpha]$ homoloog is, snijdt t' in een punt P', waarvoor het homologe punt P op $Q'Q''$ ligt. Dus is α dubbel hoofdvlak voor den complex $\{t'\}^8$.

5. Er zijn nog andere *singuliere stralen.* De kromme β^3, welke door een punt P' van α gaat, zendt een bisecante s door het homologe punt P. Aan den straal s zijn alle stralen t' van den quadratischen kegel toegewezen, die β^3 uit P' projecteert. De stralen s vormen een congruentie, de overeenkomstige stralen t' een complex.

Elke straal t' van den waaier (T, τ) is koorde van een β^3, en de paren van snijpunten vormen de reeds vroeger beschouwde kromme τ^4. Deze bepaalt op de rechte $\alpha\tau$ vier punten P'; de waaier bevat

dus vier stralen van den complex $\{t'\}$. *De singuliere stralen s zijn dus toegevoegd aan de stralen van een complex van den vierden graad*

Deze complex heeft de punten B_k tot *hoofdpunten* en het vlak α tot *hoofdvlak*; elke rechte t_α is ribbe van twee kegels $(t')^2$, behoort dus tweemaal tot den complex.

De congruentie $[s]$ heeft *singuliere punten* van de tweede orde in A en in elk punt A^* der rechte a. De ribben van elken dier kegels zijn aan elkaar toegevoegd, en tevens dubbelstralen der involutie; die kegels behooren blijkbaar ook tot den complex $\{t'\}^4$. De ribben der kegels, waarvan de toppen op a liggen, zijn tot een congruentie (4,2) vereenigd.

Elke straal t_α vertegenwoordigt twee stralen s; immers, zijn P' en P'_* de punten, welke t_α gemeen heeft met de kromme β^3 waarvan t_α koorde is, dan is t_α singuliere straal voor elk der homologe punten P en P_*. Zal een straal s in α liggen, zonder door A te gaan, dan moet hij de punten P'' en P''' bevatten, waar de door P' gelegde β^3 het vlak weer ontmoet. Als P' den door A getrokken straal m doorloopt, zal $P' \equiv P''\,P'''$ om een punt M wentelen; want de groepen (P', P'', P''') vormen pooldriehoeken t.o.v. een bepaalde kegelsnede. De waaier (p') is blijkbaar projectief met de op m gelegen puntenreeks (P); dus zal p' tweemaal door het overeenkomstige punt P gaan en dan een straal s zijn. Bijgevolg is α een *singulier vlak* van de vierde orde voor de congruentie $[s]$. Daar een punt van α bovendien *een* niet in α gelegen straal s draagt, is de *stergraad* (orde) van $[s]$ gelijk aan *vijf*.

Om den *veldgraad* (de klasse) van $[s]$ te kunnen bepalen, neem ik een vlak μ aan. Zij P een punt van de rechte $p \equiv \alpha\mu$; de krommen β^3, die de stralen t van den waaier (P,μ) tweemaal snijden, vormen het in § 4 beschouwde oppervlak Φ^5, bepalen dus op de rechte p' vijf punten Q', en daardoor op p de homologe punten Q, die aan P worden toegevoegd. Omgekeerd levert een punt Q een punt Q' en de door Q' gelegde kromme β^3 snijdt μ in drie punten, bepaalt dus in μ drie koorden t en daardoor drie punten P. Telkens als Q met P samenvalt, gaat door P een singuliere straal s, waarvoor de overeenkomstige kegel $(t')^2$ zijn top heeft in het homologe punt P'. De veldgraad bedraagt derhalve *acht*. *De singuliere stralen s vormen een congruentie* (5,8).

De punten B_k zijn singulier voor $[s]$. Dit blijkt als men de stralen s beschouwt, die tot een waaier (B_k,μ) behooren; zij p de doorsnede van μ met α, P een punt van p. De krommen β^3, die B_kP snijden, worden uit B_k geprojecteerd in de kegelsnede α^2, en deze bepaalt op p' twee punten Q', die aan P' worden toegevoegd. Omgekeerd

snijdt de door Q' gelegde β^3 het vlak μ nog in twee punten, bepaalt dus twee punten P en daardoor tevens twee punten P'. Daar Q' blijkbaar viermaal met P' samenvalt, bevat de waaier (B_k,μ) vier stralen s. Dus is B_k een *singulier punt* van de vierde orde voor de congruentie $[s]$.

6. De tien rechten $b_{kl} \equiv B_k B_l$ zijn *hoofdstralen* voor de involutie (t,t'). Immers b_{kl} is bisecante van *alle* krommen β^3, dus toegevoegd aan *alle* bisecanten door het punt P'_{kl}, dat homoloog is met den doorgang P_{kl} van b_{kl}. *Aan den hoofdstraal b_{kl} wordt dus de ster $[P_{kl}]$ toegewezen.*

Een waaier (T,τ) bevat tien stralen t, die ieder rusten op een rechte b_{kl} en op een daaraan gekoppelde kegelsnede β^2_{mnr}. De overeenkomstige straal t' rust dan ook op b_{kl}.

Verder behooren vier stralen t tot den complex $\{t\}^4_k$, welke in de involutie (t,t') is toegevoegd aan de ster $[B_k]$. Dus heeft het beeld van den waaier (t) viervoudige punten in B_k en in B_l, zoodat op b_{kl} negen stralen t' rusten. *Een waaier wordt dus omgezet in een regelschaar van den negenden graad.* De waaier bevat acht stralen van den complex $\{t'\}^8$; in α liggen dus acht stralen t_α van het regelvlak $(t)^9$. Bovendien bevat α de rechte p', die homoloog is met den doorgang p van het vlak τ, en richtlijn van het regelvlak.

7. Een *ster*, met top M, wordt afgebeeld door een stralencongruentie $[t']$. Zij N een willekeurig punt, u de bisecante door N naar de kromme β^3, welke de rechte MP tweemaal snijdt. De doorgang Q van u komt in een birationale verwantschap overeen met het punt P', dat door de homologie aan P is toegevoegd.

Als Q zich langs de rechte q verplaatst, zoodat u een waaier beschrijft, dan vormen (§ 4) de bisecanten t der overeenkomstige krommen β^3 een complex $\{t\}^5$. De complexkegel van M snijdt α volgens een kromme α^5 en de daarmee homologe kromme α'^5 bevat de punten P', die aan de punten Q van q zijn toegevoegd. De verwantschap tusschen Q en P' is dus van den vijfden graad; bijgevolg zal Q zevenmaal met P' samenvallen. Door N gaan derhalve *zeven* stralen t' van het beeld der ster $[M]$.

De ster heeft met haar beeld den straal MA en de stralen van den waaier (M,α) gemeen; dus is M een singulier punt van het beeld.

Zij μ een vlak, dat α volgens de rechte p' snijdt. De krommen β^3, welke de stralen t' van den waaier (P',μ) tot bisecanten hebben, brengen vijf van hun bisecanten t in het vlak (Mp), en deze bepalen op p vijf punten Q, welke aan het punt P worden toegevoegd.

Omgekeerd levert een punt Q drie in μ gelegen stralen t', die bisecanten zijn van de β^3, welke MQ tot koorde heeft. Aan Q zijn drie punten P' en dan ook drie punten P toegewezen. Telkens als een punt Q met een overeenkomstig punt P samenvalt, ligt de aan $t \equiv MQ$ toegewezen straal t' in μ; de veldgraad der congruentie $[t']$ bedraagt dus *acht*.

Het beeld van een ster is bijgevolg een congruentie (7,8).

De ster bevat een transversaal van de rechten b_{kl} en p'_{mnr}; de congruentie (7,8) heeft dus in elk der tien vlakken β_{mnr} een *waaier*. Deze vlakken zijn dus *singulier* voor (7,8).

De complex $\{t\}^4_k$, toegevoegd aan de ster $[B_k]$ heeft met $[M]$ een kegel $(t)^4$ gemeen; hiermee komt een kegel $(s_k)^4$ overeen, want aan den doorgang α^4 van den eersten kegel is in de homologie $[\alpha]$ een kromme α'^4 toegevoegd en deze bevat de doorgangen der overeenkomstige stralen s_k. De congruentie (7,8) heeft dus *singuliere punten* van de vierde orde in de *vijf* punten B.

Door M gaan vijf singuliere stralen s; dus heeft (7,8) *vijf singuliere punten* van de tweede orde in het vlak α.

Het vlak α is singulier voor de congruentie (7,8), want de complex $\{t'\}^8$, die aan het stralenveld $[t_\alpha]$ is toegevoegd, heeft met $[M]$ een kegel $(t')^8$ gemeen. Laat men een straal t_α om P wentelen, dan vormen de bisecanten u der krommen β^3, welke de stralen t_α tot koorden hebben, een complex $\{u\}^6$. Door M gaat één bisecante u van de bij t_α behoorende β^3; haar doorgang Q worde met P' verbonden en de rechte $P'Q = q$ worde toegevoegd aan den straal t'_α, die met t_α homoloog is. Omgekeerd bevat het vlak (Mq) vijf koorden u, behoorende bij vijf verschillende krommen β^3, die elk een straal t_α door P aanwijzen, zoodat aan den straal q zijn toegewezen vijf stralen t'_α. Door M gaan dus *zes* stralen u, die ieder in de involutie (t,t') overeenkomen met een straal t_α van den waaier (P,α). Bijgevolg is α een *singulier vlak* van de zesde orde voor de congruentie (7,8).

Deze congruentie bevat de *tien stralen* b_{kl}; immers deze komen overeen met de stralen MP'_{kl}.

8. Ik beschouw nu het beeld van een *stralenveld*. Het vlak μ bevat (§ 7) acht stralen t, die toegevoegd zijn aan acht stralen t' door een punt M. Dus heeft het beeld van het stralenveld $[\mu]$ den stergraad *acht*.

Zij φ een willekeurig vlak, P' het snijpunt van φ met de rechte p', die homoloog is met de rechte $p \equiv \alpha\mu$. De complex der koorden van de krommen β^3, die ieder een straal van den waaier (P,μ) tot

bisecante hebben, brengt vijf stralen t' in den waaier (P',q). Het vlak q bevat dus *vijf* stralen van het beeld van $[\mu]$.

Een stralenveld wordt dus afgebeeld door een congruentie (8,5).

De punten B_k zijn *singulier* voor deze (8,5). Want de waaier (P,μ) bevat vier stralen van den complex $\{t'\}^4_k$; daarvan liggen twee langs p, terwijl de andere twee overeenkomen met den straal B_kP'. De waaier (B_k,p') behoort dus *tweemaal* tot (8,5).

Het veld $[\mu]$ bevat één straal van het veld $[\beta_{128}]$ en één straal van de congruentie (1,1), die b_{45} en p'_{123} tot richtlijnen heeft. Dus bevat de congruentie (8,5) *tien waaiers* (P,β_{klm}) en *tien waaiers* in vlakken door de rechten b_{rs}.

De waaier (P,μ) bevat acht stralen van den complex $\{t'\}^8$; daar de overeenkomstige stralen t_x door het punt P' gaan, vormen de stralen in α, die tot (8,5) behooren, een stelsel met index *acht*. Dus is α een *singulier vlak* van de orde acht.

9. Zij A' het beeld van een bilineaire congruentie A. Het beeld der ster $[M]$ heeft met A 15 stralen gemeen, dus bevat $[M]$ 15 stralen van A'. Analoog blijkt, dat een veld $[\mu]$ 13 stralen van A' bevat.

Het beeld van een congruentie (1,1) *is dus een congruentie* (15,13).

Deze congruentie bevat de tien hoofdstralen b_{kl}, want het punt P'_{kl} brengt een straal in de (1,1).

De aan B_k toegewezen complex $\{t\}^4_k$ heeft met een (1,1) een regelschaar van den achtsten graad gemeen. Met haar doorgang op α komt in $[\alpha]$ een kromme α^8 overeen, die de doorgangen bevat van de stralen s_k in het beeld der (1,1). Dus heeft de congruentie (15,13) de punten B_k tot *singuliere punten van de orde acht.*

Ik beschouw nu den waaier (P',α) en den homologen waaier (P',α). De kromme β^3, welke een straal t_x van den eersten tot koorde heeft, brengt vier bisecanten u in de congruentie (1,1); hun doorgangen Q worden met P' verbonden en leveren dan vier stralen q, die aan den straal t'_x worden toegewezen. Een straal q zondert uit (1,1) een quadratische regelschaar af, en deze heeft tien stralen u gemeen met den complex $\{u\}^5$, die bij den waaier (P,α) behoort (§ 4). Aan q zijn dus tien stralen t'_x toegevoegd; telkens als twee gekoppelde stralen q en t'_x samenvallen, rust op t'_x een koorde van een β^3, welke t_x tweemaal ontmoet. Hieruit volgt, dat het vlak α *singulier vlak van de orde veertien* is voor de congruentie (15,13).

Met den straal, dien een (1,1) in het vlak β_{123} brengt, komt een waaier overeen, waarvan het vlak door b_{45} gaat; aan elken der beide stralen van (1,1), die op b_{45} en p'_{123} rusten, is een waaier in

het vlak β_{123} toegewezen. Dus bevat de congruentie (15,13) *twintig waaiers* in de vlakken β_{klm} en *tien waaiers* in vlakken door de rechten b_{rs}.

10. Het beeld van een *axialen complex*, met richtlijn d, is een *complex van den negenden graad*. Want d snijdt negen stralen van de regelschaar $(t)^9$, die het beeld is van een waaier.

Van den kegel $(P')^2$, die aan een straal s_k is toegevoegd, snijden twee ribben de richtlijn d; dus is B_k een dubbel te tellen *hoofdpunt* van den complex $\{t'\}^9$.

De waaier, die het beeld is van een in β_{123} gelegen straal, brengt een straal in den axialen complex; de complex $\{t'\}^9$ bevat dus de *tien velden* $[\beta_{klm}]$. Tevens bevat hij de *tien bilineaire congruenties* met richtlijnen b_{kl}, p'_{mnr}.

Van de regelschaar $(t')^4$, die een straal t_α afbeeldt, rusten vier stralen op d; dus bevat de complex $\{t'\}^9$ het viermaal te tellen *veld* $[t_\alpha]$.

De quadratische kegel, die aan een singulieren straal s is toegewezen (§ 5) heeft twee ribben met den axialen complex gemeen; bijgevolg behoort de congruentie (5,8) der stralen s tweemaal tot $\{t'\}^9$.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt, mede namens den Heer F. HOGEWIND, een mededeeling aan over „*Lichtelectrische gevoeligheid van Gels*".

Wordt een metalen schijf, die een negatieve lading bezit, door middel van een of andere lichtbron bestraald, dan wordt de schijf ontladen. Echter niet, als de schijf eene positieve lading bezit.

Dit feit werd het eerst gevonden en beschreven door W. HALLWACHS [1]) in 1888, en is bekend onder den naam van lichtelectrische gevoeligheid of Hallwachseffect.

De ontlading bleek later te berusten op een uitzending van electronen onder den invloed van het licht, en wel in hoofdzaak van het ultraviolette licht.

Voor het onderzoek maakt men dan ook liefst gebruik van een aan ultraviolette stralen rijke lichtbron, b.v. een koolspitsen-booglamp, waarvan het licht direct, of met behulp van kwartslenzen op de metalen schijf wordt geworpen. Deze is met behulp van een barnsteenen staafje geheel geïsoleerd opgesteld en verbonden met een geäarden electroscoop, die negatief opgeladen wordt.

Om den belemmerenden invloed van de, in de lucht vóór de schijf opgenomen, electronen te voorkomen, wordt vóór de metalen plaat, op ± $1^1/_2$ c.M. afstand, een draadwerk van geoxydeerd ijzergaas, dat zelf zeer weinig lichtelectrisch gevoelig is, opgesteld. Dit draadwerk wordt positief opgeladen tot een potentiaal van 50 à 100 volt en neemt de uitgezonden electronen oogenblikkelijk op.

Door het netwerk heen wordt de schijf bestraald, waarbij terstond de electroscoop aanvangt zich te ontladen. De snelheid der ontlading, gemeten door den z.g. halfwegtijd, is daarbij een maat voor de lichtelectrische gevoeligheid der schijf.

Volgens HALLWACHS zijn lichtelectrisch gevoelig:

De metalen, het sterkst de alkalimetalen, dan Al, Mg, Zn, etc.

Vele metaalverbindingen: oxyden, chloriden, bromiden, etc.

Vele mineraliën.

Vele kleurstoffen b.v. anilinekleurstoffen, *ook* hunne oplossingen in water.

---

[1]) MARX, Handb. der Radiologie. HALLWACHS, Lichtelektricität. 1915. Bd. IIIb. S. 245.

Sommige niet-geleiders, als zwavel, hard gummi.

Gassen worden door de uiterste ultraviolette stralen werkzaam.

Niet werkzaam bleken te zijn o. a.: water, steen, graniet, hout.

In het algemeen kan men zeggen, dat alle vaste lichamen, die het licht voldoende absorbeeren, en de electriciteit voldoende geleiden, lichtelectrisch worden.

Daarentegen zijn volgens HALLWACHS vloeibare stoffen in substantie geen van alle sterk werkzaam. Hij vond slechts 2 vloeistoffen, die duidelijk positief reageerden op lichtbestraling, n.l. het aniline en het mierenzuur.

Ook in de latere literatuur worden geen vloeistoffen genoemd als duidelijk photoelectrisch.

Beide bovengenoemde vloeistoffen behooren tot de reukstoffen, en het gelukte ons, onder deze categorie van stoffen er nog verschillende te vinden, die in vloeibaren staat photoelectrisch waren, o. a. de vloeibare termen van de aniline-reeks: toluidine en xylidine. Verder guajacol, kreosol, eugenol, anethol, enz. De gevoeligheid van anethol b.v. komt die der sterkst werkende metalen nabij.

Oplossingen van alle bovengenoemde vaste en vloeibare stoffen in water bleken over het algemeen niet photoelectrisch te zijn. Een uitzondering vormden o. a. de reeds bovenvermelde oplossingen van aniline-kleurstoffen.

Men veronderstelde [1]) dat dit laatste het gevolg was van het zich vormen van een oppervlakte-vliesje, dat een zeer dunne laag van vaste stof vormde, waaraan de lichtelectriciteit gebonden zou zijn. Deze laatste stijgt met de dikte van het laagje tot een bepaalde grens. Dit oppervlakte-vliesje staat in verband met den colloidalen toestand, waarin de kleurstofoplossing verkeert. Oxydatie is hierbij niet in het spel. Ook anorganische colloiden, als arsenik en antimoontrisulfide, doen hetzelfde [2]).

HALLWACHS echter geeft zelf reeds op, dat de lichtelectrische gevoeligheid niet altijd gebonden is, en parallel gaat met de vorming van dit vliesje.

Het bleek ons nu, bij een onderzoek der reukstoffen, dat een oplossing van een willekeurige stof, hetzij vast of vloeibaar, slechts dàn lichtelectrisch gevoelig is, als voldaan is aan de volgende drie voorwaarden:

1°. De opgeloste stof moet in substantie photoelectrisch zijn.

2°. De oplossing moet het ultraviolette licht sterk absorbeeren.

---

[1]) ROHDE (Ann. de Physik, 19, p. 935—959, 1906).

[2]) PLAGMEIER, Deutsche Phys. Gesellschaft, Verh. 11, p. 382—396 (1909).

3°. De oplossing moet colloidaal zijn.

Bij dit onderzoek met vloeistoffen in substantie en met oplossingen bezigden wij filtreerpapier, dat met de vloeistof werd gedrenkt en op een, met behulp van barnsteen geïsoleerden standaard, gehangen.

Filtreerpapier, mits goed afgesloten bewaard, is zéér weinig lichtelectrisch gevoelig. Het wordt echter door adsorptie van reukstoffen spoedig gevoelig, en mag dus niet in een met reukstoffen bezwangerde atmosfeer bewaard worden.

Zorgt men er verder voor, dat de afstand van de lichtbron tot het papier, en het belichte oppervlak van het papier steeds even groot zijn, dan heeft men in den z.g. halfwegtijd van de electroscoop een betrouwbare maat voor de gevoeligheid der vloeistoffen.

De colloidaliteit is een absolute voorwaarde voor de photoelectriciteit van oplossingen, en wel neemt deze toe, naarmate de micellen grooter worden en de oplossing toch nog tijdelijk stabiel is.

Een verzadigde waterige oplossing van eugenol b.v. geeft:

	Halfwegtijd	
	Bestraald	Onbestraald
versch	2 min. 15 sec.	18 min.
na 1 uur	1 ,, 40 ,,	18 ,,
,, 2 dagen	1 ,, 15 ,,	18 ,,
,, 4 ,,	1 ,,	18 ,,
,, 7 ,,	50 sec.	18 ,,
,, 10 ,,	50 ,,	18 ,,

Is er eugenol in overmaat, dan blijft de gevoeligheid verder constant.

Op dezelfde wijze werden ook verschillende physiologische vloeistoffen onderzocht.

Ook hierbij bleek, dat

1e Kristalloide-oplossingen niet photoelectrisch zijn.

2e Colloidale-oplossingen alleen dàn, als zij aan de bovengenoemde 3 voorwaarden voldoen.

Lichtelectrisch gevoelig bleken te zijn:

	Halfwegtijd.	
	Bestraald	Onbestraald
Serum-globulineopl. (zwak)	8 min.	18 min.
Serum-albumineopl. (zwak)	8 ,,	18 ,,
Paardenbloedserum	$5^1/_2$,,	18 ,,
Paardenbloed	$5^1/_2$,,	18 ,,

	Bestraald	Onbestraald
Paardenbloed met water lakkleurig gemaakt	$3^1/_2$,,	18 ,,
Kippeneiwit in glycerine (verz.)	8 ,,	18 ,,
Nucleine verz. wat.opl.	7 ,,	18 ,,

De gevoeligheid van physiologische oplossingen is dus matig groot. Nog kleiner is die van *fermenten*:

Pepsine glycerine (verzadigd)	10 min.	18 min.
Diastase ,, ,,	8 ,,	18 ,,
Pankreatine 2 % wat.opl.	8 ,,	18 ,,
Leucine 2 % wat.opl.	10 ,,	18 ,,
Tyrosine verz. wat.opl.	7 ,,	18 ,,

Niet gevoelig bleken o. a.:

Lecithine (verz. wat.opl.), en Caseïne (verz. wat.opl.), als gevolg daarvan, dat deze stoffen in substantie evenmin lichtelectrisch gevoelig zijn.

Over het Hallwachseffect bij *gels* wordt in de literatuur niets aangegeven.

Wij onderzochten een reeks van gels en vonden sommige wèl, andere niet gevoelig.

Bij de eerste was de stof ook in volkomen gedroogden staat gevoelig, terwijl deze gels bovendien het ultraviolette licht sterk absorbeeren.

Positief reageeren o. a.:

	Halfwegtijd	
	Bestraald	Onbestraald
2 % Agaroplossing	9 min.	18 min.
6 % ,,	8 ,,	18 ,,
8 % ,,	$7^1/_2$,,	18 ,,
2 % Gelatineopl.	6 ,,	18 ,,
Carrageen	7 ,,	18 ,,
Vischlijm	$7^1/_2$,,	18 ,,
Rubber (sheet)	7 ,,	18 ,,
,, (geplasticeerd)	10 ,,	18 ,,
,, (gevulcaniseerd)	5 ,,	18 ,,

Ook de gels zijn dus slechts weinig lichtelectrisch gevoelig.

Daar de physiologische stoffen in de weefsels gedeeltelijk in geltoestand voorkomen, zochten wij een middel om dezen toestand na te bootsen, en meenen dat gevonden te hebben in een kiezelzuurgel, die gemaakt werd volgens een recept, in het laboratorium van Prof. Beyerinck in gebruik:

10 cc. Na silicaat, verdund met het 2-voudig volume water, wordt met 10 cc. normaal zoutzuur vlug en goed omgeschud en daarna in een Petrischaaltje uitgegoten, waar zich dan na korten tijd een gel vormt. Deze is lichtelectrisch vrijwel volkomen ongevoelig.

Giet men nu, vóór de massa geheel hard is geworden, een of andere colloidale oplossing op de plaat, dan wordt deze meer of minder diep met de vloeistof geïmbibeerd en kan zij door afwasschen niet meer verwijderd worden.

Ook kan men de oplossing door de kiezelzuurgel verwerken vóór het zoutzuur eraan wordt toegevoegd, waarbij dus de héêle massa de colloidale stof bevat.

Is deze laatste nu lichtelectrisch gevoelig, dan is de kiezelzuurschijf dat ook geworden, hetzij alleen aan de oppervlakte, als zij volgens de 1e methode, hetzij door de heele dikte heen, als zij volgens de 2e methode is bereid.

Op deze wijze hebben wij bij de volgende physiologische stoffen gevonden:

		Bestr.	Onbestr.
Kiezelzuurplaat	+ serum-albumine (zwakke opl.)	9 min.	18 min.
,,	+ serum-globuline ,, ,,	9 ,,	18 ,,
,,	+ lecithine-opl. (verz.)	18 ,,	18 ,,
,,	+ paardenbloed	5 ,,	18 ,,
,,	+ Caseine-opl. (verz.)	18 ,,	18 ,,
,,	+ Pankreatine 2 °/₀	9 ,,	18 ,,
,,	+ lecithine + chloroform	18 ,,	18 ,,
,,	+ verz. versche wat.nucleinopl.	7 ,,	18 ,,
,,	+ verz. ,, tyrosineopl.	6 ,,	18 ,,

Ook in dezen toestand gedragen de physiol. oplossingen zich dus tegenover bestraling op dezelfde wijze.

Wordt de zooeven beschreven gel met een kristalloide oplossing gedrenkt, dan is geen zweem van photoelectriciteit te bespeuren. De adsorptie der moleculen aan de gelsubstantie schijnt dus niet voldoende te zijn. Zij moeten zelf vooraf in colloidalen toestand gebracht klaarblijkelijk in continueele laag op en in de gel zijn uitgespreid om het ultraviolette licht voldoende aangrijpingspunt tot zijn lichtelectrische werking te kunnen verschaffen.

Geeft men de kiezelzuurgel ongeveer 2 à 3 millimeter dikte en giet de colloidale oplossing over de naar het licht gekeerde vlakte uit, dan zal ook aan de van het licht afgekeerde vlakte een zwakker photoelectriciteit merkbaar zijn, klaarblijkelijk doordat de langzame electronen, die het licht doet uitzwermen, doordringingskracht genoeg bezitten om ook aan de achterzijde naar buiten te komen. Wanneer

intusschen de colloidale, lichtelectrisch-gevoelige oplossing op de van het licht afgekeerde vlakte wordt uitgegoten, blijft de achterlaag ongevoelig, omdat het licht niet zoo diep kan doordringen. Het wordt door het kiezelzuur tegengehouden. Noch water, noch glycerine doen zulks in zulke dunne lagen op merkbare wijze.

Wij hebben getracht door eosine-toevoeging ons het zichtbare licht, dat wel doordringt, ten nutte te maken, doch voor de lichtelectriciteit zonder resultaat, hetgeen ook niet verwonderen kan, daar het zichtbare licht in het algemeen (behalve bij alkalimetalen en schoongemaakt aluminium, magnesium en zink) niet in staat is photoelectriciteit te verwekken.

Het doel van onze gelproeven is geweest ons een model van een dierlijk weefsel te verschaffen, waaraan wij modelproeven over lichtwerking zouden kunnen verrichten. De kiezelzuurgel eigent zich hiertoe zeer in het bijzonder, daar zij zelf, in tegenstelling tot de gelatine- en agar-gels, hoegenaamd niet lichtelectrisch gevoelig is. Dit maakt het mogelijk haar met allerlei in het dierlijk weefsel voorkomende colloiden te doordringen en de werking van het licht op deze in diverse verspreiding en onder verschillende voorwaarden te beoordeelen. Alleen de geringe doorlaatbaarheid van het kiezelzuur voor ultraviolet licht is in sommige opzichten een belemmering. Indien men een dieper doordringen van het ultraviolette licht beoogt, zal men de kiezelzuurgel door een gelatinegel hebben te vervangen, die echter, gelijk reeds opgemerkt, zelf in geringe mate photosensibel is. Omgekeerd zal het bedekken van de gel met een oppervlakkig groeiende cultuur een schermwerking uitoefenen. Dit bleek ons b.v. toen wij een gelatinegel met een dicht gezaaide cultuur van lichtgevende bacteriën bedekten. De lichtelectrische gevoeligheid van de gelatinegel nam daardoor duidelijk af.

De photoelectriciteit van dierlijke weefsels zal kennelijk van de daarin vereenigde soles, gels en vaste stoffen (dubbelbrekende vezels, kristallen, vloeibare kristallen) afhankelijk zijn. De modelproef met de gels stelt in staat deze samenstellende bestanddeelen in willekeurige hoeveelheden onderling te vereenigen. Men neme, indien men enkel eene werking in de oppervlakkige lagen beoogt, zijn toevlucht tot kiezelzuur, daar het zelf lichtelectrisch ongevoelig is, tot gelatine, wanneer men ook dieper werkingen uitgeoefend wil zien.

Mikrobiologie. — De Heer BEIJERINCK biedt een mededeeling aan over: „*Oidium lactis, de melkschimmel en een eenvoudige methode om met behulp daarvan anaëroben zuiver te kweeken*".

De vele voor de reinkultuur der anaëroben aanbevolen methoden, — wier veelheid bewijst, dat geene daarvan de onderzoekers geheel bevredigt, — kunnen in chemische en biologische verdeeld worden. Wat de eerste betreft, waarvan de „exsiccatormethode" van NOVY wel de beste is, is zoowat alles beproefd. Dit kan niet gezegd worden van de biologische, waarbij voor de zuurstofonttrekking van andere levende organismen, in het bijzonder van aërobe mikroben gebruik wordt gemaakt. Zoo heb ik zelf eerst nadat ik daarvoor de melkschimmel heb toegepast, resultaten gekregen, die de moeite waard zijn om er nog eens de aandacht op te vestigen.

Eenige hoofdpunten uit de levensgeschiedenis van *Oidium*, die voor het doen van proeven daarmede belangrijk zijn, laat ik voorafgaan; een uitvoerige beschrijving is hier onnoodig.

Eigenschappen van de melkschimmel.

De melkschimmel bezit een som van eigenschappen, waardoor deze soort bijzonder geschikt is voor velerlei proeven, die in verband staan met de ademhaling, de voeding, den groei en de symbiose. In *Oidium* is het karakter der schimmels met dat der gistsoorten vereenigd, vooral wat betreft den groei in en op het substraat, zonder dat daarmede gisting of de vorming van door luchtstroomen verstuivende conidiën gepaard gaan. In het substraat vindt men het langcellige mycelium, daarop de conidiënsnoeren, die zelfs als zij vrij in de lucht reiken niet stuiven en nooit de omgeving besmetten, zooals de schimmels dat doen.

De verkrijging is gemakkelijk. Een rijke kultuur ontstaat, wanneer men marktmelk in een open glas enkele dagen in een warme kamer laat staan, waarbij de melk zich steeds met een *Oidium*huid bedekt. Daarbij komen tevens melkzuurfermenten tot ontwikkeling, die door hun zuurvorming uit laktose den groei van *Oidium* bevorderen en zelve in hun groei door *Oidium* begunstigd worden, omdat daardoor het melkzuur wordt geoxydeerd tot koolzuur en water. In tuingrond is *Oidium* algemeen verspreid, hetgeen aangetoond kan worden door

zwak aangezuurd moutextrakt met grond te infekteeren en bij 25 à 30° C. te bewaren. De kaamhuid die ten slotte de vloeistof bedekt, bevat, behalve kaamgist steed *Oidium*. Van persgist, lange wei, zure melk, kaas, van de spoeling der branderijen en allerlei afvalwateren is *Oidium* een bewoner. Natuurlijke vindplaatsen zijn verder de sapvloed van verschillende boomen en de slijmvloed van eikestammen.

Voor de reinkultuur zijn aangezuurde moutextract- of bouillon-glycerine-platen aan te bevelen. Het zuur dient om de hooibakteriën uit te sluiten, die groote neiging bezitten om met *Oidium* in neutrale omgeving in symbiose te groeien.

De overentingen voor de collectie worden op moutagar gehouden, maar zij veranderen daarbij, na eenige maanden, in een taai, lederachtig mycelium, bijna uitsluitend uit lange myceliumdraden gevormd, dat moeielijk uit elkander te wrijven is. Het is dan, voor het verkrijgen van normaal materiaal het beste weder uit melk of grond opnieuw te isoleeren, want de verandering is een erfelijk mutatieverschijnsel, dat niet terugloopend kan worden gemaakt.

Opmerkelijk groot is de snelheid van den groei bij gunstige voedingsvoorwaarden, waarmede de intensiteit van de ademhaling en van de zuurstofabsorptie parallel gaan. Deze intensiteit is belangrijk grooter dan die der gewone schimmels van de geslachten *Penicillium* en *Aspergillus*, terwijl zij die van *Mucor* evenaart. Dit geldt echter alleen bij goede voeding, want tot de diepgaande omzettingen waartoe *Penicillium* en *Aspergillus* aanleiding geven, waarvan sommige soorten zelfs van cellulose en chitine kunnen leven, is *Oidium* niet in staat. Ook gelatine en agar worden volstrekt niet aangetast. Gistingsverschijnselen gepaard met gasontwikkeling ontbreken; dientengevolge vormt *Oidium* in vaste kultuurbodems nooit gasblazen of scheuren, zelfs niet bij aanwezigheid van glukose. Hierop o.a. berust de voortreffelijkheid voor de kultuurproef met anaëroben, die straks beschreven zal worden.

Als stofwisselingsprodukten ontstaan, al naar de voeding in hoofdzaak of alleen water en koolzuur; vluchtige of niet vluchtige stoffen hinderlijk voor andere organismen worden niet voortgebracht.

Ten opzichte van het voedsel vertoont *Oidium* groote specialisatie. De meeste hexosen, in 't bijzonder glukose, laevulose en mannose worden zeer gemakkelijk geassimileerd en verbrand. Evenzoo aethylalkohol. Ook glycerine is een buitengewoon goede koolstofbron. Zetmeel, maltose, rietsuiker, raffinose, melksuiker, manniet, en vele andere dergelijke stoffen worden daarentegen in het geheel niet geassimileerd en niet aangetast. Enzymen zooals diastase, malto-glukase, invertase, laktase ontbreken derhalve volkomen. Glukosidenzymen konden evenmin wor-

den aangetoond. Juist door de afwezigheid dezer enzymen is *Oidium*, die op hun produkten zoo krachtig reageert, bijzonder geschikt om als reaktief te dienen op de enzymen, die in bepaalde deelen van hoogere planten voorkomen of door andere mikroben worden afgescheiden, waarbij met voordeel de auxanografische methode kan worden toegepast.

Vetten worden evenwel door *Oidium* gesplitst, namelijk door een ook buiten de cellen werkzaam exoënzym. Bij aanwezigheid van vetten kan men derhalve groei van *Oidium* verwachten ten koste van de bij de lipolyse gevormde glycerine en dit verklaart de algemeenheid van *Oidium* zoowel in melk als in andere vethoudende materialen. Voor de bereiding van vetsplitsende preparaten kan de melkschimmel een goed uitgangsmateriaal leveren.

Wat de stikstofvoeding betreft komt *Oidium* ongeveer overeen met de gewone gistsoorten en is dus in dat opzicht nogal veelzijdig. Met uitzondering van nitraten en nitrieten en onveranderde eiwitten worden de gewone stikstofverbindingen gemakkelijk geassimileerd bij aanwezigheid van goed koolstofvoedsel, zooals glukose of glycerine. In het bijzonder geldt dit voor ammoniakzouten en ureum. Peptonen en de hoogere amminozuren worden als zij alleen zijn niet of zeer langzaam geassimileerd, maar zij kunnen bij aanwezigheid eener goede koolstofbron als stikstofvoedsel dienst doen, zoodat de volledige voeding van *Oidium* bij aanwezigheid dezer stoffen een dualistische moet genoemd worden. Dientengevolge is bouillon voor *Oidium* een zeer onvolkomen voedsel en een rijke uitzaaiing van *Oidium* op een bouillon-agar plaat ontwikkelt zich slechts weinig. Dit verandert echter geheel bij toevoeging van een goede koolstofbron. Geschiedt dit lokaal op een vleeschbouillon-agarplaat dan ontstaat, voorzoover de betrokken stof diffundeert, een auxanogram of groeiveld, bewijzende dat de overige voor de voeding noodzakelijke elementen in voldoende hoeveelheid aanwezig waren. Daar deze laatste elementen in de éénzijdig gevoede cellen blijken opgehoopt te zijn, al of niet in denzelfden chemischen bindingsvorm, waarin zij in den voedingsbodem voorkwamen, zijn zulke proeven geschikt om het absorptieverschijnsel aan te toonen, dat ik vroeger beschreven heb. Zoo is het bijv. gemakkelijk om, bij omkeering der proef, dat is bij overmatige voeding met een koolhydraat, mikroskopisch glycogeen in de zoo groote *Oidium*cellen aan te toonen en het verdwijnen daarvan in de auxanogrammen van stikstofvoedsel, zooals ammoniakzouten of ureum.

Een zwak zure reaktie van den voedingsbodem is voor den groei van *Oidium* gunstig; sommige organische zuren, bijv. melkzuur, kunnen

daarbij door oxydatie verdwijnen. Andere zuren, zooals molybdeen- en wolframzuur, worden in goede voedingsbodems, zooals glukose-bouillon-agar door *Oidium* tot de bekende blauwe oxyden gereduceerd, hetgeen tot fraaie kleuringsproeven aanleiding geeft. In neutrale oplossingen worden de zouten dezer zuren echter niet aangetast. De gewone alkoholgisten gedragen zich evenzoo.

Gebruik van de melkschimmel voor de reinkultuur van anaëroben.

In de natuur wordt de zuurstofonttrekking aan de omgeving, die noodig is voor de ontwikkeling der anaëroben gewoonlijk door aërobe mikroben veroorzaakt. Deze absorbeeren niet alleen de laatste sporen van vrije zuurstof uit de omgeving maar zij brengen daarin zelfs reduceerende stoffen voort. In het laboratorium kan men dit nabootsen door aan een kultuurbodem, waarin de te onderzoeken anaërobe in gering aantal voorkomt een zeer groot aantal kiemen van een geschikte aërobe toe te voegen. Hoe zulke proeven tot nu toe gedaan zijn [1]) zal ik door een bepaald voorbeeld toelichten, namelijk aan het kultiveeren van de sporenvormende anaëroben der echte eiwitrotting; daarna zal ik de gewijzigde methode bespreken.

Een ruwkultuur dezer bakteriën verkrijgt men door een stopflesch geheel te vullen met een waterige eiwitoplossing, te infekteeren met tuingrond, op te kooken en daarna af te sluiten. Bij plaatsing in een broedstoof gaat de massa spoedig over in stinkende rotting, veroorzaakt door de sporenvormende anaëroben. Nu wordt aan gewone bouillon-gelatine of -agar met een weinig keukenzout, een of andere zeer intensief groeiende aërobe bakterie zooals *B. fluorescens* of *B. prodigiosum*, in groote hoeveelheid toegevoegd, alsmede een weinig van het op 90° of 100° C. verhitte materiaal, waarin de sporen der rottingsbakteriën voorkomen. Na stolling in een reageerbuis zullen de aëroben in de diepte spoedig de laatste sporen zuurstof doen verdwijnen, en omdat zij zelf aldaar niet kunnen groeien ook niet tot versmelting der gelatine aanleiding geven; ook zullen zij de van boven indringende zuurstof absorbeeren en zich in de oppervlakte der gelatine sterk ontwikkelen. In de diepte kunnen de sporen der rottingsbakteriën nu ontkiemen en al spoedig ziet men, bij het gebruik van gelatine, de groote smeltende koloniën van den zoo merkwaardigen *Bacillus septicus* ontstaan, naast niet smeltende, veelal vlok-vormende (op druk- en trekspanning reageerende) koloniën van andere rottingsbakteriën. Voor het mikros-

[1]) E. Macé, Traité pratique de Bactériologie, 6e Ed. T. 1, pag. 305, Paris 1912. Besson, Technique microbiologique et sérothérapique, 6e Ed., pag. 102, Paris 1914.

kopisch onderzoek heeft men nu ongetwijfeld beter materiaal dan in de ruwkulturen, hoezeer het niet gemakkelijk te bereiken is. Daarvoor toch is het noodig de kultuurgelatine uit de buis te verwijderen, door deze in de gasvlam te verwarmen, waardoor alleen de buitenkant van de gelatine smelt en de geheele inhoud in één stuk kan worden uitgeworpen. Ook kan men met een vijl insnijdingen in den glaswand maken ter plaatse van gunstig gelegen koloniën. Natuurlijk is de kans groot, dat daarbij de verschillende koloniën door elkander vloeien, zoodat van een reinkultuur van anaëroben in den gewonen zin van het woord bij zulke proeven meestal geen sprake is. Voor het mikroskopisch onderzoek en voor het leeren kennen van het uiterlijk der koloniën is de methode goed, maar voor het kweeken der zuivere soorten onbruikbaar,

Iedere goede methode van reinkultuur, zoowel van aëroben als van anaëroben, moet evenwel aan de twee volgende eischen voldoen: De koloniën moeten geheel vrij en op behoorlijke afstanden van elkander verwijderd, op de oppervlakte der vaste kultuurplaten gelegen zijn, verder moeten zij met de grootste gemakkelijkheid met den platinadraad bereikbaar zijn. Aan deze eischen kan alleen voldaan worden door kultuur in gewone glasdoozen of PETRIschalen.

Dit kan in een goed ingericht laboratorium zeer goed geschieden door de exsiccator methode van NOVY (zie MACÉ, l.c.), waarbij gewone kultuurdoozen in hun geheel in een atmosfeer van zuivere waterstof in een exsiccator geplaatst worden, waarin nog bovendien een of ander zuurstofonttrekkend middel, zooals een pap van ferro-ferrocyan of alkalische pyrogallol is geplaatst. Maar ook aan deze methode zijn nadeelen verbonden. Men is daarbij namelijk de afzetting van waterdamp tegen de glasdeksels niet geheel meester, tengevolge waarvan het afloopende water op de kultuurplaten kan komen, dat de kolonies door elkander doet loopen en de geheele proef nutteloos maakt. Ook is het moeielijk of onmogelijk in den niet geopenden exsiccator den ontwikkelingstoestand der kolonies duidelijk te zien, waardoor men gevaar loopt te vroeg te openen en dan verplicht is opnieuw te beginnen, hetgeen bij de omslachtigheid der proef lastig is.

De *Oidium*-methode, welke ik nu zal bespreken, is van al deze nadeelen vrij, en levert, bij goede uitvoering, geheel vrij op de oppervlakte der kultuurplaten gelegen kolonies der anaëroben.

Het principe der methode bestaat in het boven elkander plaatsen van twee kultuurplaten, die slechts door een betrekkelijk kleine luchtruimte van elkander gescheiden zijn en waarvan de eene de aërobe mikrobe bevat, die de zuurstof moet absorbeeren, terwijl op het

oppervlak van de tweede de anaërobe moet groeien. Ook hier kies ik een bepaald voorbeeld ter toelichting, namelijk de streng anaërobe bacillen van de boterzuur- en de butylalkoholgistingen; zij bezitten overeenkomstige voedingsvoorwaarden en kunnen op dezelfde wijze geisoleerd worden. Het zijn sporenvormende bacillen, die het beste leven in moutextrakt, waarin zij krachtige gistingen veroorzaken, die gepaard gaan met de ontwikkeling van waterstof en koolzuur. Een ruwe boterzuurgisting verkrijgt men als volgt. Gemalen rogge of tarwe, of beter nog tot pap gewreven aardappelen, worden in een bekerglas met water gemengd; er wordt krijt toegevoegd en men verwarmt gedurende eenige seconden tot 90° à 100° C. Bij 30° à 40° C. ontstaat dan gewoonlijk na twee dagen een krachtig boterzuurgisting, waarin verschillende soorten van boterzuurbakteriën voorkomen, die daaruit zullen geisoleerd worden.

Voor de inrichting van een ruwe butylalkoholgisting[1]) kan men uitgaan van naakte gerst. Ook aardappelpap kan als uitgangspunt dienen; deze mag dan echter niet hooger dan op 80° C. à 85° C. verhit worden; krijttoevoeging is onnoodig omdat de butylbakteriën bijna geen zuur vormen. Natuurlijk zijn in zulke pappen de sporen der boterzuurfermenten nog aanwezig en het verrassende feit, dat men door de juiste toepassing van een zoo klein temperatuurverschil geen boterzuur- maar een butyl-gisting verkrijgt, moet waarschijnlijk verklaard worden door de schadelijke werking van den butylalkohol op de boterzuurfermenten.

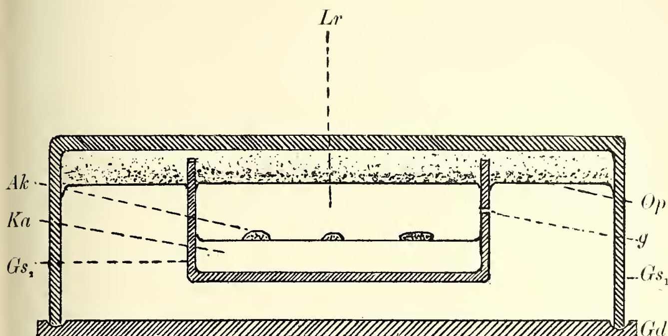
De eigenlijke proef verloopt nu als volgt.

Men smelt in een kolfje moutextract-agar, die 5 à 10 °/₀ glukose bevat en voegt daaraan, na afkoeling tot nabij het stollingspunt een groote hoeveelheid kiemen van *Oidium lactis* toe en men giet daarvan een plaat (*Op*) in een ruime glasdoos (Gs_1). Bij 25° à 28° C. is de geheele oppervlakte dezer plaat reeds na 24 uur met een dichte, sneeuwwitte huid van conidiën bedekt, en het binnenste van de agar met mycelium doorwoekerd, hetgeen gepaard gaat met een zeer belangrijk zuurstofverbruik.

Men vervaardigt nu een tweede moutextrakt-agar-plaat, de kultuurplaat (*Ka*), zonder *Oidium*, in een glasschaal (Gs_2), die veel kleiner is dan Gs_1; de ruimte tusschen Gs_1 en Gs_2 moet voldoende zijn om Gs_2 met de vingers aan te vatten. *Op de oppervlakte* dezer tweede plaat wordt het materiaal uitgezaaid of afgestreken, waarin zich de anaëroben bevinden. In het gekozen voorbeeld dus een weinig van

[1]) Fermentation et ferments butyliques. Archives Néerlandaises T. 39, Pag. 1. Bactéries actives dans le rouissage du lin. Ibid. Sér. 2. T. 9. Pag. 418. 1904.

de met sterielwater verdunde ruwe boterzuur- of butylalkohol-gistingen. Daarna wordt de kleinere glasschaal Gs_2 van den deksel



Kultuur van anaëroben met behulp van *Oidium lactis*. Gs_1 groote glasschaal met de zuurstofabsorbeerende *Oidium*plaat *Op*. Gs_2 kleine glasschaal met de kultuurplaat *Ka*, waarop de anaërobe koloniën *Ak* groeien. *Lr* de luchtruimte tusschen de kultuurplaten. Bij *g* de opening in den glaswand van Gs_2, die met paraffine gesloten wordt. *Gd* de glasdeksel van de groote schaal Gs_1. De hoogste temperatuur is aan den kant van *Gd*.

ontdaan en met den agarkant naar boven op de *Oidium*plaat gedrukt. Om daarbij het ontwijken van de lucht uit de luchtruimte *Lr* mogelijk te maken is in den glaswand van Gs_2 bij *g* een klein gaatje geboord. Dit gaatje wordt daarna afgesloten met een droppeltje paraffine, dat er met een heete roerstaaf is ingebracht. Bij 28° à 30° is de luchtruimte *Lr*, die men betrekkelijk klein kan maken, zeer spoedig zuurstofvrij en de groei der anaëroben *Ak* kan beginnen. Om de zuurstofonttrekking aan de agar *Ka* in Gs_2 nog te bevorderen kan men ook daaraan *Oidium* toeveegen, maar dan moet men daarover nog een dunne laag moutagar zonder *Oidium* gieten om een kiemvrije oppervlakte te verkrijgen bestemd voor de uitzaaiing der anaëroben. Daar *Oidium* volkomen aëroob is, groeien de myceliën niet merkbaar door deze beschuttende laag heen.

Heeft men goede afmetingen der glasdoozen gekozen en maakt men de luchtruimte *Lr* niet al te klein dan kan men zijdelings door den glaswand heen de ontwikkeling der anaërobe koloniën *Ak* volgen, en zien, wanneer het oogenblik voor het verdere onderzoek is gekomen, zonder dat het noodig is de kultuurplaat (*Ka*) van de *Oidium*plaat (*Op*) te verwijderen, waardoor ontijdig openen wordt vermeden.

Is de tijd voor het openen daar, dan houdt men gesmolten mout-agar gereed, die over de *Oidium*plaat, in het bijzonder in de door Gs_2 gevormde groeve gegoten wordt, zoodra de kultuurplaat *Ka* met de anaëroben er weer op geplaatst zal worden. Het nieuwe voedsel geeft tot nieuwe zuurstofabsorptie door *Oidium* aanleiding en de groei der anaëroben kan verder gaan.

Voor het welslagen der proef is het belangrijk op het volgende te letten: Bij het plaatsen in de broedstoof moet de *Oidium*laag *Op* zoo gesteld worden, dat deze zich in het koudere en de glasdeksel *Gd*, alsmede de kultuurplaat *Ka*, zich in het warmere deel der stoof bevinden. Daardoor zal de waterdamp in de luchtruimte *Lr* zich niet op het oppervlak van *Ka* kunnen condenseeren maar in *Op* trekken. In den omgekeerden stand zal *Ka* nat worden, de kolonies *Ak* zullen door elkaar vloeien en de proef mislukt. De figuur is dus geteekend voor een toestand, waarbij de koudere lucht boven, de warmere beneden is, hetgeen in een thermostaat met bodemverwarming de feitelijke toestand is. Hoe eenvoudig dit alles moge schijnen, bij de uitvoering zal men zien, dat het noodzakelijk is daaraan bijzondere aandacht te geven.

Op deze wijze gelukt het uit gewone ruwe boterzuur-gistingen, op bovengenoemde wijze verkregen, drie duidelijk verschillende *Amylobacter*-soorten af te scheiden, waarvan ik twee reeds vroeger beschreven heb (Verslagen Dl. 12, Pag. 973, 1903) onder de namen *A* (*Granulobacter*) *saccharobutyricum* en *A*. (*G*.) *pectinovorum*, terwijl uit de ruwe butylakkoholgistingen twee soorten werden geïsoleerd, waarvan de éene door sterke slijmvorming groote droppelvormige kolonies voortbrengt en eveneens reeds vroeger beschreven is als *A*. (*Gr*.) *butylicum* (Archives Néerl. 1e Sér. T. 29, Pag. 2), terwijl de andere, die geen slijm afscheidt, nog niet nader onderzocht is. De kolonies van al deze soorten kleuren zich met jodium donkerblauw, evenals zetmeel, omdat de staven en de clostridiën, waaruit zij bestaan, een groote hoeveelheid granulose bevatten.

De boterzuur- en butyl-gistingen langs andere wegen verkregen dan de bovengenoemde, zijn nog niet onderzocht.

Daar ook de anaërobe maagsarcine, *Sarcina ventriculi*, zich bijzonder goed op moutextrakt agar bij 30 à 37° C. ontwikkelt (Verslagen 28 April 1911, Pag. 1412), laat ook deze soort zich juist op dezelfde wijze isoleeren als de reeds genoemde.

Wat de echte, anaërobe, sporenvormende bakteriën der eiwitrotting betreft, kan de *Oidium*-kultuur juist zoo ingericht worden als bij de beschreven proef, maar voor de kultuur der anaëroben zelve in Gs_2 is het beter daarbij gebruik te maken van vleesch-bouillon-

agar met 0.5 à 1 °/₀ keukenzout, al of niet met toevoeging van 2 °/₀ glukose. Ook in dit geval geeft voeding met koolhydraten bij sommige soorten aanleiding tot granulosevorming, bij andere niet.

Als verder voorbeeld van een door de *Oidium*-methode geïsoleerde anaërobe noem ik nog *Bacillus acidi urici* (Verslagen 23 April 1909 Pag. 990), waardoor urinezuur vergist wordt tot koolzuur, ammoniumacetaat en ammonium-carbonaat. Ook deze soort ontwikkelt zich het beste op vleeschbouillon-agarplaten bij 30 à 35° C.

Voor eerstbeginnenden moet nog opgemerkt worden, dat op de kultuurplaat *Ka* ook de facultatief-anaëroben, zooals *Bacterium aërogenes* en *B. coli* zeer goed tot ontwikkeling komen, waarvan men zich overtuigt door alle kolonies *Ak* op aërobe kultuurplaten af te strijken, waarop alleen de anaëroben niet groeien.

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van den Heer Prof. J. WOLFF: *„Over de quasi-uniforme convergentie."*

(Mede aangeboden door den Heer J. C. KLUYVER).

HOOFDSTUK I.

Wij beschouwen in een interval $a \leq x \leq b$ een convergente reeks van continue functies $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$.

ARZELA heeft aangetoond dat de noodige en voldoende voorwaarde voor de continuiteit van $f(x)$ de *„quasi-uniforme convergentie"* der reeks is. [1]) Hieronder wordt verstaan dat als men twee positieve getallen kiest ε en N, het eerste zoo klein als men wil, het tweede zoo groot als men wil, er een getal $N' > N$ bestaat zoodanig dat men voor iedere x van het interval een tusschen N en N' gelegen aantal termen n_x der reeks kan bepalen, waarvan de som $S_{n_x}(x)$ minder dan ε van $f(x)$ afwijkt.

Hoewel dit theorema een volledige oplossing geeft van het vraagstuk: de gewone uniforme convergentie te vervangen door iets anders, dat niet alleen voldoende, maar ook noodig is voor de continuiteit van $f(x)$, laat de quasi-uniforme convergentie zich nog vervangen door een ruimere voorwaarde, waardoor we een kleine uitbreiding krijgen van ARZELA's stelling. Wij zullen namelijk het volgende bewijzen:

1. *Als de reeks quasi-uniform convergent is op een puntverzameling E, die overal dicht is in het interval $a \leq x \leq b$, dan is $f(x)$ continu in dat interval.*

Bij iedere ε en iedere N bestaat er volgens deze onderstelling een getal $N' > N$, zoodanig dat men voor iedere x *van E* een tusschen N en N' gelegen index n_x kan bepalen, waarvoor $|f(x) - S_{n_x}(x)| < \varepsilon$ is.

Wij kiezen een willekeurig punt x van het interval. Wegens de convergentie der reeks kan men een getal N vinden zoodat, als ε een willekeurig positief getal is:

$$|f(x) - S_n(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon, \quad \text{voor} \quad n > N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

[1]) *Mem. R. Acc. Bologna 1899.*
BOREL, *Leçons sur les Fonctions de variables réelles.*

Voor iedere n tusschen N en het aan $\frac{1}{3}\varepsilon$, N toegevoegde getal N' kan men nu een interval $(x-\delta, x+\delta)$ bepalen, zoodat voor ieder punt ξ daarbinnen de ongelijkheid

$$|S_n(\xi) - S_n(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

bestaat, wegens de continuiteit van $S_n(x)$. Wegens de eindigheid van het aantal van deze indices n, bestaat er een interval I met x tot middelpunt, zoodat voor ξ binnen I aan (2) voldaan is, en wèl voor iedere n tusschen N en N'. Is derhalve ξ een binnen I gelegen punt van E, dan is, als we voor n den bij ξ behoorenden index n_ξ kiezen, vooreerst voldaan aan (1) en (2), verder aan

$$|S_{n_\xi}(\xi) - f(\xi)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Uit (1), (2) en (3) volgt dat

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Men heeft dus $f(x) = \lim_{\xi \to x} f(\xi)$, waarin ξ de dichte verzameling E doorloopt. Is x' een punt van I, dat niet tot E behoort, dan is

$$|f(x) - f(x')| = \lim_{\xi \to x'} |f(x) - f(\xi)| \leq \varepsilon.$$

Hiermee is de continuiteit van $f(x)$ bewezen.

2. In verband met de stelling van ARZELA blijkt nu dat de quasi-uniforme convergentie op een verzameling E die dicht is in $a \leq x \leq b$ de quasi-uniforme convergentie op het heele interval tengevolge heeft.

3. Uit het voorgaande laat zich gemakkelijk afleiden, dat de quasi-uniforme convergentie in ARZELA's stelling kan vervangen worden door het volgende: „bij iedere ε, N bestaat een $N' > N$, benevens een puntverzameling $B(\varepsilon, N)$, behoorende tot de eerste categorie van BAIRE, zoodat men voor iedere x van het interval, *die niet tot* $B(\varepsilon, N)$ *behoort*, een tusschen N en N' gelegen index n_x kan bepalen, waarvoor $|f(x) - S_{n_x}(x)| < \varepsilon$ is." Om dit in te zien, nemen we voorloopig een vaste N en een afnemende rij positieve getallen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots$, met nul tot limiet. Bij ε_k mogen $N'(\varepsilon_k, N)$ en $B(\varepsilon_k, N)$ de genoemde beteekenis hebben. Daar $B(\varepsilon_k, N)$ bestaat uit een aftelbare verzameling van nergens dichte puntverzamelingen, geldt dit eveneens voor de verzameling $B(\varepsilon_1, N) \dot{+} B(\varepsilon_2, N) \dot{+} \ldots = B(N)$, zoodat $B(N)$ ook tot de eerste categorie van BAIRE behoort. Kiezen we nu een toenemende rij getallen $N_1, N_2 \ldots$, met oneindig tot limiet, en stellen we $B(\varepsilon_1, N_i) \dot{+} B(\varepsilon_2, N_i) \dot{+} \ldots = B(N_i)$, dan behoort ook de verzameling $B(N_1) \dot{+} B(N_2) \dot{+} \ldots = B$ tot die categorie, zoodat

haar complementaire verzameling $C(B)$ overal dicht is. Geef nu ε, N willekeurig. Zij $\varepsilon > \varepsilon_k$ en $N < N_i$. Alle punten van $C(B)$ liggen buiten $B(\varepsilon_k, N_i)$, zoodat voor ieder punt van $C(B)$ tusschen N_i en $N'(\varepsilon_k, N_i)$, een index bepaald kan worden n_x, waarvoor

$$|f(x) - S_{n_x}(x)| < \varepsilon_k < \varepsilon$$

is. Hiermede is het bewijs geleverd, daar $C(B)$ overal dicht is, zoodat de stelling van § 1 kan worden toegepast.

4. Ook krijgen we een voldoende voorwaarde als we in het voorafgaande in plaats van $B\ (\varepsilon, N)$ zetten: een verzameling van de maat nul. Want een verzameling die uit een aftelbaar aantal van zulke verzamelingen bestaat, heeft de maat nul, zoodat haar complementaire verzameling overal dicht is, waardoor bovenstaande redeneering weer kan worden toegepast. Hieruit volgt nog in 't bijzonder: *een convergente reeks van continue functies stelt een continue functie voor als de convergentie „bijna overal" quasi-uniform is.*

HOOFDSTUK II.

5. In § 1 hebben we gebruik gemaakt van de *convergentie* der reeks in het willekeurig gekozen punt x, ook als dit punt niet tot de dichte verzameling E behoort. Het is de vraag of het noodig is, de convergentie der reeks in het geheele interval te onderstellen. Convergeert een reeks van functies, die continu zijn in het interval $a \leq x \leq b$, *uniform* op een verzameling E, die overal dicht is in dat interval, dan volgt daaruit haar uniforme convergentie in het heele interval. Naar analogie hiervan komen we tot de volgende vraag: als de termen van een reeks continue functies van x zijn in het interval $a \leq x \leq b$, en de reeks is quasi-uniform convergent op een verzameling E, die in dat interval overal dicht is, kan men dan besluiten tot de *convergentie* van de reeks in het heele interval, en daarmee tot de continuiteit van de functie door de reeks voorgesteld en dus tot de quasi-uniformiteit der convergentie in $a \leq x \leq b$?

Het antwoord luidt ontkennend. Wij beschouwen daartoe de volgende reeks:

$$f(x) = x - x + x^2 - x^2 \ldots + x^n - x^n + \ldots .$$

Deze reeks convergeert quasi-uniform tot nul in het open interval $0 \leq x < 1$, dat een overal dichte verzameling vormt in het gesloten interval $0 \leq x \leq 1$. De convergentie is quasi-uniform omdat de som van een even aantal termen steeds nul is. Voor $x = 1$ is de reeks echter niet convergent.

6. Bij dit voorbeeld nadert $f(x)$ voor $x = 1$ tot een grenswaarde $f(1-0) = 0$. Dat dit niet een gevolg behoeft te zijn van de quasi-uniforme convergentie in het interval $0 \leq x < 1$ leert het volgende voorbeeld:

Laat $y = f(x)$ worden voorgesteld door de zigzaglijn $A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots$, waarbij $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de punten zijn met $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ en $y = 0$, $B_1, B_2, B_3, \ldots$ de punten met $x = \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ en $y = 1$. Kies op de y-as een aftelbare puntverzameling $P_1, P_2, P_3, \ldots$, die in het interval (0,1) overal dicht is. De functie $y = S_n(x)$ moge door de volgende kromme worden voorgesteld: van rechts naar links eerst de zigzaglijn $A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots A_n B_n$, daarna het stuk van $B_n A_{n+1}$ tot het snijpunt C_n met de lijn $y = y_{P_n}$, daarna de lijn $C_n P_n$. Blijkbaar is $S_n(x)$ continu in het interval $0 \leq x \leq 1$. Tevens is $\lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$ voor $0 < x \leq 1$, omdat van af zekere n voor een zoodanig gelegen punt $S_n(x)$ met $f(x)$ samenvalt. Dus convergeert de reeks $S_1(x) + \{S_2(x) - S_1(x)\} + \ldots + \{S_n(x) - S_{n-1}(x)\} + \ldots$ in het interval $0 < x \leq 1$ tot $f(x)$, terwijl alle termen continu zijn in $0 \leq x \leq 1$. *Deze convergentie is quasi-uniform.*

Om dat in te zien, kiezen we ε en N willekeurig. Daar de verzameling (P_i) overal dicht is in (0,1), kunnen we een eindig aantal punten $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots P_{n_k}$ tusschen 0 en 1 kiezen, waarvan de rangnummers $> N$ zijn en die dat interval in $k+1$ stukken verdeelen, allen $< \varepsilon$. Zij nu x een willekeurige tusschen 0 en 1 gelegen waarde. Valt $f(x)$ met één der k waarden $S_{n_i}(x)$ samen, dan is

$$|f(x) - S_{n_i}(x)| = 0 < \varepsilon.$$

Valt $f(x)$ met geen van die waarden samen, dan is

$$S_{n_i}(x) = y_{P_{n_i}} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots k.$$

Daar $0 \leq f(x) \leq 1$, voldoet één van die k indices aan

$$|f(x) - S_{n_i}(x)| < \varepsilon.$$

Hiermede is de quasi-uniformiteit der convergentie voor het interval $0 < x \leq 1$ aangetoond. $f(x)$ neemt echter geen grenswaarde in 0 aan: zij schommelt daar tusschen nul en 1.

HOOFDSTUK III.

7. Laten $f_1(x), f(x), \ldots$ continue functies zijn in het interval $a \leq x \leq b$ en laat de reeks

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$$

quasi-uniform convergent zijn in het interval $a < x \leq b$.

$f(x)$ is dan continu in dit open interval. Laten M en m voor-

stellen het maximum en het minimum van $f(x)$ in a, en laat μ een willekeurig getal van het interval $m \leq \mu \leq M$ zijn. Er is een puntverzameling $x_1, x_2, \ldots x_\nu, \ldots$ te construeeren met $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu = a$ en $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu) = \mu$. Uit een beperkt aantal indices kan men voor ieder punt van deze verzameling er een kiezen zoodat $|S_{n_\nu}(x_\nu) - f(x_\nu)| < \varepsilon_1$ is, waarin ε_1 een willekeurig positief getal is. Er zijn derhalve oneindig veel punten x_ν, waar men één en denzelfden index gebruiken kan, dezen noemen we n_1. Nadert x_ν tot a, dan nadert $S_{n_1}(x_\nu)$ tot $S_{n_1}(a)$ en $f(x_\nu)$ tot μ, dus $|S_{n_1}(a) - \mu| \leq \varepsilon_1$. Zij $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ een afnemende rij van positieve getallen met nul tot limiet. Boven n_1 kan men weer uit een beperkt aantal indices voor iedere x_ν een keuze n_ν doen waarbij $|S_{n_\nu}(x_\nu) - f(x_\nu)| < \varepsilon_2$, dus er is een index $n_2 > n_1$, zoodat $|S_{n_2}(a) - \mu| \leq \varepsilon_2$.

Zoo voortgaande zien we dat er een partieele functierij $S_{n_1}(x)$, $S_{n_2}(x), \ldots$ bestaat, die in a convergeert tot de waarde μ. Voor $a < x \leq b$ convergeert ze tot $f(x)$. Hieruit volgt:

Bestaat de reeks $f_1(x) + f_2(x) + \ldots$ uit termen die in $a \leq x \leq b$ continu zijn, terwijl ze in $a < x \leq b$ quasi-uniform convergeert tot $f(x)$ en is μ een willekeurige waarde gelegen tusschen het maximum en het minimum van $f(x)$ in a, dan kan men de reeks, door groepen van termen tot één nieuwe term samen te vatten, transformeeren in een reeks die in $a \leq x \leq b$ convergeert, in a tot μ, in de andere punten tot $f(x)$.

Bij het voorbeeld van § 5 heeft men $M = m = 0$. De reeks $(x - x) + (x^2 - x^2) + \ldots$ is hier een getransformeerde reeks, die overal tot nul convergeert.

Bij het voorbeeld van § 6 is $M = 1$, $m = 0$. Kies een verzameling $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots$ met μ tot limiet. De partieele rij $S_{n_1}(x)$, $S_{n_2}(x), \ldots$ convergeert voor $0 < x \leq 1$ tot $f(x)$, in 0 tot μ.

Dat de quasi-uniformiteit der convergentie in het open interval geen overbodige eisch is, zien we aan de reeks $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$, die voor $0 \leq x < 1$ voorstelt $\frac{1}{1+x}$, zoodat men voor $x = 1$ heeft $M = m = \frac{1}{2}$. Geen enkele groepeering der termen van de reeks $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ doet deze echter in een reeks overgaan, die tot $\frac{1}{2}$ zou convergeeren.

8. De stelling van de vorige § laat zich als volgt omkeeren:

Gegeven een functierij $S_1(x), S_2(x), \ldots$, alle zijn continu in $a \leq x \leq b$. De rij moge convergeeren in $a < x \leq b$ tot een functie $f(x)$,

die daar continu is. Zij M het maximum van $f(x)$ in a, m het minimum. Kan men nu aan ieder tusschen m en M gelegen getal k een deelrij van de gegeven rij toevoegen, die in a tot k convergeert, dan is de convergentie der gegeven rij quasi-uniform in $a < x \leq b$.

Om dat te bewijzen, geven we ε, N. We kiezen op de lijn $x = a$ de punten $P_0, P_1, \ldots, P_\nu$ zoodanig, dat

$$P_0 < m < P_1 < P_2 \ldots < P_{\nu-1} < M < P_\nu$$

en tevens

$$P_i P_{i+1} < \varepsilon \quad , \quad i = 0, 1, \ldots \nu - 1.$$

Uit de onderstelling volgt, dat er een index $n_i > N$ bestaat waarvoor $S_{n_i}(a)$ tusschen P_i en P_{i+1} ligt. Zoo vinden we ν indices. Daar de functies $S_{n_0}(x), S_{n_1}(x) \ldots S_{n_{\nu-1}}(x)$ continu zijn in a, kan men een getal δ_1 vinden zoodanig dat voor $x - a < \delta_1$, $S_{n_i}(x)$ tusschen P_i en P_{i+1} ligt, $i = 0, 1, \ldots \nu - 1$. Ook kan men een getal δ_2 vinden zoodat voor $x - a < \delta_2, f(x)$ tusschen P_0 en P_ν ligt, want M en m zijn het maximum en het minimum van $f(x)$ in a. Zij $\delta \leq \delta_1$ en $\delta \leq \delta_2$. Voor $x - a < \delta$ behoort $f(x)$ tot een der intervallen $P_i P_{i+1}$ (of ligt op den rand daarvan). Dus voor iedere x van 't interval $a < x < a + \delta$ kan men uit de ν gevonden indices een keuze n_x doen, om te zorgen dat $|f(x) - S_{n_x}(x)| < \varepsilon$. Evenzoo kan men uit een eindig aantal boven N gelegen indices voor $a + \delta \leq x \leq b$ een dergelijke keuze doen, daar de gegeven rij in dat interval quasi-uniform convergeert wegens de continuiteit van $f(x)$. Hiermede is de stelling bewezen.

Het is duidelijk, dat men in deze stelling de woorden „*aan ieder tusschen m en M gelegen getal k*" mag vervangen door „*aan ieder getal k van een verzameling, die in het interval m, M overal dicht is.*"

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt eene mededeeling aan van de Heeren F. E. C. SCHEFFER en G. MEYER: „*Over een indirecte analyse van gashydraten langs thermodynamischen weg en de toepassing daarvan op het hydraat van zwavelwaterstof*". I.

(Mede aangeboden door den heer JAEGER).

1. In een tweetal verhandelingen heeft één van ons de heterogene evenwichten, welke het systeem zwavelwaterstof-water vertoont, uitvoerig beschreven[1]). Bij dit onderzoek is gebleken, dat in dit systeem door het optreden van een verbinding en door ontmenging in den vloeibaren toestand een vierphasenevenwicht zwavelwaterstofhydraat – twee vloeistoflagen – gas optreedt; de driephasenlijnen, welke elkaar in dit quadrupelpunt snijden, werden bepaald en tevens werd een aantal analyses verricht om de samenstelling van het hydraat te weten te komen. Deze analyses leverden echter uiteenloopende resultaten; het aantal moleculen water, dat met één molecuul zwavelwaterstof gebonden is, schommelt volgens deze bepalingen tusschen 5,1 en 5,5. Dit resultaat voerde tot de conclusie, dat de formule van het hydraat $H_2S . 5H_2O$ zou zijn, omdat bij deze stof, en bij de gashydraten in het algemeen, een verschijnsel optreedt, dat veroorzaakt, dat de waterhoeveelheid bij analyse te hoog gevonden wordt. Bedenkt men, dat de twee vloeistoflagen bijna uit zuivere zwavelwaterstof, resp. zuiver water bestaan en dat het hydraat zich dus door een samenwerking van beide vloeistoflagen moet vormen, dan is het duidelijk, dat deze hydraatvorming op de grens der vloeistoffen tot een scheiding van de lagen aanleiding geeft. Bij de analyses werd steeds gewerkt met overmaat zwavelwaterstof, die na inwerking der vloeistoflagen op elkaar werd weggepompt. Het is duidelijk, dat na verwijderen van deze overmaat zwavelwaterstof in de vaste stof nog water kan achterblijven, daar dit bij lage temperatuur als ijs zoo goed als geen spanning bezit; dit is dan ook de reden, dat voor het watergehalte vroeger steeds lagere waarden werden gevonden, naarmate aan de inwerking der lagen meer zorg werd besteed. De analyses leverden chronologisch gerangschikt watergehalten van 15[2]), 12[3]) en 7[4]) moleculen water per molecuul zwavel-

[1]) Deze Verslagen. **19**. 1057. (1911) en **20**. 104. (1911).

[2]) DE FORCRAND. C.r. **94**. 967. (1882).

[3]) DE FORCRAND. Ann. chim. phys. (5). **28**. 5. (1883).

[4]) DE FORCRAND en VILLARD. C.r. **106**. 1402. (1888).

waterstof. Bij de bovengenoemde bepalingen was dit gehalte tot 5,1—5,5 gedaald en de conclusie lag dus voor de hand, dat het juiste watergehalte lager zou zijn; $H_2S . 5H_2O$ was dus op grond van deze proeven de meest waarschijnlijke formule.

2. Daar directe analyse hier dubieuze resultaten leverde en men door de waargenomen storing de formule $H_2S . 5H_2O$ slechts waarschijnlijk kan achten — voor een tweede storing in tegengestelden zin bestonden geen aanwijzingen — hebben wij getracht een analysemethode te vinden, die meer zekere resultaten levert.

Aanwijzingen voor een bepaalde formule, welke niet op directe analyse berusten, zijn de volgende:

a. VILLARD acht de formule $H_2S . 6H_2O$ waarschijnlijk wegens de analogie met andere gashydraten, waarvoor hij een formule $M . 6H_2O$ heeft vastgesteld [1]). Deze analogie zal toch zeker door nader bewijs gesteund moeten worden, vóór ze ons van de juistheid van de genoemde samenstelling overtuigt.

b. VILLARD kon de beide vloeistoffen bij temperaturen, waarbij zich het hydraat kan vormen, enten met het hydraat van N_2O en dit voert hem tot de conclusie, dat het hydraat van zwavelwaterstof hetzelfde watergehalte bezitten zal [1]). Ook deze reden doet hem de formule $H_2S . 6H_2O$ waarschijnlijk achten.

c. DE FORCRAND maakt gebruik van een regel, geldende voor driephasenlijnen, welke analoog is aan die van TROUTON voor vloeistofgasevenwichten [2]). Deze regel kan als volgt worden weergegeven: Als de driephasenlijn van een dissocieerende verbinding, die zich in vast + gas splitst, een dampspanning van één atmosfeer bereikt, heeft het quotiënt van de transformatiewarmte en de absolute temperatuur de waarde 30. Hij geeft voor dezen regel eenige voorbeelden en past ze dan toe om de hoeveelheid water in gashydraten te bepalen. Dat deze regel echter gevaarlijk is, blijkt wel al voldoende uit het feit, dat bij toepassing op het hydraat van zwaveldioxyd de samenstelling $SO_2 . 8H_2O$ gevonden werd, terwijl men blijkens de analyses van BAKHUIS ROOZEBOOM en VILLARD met groote waarschijnlijkheid kan concludeeren, dat dit watergehalte te hoog is [3]). Zijn regel voert eveneens tot $H_2S . 6H_2O$.

Daar dus naar onze meening ook de indirecte methoden nog geen zekere resultaten betreffende de samenstelling van het hydraat hebben

---

[1]) VILLARD. Ann. chim. phys. (7). 11. 289. (1897).

[2]) DE FORCRAND. C.r. 135. 959. (1902).

[3]) BAKHUIS ROOZEBOOM. Rec. 3. 29. (1884); VILLARD. Ann. chim. phys. (7). 11. 289. (1897).

opgeleverd, zochten wij langen tijd naar een andere. Wij meenen een methode gevonden te hebben, die ons met meer zekerheid de samenstelling der gashydraten doet kennen; de beschrijving volgt hieronder.

3. Om het principe, waarop deze analyse berust, zoo duidelijk mogelijk te maken, willen wij ons een binair stelsel denken, waarvan de eerste component (A) in een bepaald temperatuurtraject gasvormig, de tweede (B) onder dezelfde omstandigheden in de buurt van haar smeltpunt verkeert en niet merkbaar vluchtig is. Uit de gasvormige eerste en de vaste tweede component kan zich bij drukverhooging een vaste verbinding vormen. In de gesmolten tweede component is het gas noch als zoodanig, noch als verbinding oplosbaar. De P–T projectie van de ruimtefiguur wordt dan aangegeven door figuur 1. De eerste component A treedt bij deze evenwichten dus in vrijen toestand op als gas (G) en gebonden in de verbinding (S). De tweede component B komt vrij voor als vast (S_B) en vloeistof (L), gebonden aan de eerste component in de verbinding (S).

De driephasenlijnen S_BLG en SS_BL vallen samen met de smeltlijn van B. De transformatie op beide driephasenlijnen wordt immers aangegeven door $S_B \rightleftarrows L$ en is dezelfde als op de smeltlijn van zuiver B. Het tripelpunt van B (punt B in fig. 1) ligt dicht bij de T-as; de

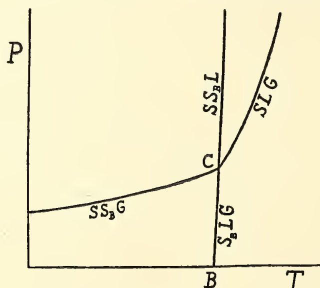
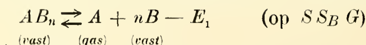


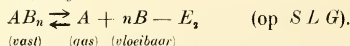
Fig. 1.

sublimatie – en de kooklijn van B vallen practisch met de T-as samen.

Duidt men de verbinding aan door AB_n, dan worden de transformaties op de beide andere driephasenlijnen aangegeven door:



$$\underset{(vast)}{AB_n} \rightleftarrows \underset{(gas)}{A} + \underset{(vast)}{nB} - E_1 \qquad \text{(op } S\,S_B\,G)$$



$$\underset{(vast)}{AB_n} \rightleftarrows \underset{(gas)}{A} + \underset{(vloeibaar)}{nB} - E_2 \qquad \text{(op } S\,L\,G).$$

Het verschil tusschen de beide transformatie-energieën E_1 en E_2

bedraagt derhalve de smeltenergie of smeltwarmte van n molen B. Duidt men de smeltwarmte van één mol B aan door Q, dan is dus:

$$E_2 - E_1 = nQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Past men op beide driephasenevenwichten de vergelijking van Clapeyron toe, waarbij de indices 1 resp. 2 weder op de evenwichten SS_BG resp. SLG betrekking hebben, dan volgt:

$$T\frac{dP_1}{dT} = \frac{Q_1}{\Delta V_1} \quad \text{en} \quad T\frac{dP_2}{dT} = \frac{Q_2}{\Delta V_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin Q_1 en Q_2 de transformatiewarmten voorstellen.

Verwaarloost men V_S en V_L t. o. v. V_G, wat geoorloofd is, wanneer de dichtheid van de gasphase klein is t. o. v. die der andere phasen (druk van het quadrupelpunt C kleiner dan of in de buurt van één atmosfeer) en past men op de gasphase de wet van Boyle toe, dan is:

$$T\frac{dP_1}{dT} = \frac{Q_1}{RT}P_1 \quad \text{en} \quad T\frac{dP_2}{dT} = \frac{Q_2}{RT}P_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hieruit volgt bij integratie onder de aanname, dat Q_1 en Q_2 geen temperatuurfuncties zijn[1]):

[1]) Deze aanname duidt aan, dat de algebraïsche som van de soortelijke warmten (die van het gas bij *constanten druk*) van de aan de transformatie deelnemende stoffen nul is. Men kan dit voor het evenwicht vloeistof-gas gemakkelijk als volgt inzien. Uit de vergelijking van Clausius $\frac{dQ}{dT} = h - H + \frac{Q}{T}$, waarin h en H de soortelijke warmten van gas en vloeistof langs de grenslijn voorstellen (van der Waals—Kohnstamm. Thermodynamik. I. S 67) en uit de betrekking $h = c_v + T\left(\frac{dP}{dT}\right)_v\left(\frac{dv}{dT}\right)_{gr}$ (Ibid. I. S. 34, Gl. IIa; de index gr duidt aan, dat $\frac{dv}{dT}$ langs de grenslijn gemeten wordt) volgt $\frac{dQ}{dT} = c_v - H + T\left(\frac{dP}{dT}\right)_v\left(\frac{dv}{dT}\right)_{gr} + \frac{Q}{T}$. Indien voor de gasphase de wet van Boyle doorgaat, kunnen de beide laatste termen van het tweede lid van deze vergelijking door R vervangen worden en krijgt men $\frac{dQ}{dT} = c_p - H$. Op analoge wijze leidt men af, dat ook voor de in den tekst beschreven driephasenevenwichten een dergelijke formule geldt.

Indien de algebraïsche som van de soortelijke warmten van nul verschilt, mag de geintegreerde vergelijking 4 slechts voor een klein temperatuurtraject gebruikt worden; uit de gevonden waarde van Q moet dan de transformatiewarmte bij het quadrupelpunt berekend worden. Een dergelijke berekening volgt bij de bespreking der quantitatieve gegevens. Ten slotte zij opgemerkt, dat als Q geen temperatuurfunctie is, de transformatieenergie, die RT kleiner is, wel van de temperatuur afhangt. De variatie in E, door deze correctie teweeggebracht, is gewoonlijk klein t. o. v. de waarden van Q en E. (Zie de tabellen met de quantitatieve gegevens in de volgende verhandeling).

$$ln\, P_1 = -\frac{Q_1}{RT} + C_1 \qquad \text{en} \qquad ln\, P_2 = -\frac{Q_2}{RT} + C_2 \quad . \quad . \quad (4)$$

Uit een graphische voorstelling $ln\, P_1 = f_1(T^{-1})$ en $ln\, P_2 = f_2(T^{-1})$ kunnen dan de hellingen van beide rechten worden bepaald. De tangens van den hellingshoek bedraagt dan $-\frac{Q_1}{R}$ resp. $-\frac{Q_2}{R}$. Het verschil, vermenigvuldigd met R, levert dan de smeltwarmte $Q_2 - Q_1$, die hier gelijk is aan de smeltenergie $E_2 - E_1$ [1]) en met behulp van verg. (1) volgt hieruit de waarde van n en daarmede de samenstelling van het hydraat.

Voor de toepassing van deze analysemethode moeten dus de driephasenlijnen SS_BG en SLG experimenteel bepaald worden.

4. Het systeem zwavelwaterstof-water vertoont groote overeenstemming met het ideale stelsel van § 3. Zooals in de bovengenoemde verhandelingen van één van ons werd aangetoond, treedt in dit systeem een quadrupelpunt SL_1L_2G op, in fig. 2 met D aangeduid.

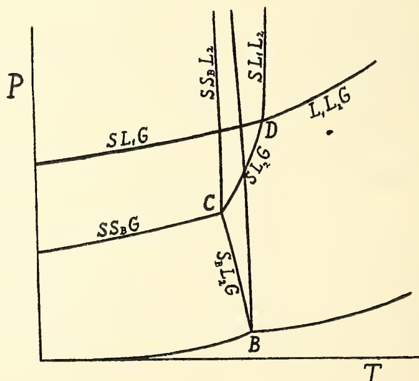


Fig. 2.

Het stabiele deel van de driephasenlijn SL_2G, waarvan een aantal punten reeds vroeger werd bepaald [2]), eindigt in het quadrupelpunt

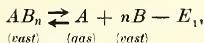
[1]) Uit de in § 3 aangegeven transformaties blijkt, dat $Q_1 = E_1 + RT$ en $Q_2 = E_2 + RT$, daar bij beide omzettingen één grammol gas ontstaat Hieruit volgt, dat $Q_2 - Q_1 = E_2 - E_1$. De volumina van vast en vloeistof worden t. o. v. die van gas verwaarloosd en de uitzetting bij smelten veroorzaakt geen merkbaar verschil tusschen smeltenergie en warmte.

[2]) Deze Verslagen. 19. 1057. (1911).

SS_BL_2G, in fig. 2 door C aangegeven. Door dit quadrupelpunt gaat tevens de driephasenlijn SS_BG en wij zullen nu aantoonen, dat de bepaling van de genoemde driephasenlijnen SS_BG en SL_2G weder voldoende is voor de berekening van de samenstelling van het hydraat; het eenige verschil met het geval van § 3 bestaat hierin, dat nog enkele correcties moeten worden aangebracht, die echter voor het systeem zwavelwaterstof-water met voldoende nauwkeurigheid uit de gegevens van de literatuur te berekenen zijn. De noodige correcties zullen bij elk der beide driephasenlijnen afzonderlijk worden vermeld.

5. *De driephasenlijn* SS_BG.

De transformatie op deze driephasenlijn wordt nu niet als in § 3 aangegeven door



$$\underset{(vast)}{AB_n} \rightleftarrows \underset{(gas)}{A} + \underset{(vast)}{nB} - E_1,$$

daar het gas nu niet uit de zuivere eerste component ($A = H_2S$) bestaat, maar ijs (vast B) altijd iets, hoewel weinig, dampspanning heeft. Alleen in de gasphase treedt dus een wijziging op. Trekken wij nu van de waargenomen drukkingen P de spanning van ijs van dezelfde temperatuur af, dan vinden we de waarden $P(corr)$, die dus de partiaaldrukkingen van de zwavelwaterstof in de gasphase aangeven [1]). Maken wij nu $log\, P(corr)$ en de bijbehoorende T^{-1}-waarden op, dan levert de grafische voorstelling een kromme, welke slechts weinig van een rechte lijn afwijkt. Voor deze kromme geldt nu de vergelijking

$$T\,\frac{dP(corr)}{dT} = \frac{Q_1}{RT}\,P(corr)$$

of geintegreerd over een klein temperatuurtraject, waar Q_1 als constant mag worden beschouwd,

$$ln\, P(corr) = -\frac{Q_1}{RT} + C_1.$$

Is de kromme niet merkbaar van een rechte lijn verschillend, dan kan men deze uitdrukking direct op de geheele lijn toepassen en uit de helling Q_1 berekenen.

Heeft de kromme een merkbare kromming, dan kan men telkens uit twee waarnemingen bij weinig verschillende temperaturen (indices a en b) met behulp van

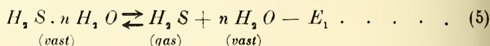
[1]) Wij nemen hierbij dus aan, dat de verbinding niet in gastoestand bestaat. Zoo ze in gastoestand voor een klein bedrag voorkomt, zal haar invloed stellig binnen de waarnemingsfouten blijven, daar de waterdampspanning zelf reeds klein is.

$$\ln P_a(corr) - \ln P_b(corr) = -\frac{Q_1}{R}(T_a^{-1} - T_b^{-1})$$

de waarde Q_1 voor het bedoelde kleine temperatuurtraject berekenen.

Deze waarde Q_1 is dus de warmte, welke voor transformatie noodig zou zijn, als ijs geen dampspanning had en stemt dus in beteekenis met de gelijknamige warmte van § 3 overeen. Het is de warmte, welke we voor de berekening noodig hebben; ze is een functie van de temperatuur, maar slechts een zwakke; de verandering van de transformatiewarmte met de temperatuur wordt immers aangegeven door de algebraïsche som van de soortelijke warmten van hydraat, n molen ijs en één mol zwavelwaterstof bij constanten druk. (Zie § 3). Deze soortelijke warmtesom zal, als de wet van Kopp doorgaat, aangegeven worden door het verschil tusschen die van één mol vast H_2S en één mol gasvormig H_2S (bij constanten druk). Daar nu de soortelijke warmte van vast H_2S ongeveer 10 bedraagt [1]), die van gasvormig H_2S ongeveer 8.5, het verschil dus 1.5 is, is het duidelijk, dat deze correctie voor ongeveer 20° temperatuurtraject op een warmteeffect van ca. 5000 caloriën (zie later) een correctie van ten naastenbij 6°/₀₀ uitmaakt, wat voor ons doel verwaarloosbaar is.

Bovenstaande berekening leert ons dus de warmte kennen van de transformatie:

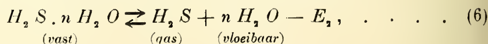


$$\underset{(vast)}{H_2S \,.\, n\, H_2O} \rightleftarrows \underset{(gas)}{H_2S} + \underset{(vast)}{n\, H_2O} - E_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De energieverandering E_1 is uit Q_1 te vinden door aftrekken van den uitwendigen arbeid RT. (Bij de transformatie verdampt één mol gas.) [2])

6. *De driephasenlijn* SL_2G.

Bij de transformatie $S \rightleftarrows L_2 + G - E_{SL_2G}$ treedt een merkbare afwijking van het overeenkomstige geval van § 3 op. Zwavelwaterstof lost immers niet alleen in de waterige vloeistof op, maar water heeft tevens een bepaalde, niet te verwaarloozen dampspanning. De transformatie bij dit evenwicht kan worden gesplitst in

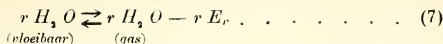


$$\underset{(vast)}{H_2S \,.\, n\, H_2O} \rightleftarrows \underset{(gas)}{H_2S} + \underset{(vloeibaar)}{n\, H_2O} - E_2\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

---

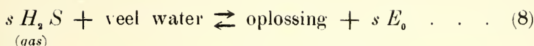
[1]) Zie Nernst. Theor. Chem. Gesetz von Dulong und Petit.

[2]) De waarde van E_1 is ook te berekenen, op dezelfde wijze als dit voor de lijn hydraat-vloeistof-gas is geschied (zie later), uit $T\frac{dP}{dT} = \frac{Q}{V}$, waarin V het volume gas voorstelt, dat door ontleding van één grammolecuul hydraat wordt gevormd (zwavelwaterstof + waterdamp); de warmte Q moet dan gecorrigeerd worden voor de sublimatiewarmte van een geringe hoeveelheid ijs om Q_1 en daarmede E_1 te vinden.



$$\underset{(vloeibaar)}{r\,H_2O} \rightleftarrows \underset{(gas)}{r\,H_2O} - r\,E_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

en



$$\underset{(gas)}{s\,H_2S} + \text{veel water} \rightleftarrows \text{oplossing} + s\,E_0 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

De totale energieverandering bij de transformatie wordt dan:

$$E_{SL_2G} = E_2 + r\,E_v - s\,E_0.$$

Voert men in plaats van de energieveranderingen de warmtehoeveelheden in, dan wordt

$$E_{SL_2G} + (1 + r - s)\,RT = E_2 + RT + rE_v + rRT - sE_0 - s\,RT$$

of

$$Q_{SL_2G} = Q_2 + r\,Q_v - s\,Q_0,$$

waarin Q_2 de warmte voorstelt, die voor de berekening noodig is en een beteekenis heeft, analoog aan die van de gelijknamige warmte in § 3, Q_v de verdampingswarmte van één mol water, Q_0 de oploswarmte van één mol H_2S aanduidt. ($Q_v = 10780 - 11.3\,t$ [1]), $Q_0 = 4560$ [2]).

Duidt men nu het aantal molen H_2S, dat in één mol H_2O onder driephasendruk oplost door q aan, de partiaaldrukkingen van water en zwavelwaterstof door P_{H_2O} en P_{H_2S}, dan is

$$\frac{s}{n-r} = q \qquad \text{en} \qquad \frac{r}{1-s} = \frac{P_{H_2O}}{P_{H_2S}} \quad . \quad . \qquad (9a \text{ en } b)$$

Deze vergelijkingen laten zich transformeeren in

$$s = q\,\frac{n - \dfrac{P_{H_2O}}{P_{H_2S}}}{1 - q\,\dfrac{P_{H_2O}}{P_{H_2S}}} \qquad \text{en} \qquad r = \frac{1 - n\,q}{1 - q\,\dfrac{P_{H_2O}}{P_{H_2S}}}\,\frac{P_{H_2O}}{P_{H_2S}}.$$

of bij benadering in:

$$s = n\,q \qquad \text{en} \qquad r = (1 - n\,q)\,\frac{P_{H_2O}}{P_{H_2S}} \quad . \quad . \qquad (10a \text{ en } b)$$

Dat deze benadering toelaatbaar is, zal uit de gegevens blijken. (Zie de tabellen in de volgende verhandeling).

Uit $10a$ en b volgt nu:

$$1 + r - s = (1 - n\,q)\left(1 + \frac{P_{H_2O}}{P_{H_2S}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (11)$$

Past men de vergelijking van Clapeyron op het bedoelde driephasenevenwicht toe, dan vindt men:

$$T\left(\frac{dP}{dT}\right)_{SL_2G} = \frac{Q_{SL_2G}}{\Delta V_{SL_2G}} = \frac{Q_2 + r\,Q_v - sQ_0}{(1 + r - s)\,RT}\,P_{SL_2G}\,, \quad . \qquad (12)$$

[1]) Landolt-Börnstein-Roth. Tabellen.

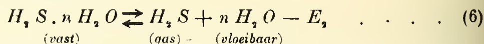
[2]) Thomsen. Thermochem. Unters.

waarbij weder de volumina van vast en vloeistof ten opzichte van gas verwaarloosd zijn en de wet van BOYLE op de gasphase is toegepast.

Transformatie van (12) levert ten slotte de gezochte warmte Q_2 $\left(\frac{d\,ln\,P}{dT} = -\frac{1}{T^2}\frac{d\,ln\,P}{d\,T^{-1}}\right)$:

$$Q_2 = -r\,Q_v + s\,Q_0 - (1 + r - s)\,R\left(\frac{d\,ln\,P}{d\,T^{-1}}\right)_{SL_2G} \quad . \; . \quad (13)$$

Daar nu Q_v (verdampingswarmte van één mol water) en Q_0 (oploswarmte van één mol H_2S) bekend zijn, r en s uit $10a$ en b (zie ook (11)) te berekenen zijn, indien men voor n een willekeurig gekozen waarde substitueert, zoo kan, indien de temperaturen dicht bij elkaar gekozen worden, zoodat het differentiaalquotient in (13) door het differentiequotient vervangen kan worden, Q_2 berekend worden[1]). Zóó vindt men telkens uit twee waarnemingen bij weinig verschillende temperaturen een waarde van Q_2 voor dat kleine temperatuurtraject. Deze waarde Q_2 stelt dus de transformatiewarmte op de driephasenlijn SL_2G voor, gecorrigeerd voor het oplossings- en verdampingsverschijnsel bij de omzetting. Ze is de warmte, behoorende bij de omzetting



$$\underset{(vast)}{H_2S\,.\,n\,H_2O} \rightleftarrows \underset{(gas)}{H_2S} + \underset{(vloeibaar)}{n\,H_2O} - E_2 \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

De warmte Q_2 (en de energieverandering E_2) zullen weder temperatuurfuncties zijn. De algebraïsche som der soortelijke warmten is hier grooter dan op de driephasenlijn SS_BG (§ 5); ze mag niet verwaarloosd worden. De warmte bij transformatie op SL_2G in de onmiddellijke nabijheid van het quadrupelpunt moet dus door extrapolatie worden gevonden. De daarvoor noodige correctie is echter klein genoeg om lineaire extrapolatie toe te laten, m. a. w. de soortelijke warmten als onafhankelijk van de temperatuur te beschouwen.

De waarde van n volgt nu eenvoudig uit de vergelijkingen (5) en (6) op een wijze analoog aan die in § 3.

(Wordt vervolgd).

---

[1]) Daar r en s zelf correcties voorstellen, geeft een verandering van n een wijziging in de toch reeds kleine correctie Of men voor n 5 of 6 kiest, geeft in het resultaat van de berekeningen slechts geringe variatie. Wij komen hierop later terug.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt eene mededeeling aan van den Heer H. P. BARENDRECHT: „*Urease en de stralingstheorie van enzym-werking.*"

(Mede aangeboden door den Heer JAEGER).

1. Sints de ontdekking door TAKEUCHI van urease in de Sojaboon is een bij uitstek gunstig materiaal van de studie van enzymwerking tot onze beschikking geweest. Het enzym zoo wel als het zuivere substraat, ureum, zijn in dit geval gemakkelijk verkrijgbaar in onbeperkte hoeveelheid. De bepaling van de reactie-producten kan zonder moeite en nauwkeurig uitgevoerd worden, een belangrijke voorwaarde voor succes in pionierswerk, waarbij tallooze analyses onvermijdelijk zijn.

Deze kans om het groote raadsel van enzym-werking althans tot zekere hoogte op te lossen heeft dan ook de laatste jaren vele onderzoekers aangetrokken.

MARSHALL (J. Biol. Chem. XVII, p. 351, 1914) vond, dat ook in dit geval de werking evenredig is met de concentratie van het enzym.

De ARMSTRONG'S, HORTON en BENJAMIN (Proc. Roy. Soc. 1912 en 1913) maakten uitvoerige empirische studies, waaruit zij het besluit trokken, dat ammonia de werking vertraagt, maar koolzuur haar versnelt, een verwonderlijk resultaat, dat ook anderen vaststellen gevonden te hebben. Zooals echter hier verder zal blijken, leidt enkel chemische empirie in deze tot verkeerde gevolgtrekkingen.

Een eerste poging tot theoretische zoowel als tot experimenteele studie van de werking van urease werd gedaan door DONALD VAN SLIJKE en zijn medewerkers (J. Biol. Chem. XIX, p. 141, 1914).

Dit werk kan niet voorbijgegaan worden zonder ernstige kritiek.

De theorie van deze schrijvers en al hun verdere werk zijn voornamelijk gegrond op drie experimenten. In experiment 1 en 2 werden „the effect of concentration of urea, enzyme concentration being constant" en „the effect of decreasing urea concentration on reaction, as latter approaches completion" onderzocht. Daar in deze experimenten de aanvankelijke veranderingen in de concentratie der waterstofionen buiten beschouwing gelaten was, niettegenstaande de schrijvers verderop zelf zijn gewaar geworden, dat de activiteit van urease

in hooge mate van de waterstofionen-concentratie afhangt, is het niet te verwonderen, dat zij de „formulation of the nature and course of the reaction" trachtten te grondvesten speciaal op experiment 3, waarin phosphaten als buffer werkten tegen groote veranderingen van de ware reactie. Daar de cijfers, als door hen gepubliceerd op p. 146 onvereenigbaar waren met de experimenten, die verderop in deze studie zullen worden meegedeeld, heeft schrijver dezes de resultaten van VAN SLIJKE op nieuw berekend volgens VAN SLIJKE's eigen theorie.

De merkwaardige uitkomst hiervan is, dat VAN SLIJKE's eigen fundamenteel experiment in 't geheel niet overeenkomt met zijn eigen theorie. Zooals men hieronder ziet, is de c verre van konstant.

TABEL III van VAN SLIJKE.
$E = 0{,}1 \quad t = 60.$

Concentration urea.	a. 0,01 N NH_3 calc. for complete decomp. of urea.	x. 0,01 N NH_3 formed.	$0{,}4343\ c = \frac{d}{dEt-x} \log \frac{a}{a-x}$ volgens v. SLIJKE.	$0.4343\ c$ $\frac{d}{dEt-x} \log \frac{a}{a-x}$ op nieuw berekend
per cent	c.c.			
0.0375	12.5	5.8	0.055	0.056
0.075	25.—	10.4	0.058	0.059
0.15	50.—	15.5	0.053	0.054
0.3	100.—	21.2	0.052	0.054
0.6	200.—	24.8	0.051	0.048
1 2	400.—	27.—	0.052	0.039
2.4	800.—	28.5	0.052	0.032

2. *De algemeene vergelijking van urease-werking.*

De onderzoekingen, hier gepubliceerd, waren weder gegrond op schrijver's hypothese, dat een enzym werkt door straling en dat een enzymdeeltje hetzelfde molekuul of dezelfde atoomgroep in een actieven toestand bevat, dat door dit enzym wordt in vrijheid gesteld of in 't algemeen beinvloed wordt. In zijn eerste verhandelingen over enzymwerking (Proc. K. Akad. Wetensch. Amsterdam 1904 en Zeitschr. physikal. Chem. XL p. 456, 1904) heeft de schrijver reeds het vermoeden geopperd, dat de straling, waardoor enzymen hun werking uitoefenen, te danken is aan de electronen, die deel uitmaken van de atomen. De huidige ontwikkeling van de electronen-

theorie van materie heeft geopenbaard, dat, daar elk atoom een complex is van positieve en negatieve electrische eenheden, elke chemische werking inderdaad een electrisch verschijnsel is.

In 't algemeen kan geconstateerd worden, dat de electronen in een atoom, die zich om de positieve kern bewegen, eenig effect b.v. van electromagnetische inductie zullen hebben op andere atomen in hun nabijheid.

Indien al de atomen, die een molekuul samenstellen, dit uitgestraalde effect van een gelijk molekuul terzelfder tijd in de vereischte phase ontvangen, kan het reactievermogen van het molekuul als geheel verwacht worden veranderd te zijn. Een kleine toename van de trilling van het molekuul zal zijn vermogen om in verbindingen te treden kunnen doen toenemen (dit punt zal hier later behandeld worden), een groote vermeerdering zal het uit een verbinding met andere molekulen losrukken.

De schrijver wil hier echter niet te veel nadruk leggen op de bizonderheden der hypothese. De talrijke experimenteele feiten, voor een groot deel pas met behulp van deze leidende hypothese gevonden en alle onder één gezichtspunt gebracht door er de noodzakelijke gevolgtrekkingen uit te maken, zullen haar nuttigheid bewijzen.

De straling dus, door middel van welke urease inwerkt op ureum, gaat uit van het enzym-molekuul en kan zijn hydrolyseerend effect uitoefenen tot een zekeren afstand, waarschijnlijk microscopisch klein.

Wanneer deze urease-straling een ureum-molekuul treft, wordt zij geabsorbeerd, juist zooals b.v. de specifieke straling van een Na-atoom speciaal door een Na-atoom geabsorbeerd wordt.

De hoeveelheid ureum, door een enzym-molekuul in een tijdseenheid gehydrolyseerd zou dus onafhankelijk zijn van de ureumconcentratie, indien de andere bestanddeelen van de oplossing praktisch geen absorptie-vermogen voor die straling hadden. Alleen bij een zeer geringe concentratie van ureum, zou de straling verwacht mogen worden, althans gedeeltelijk, zoo verzwakt te zijn door verspreiding vóór het bereiken van een ureum-molekuul, dat zij het vermogen te hydrolyseeren verloren had. In zeer verdunde ureum-oplossingen zou dus constantheid der werking van een gegeven hoeveelheid urease niet verwacht moeten worden; in deze omstandigheden zou het effect kleiner kunnen zijn.

Tot zoover is de theorie dezelfde als vroeger voor de suikerenzymen ontworpen.

Een nieuw punt van overheerschend belang, ten minste in het geval van urease, is dit, dat de waterstofionen behalve ureum het

72

eenige bestanddeel in de oplossing bleken te zijn, dat deze straling absorbeert.

De mathematische formuleering van deze theorie is zeer eenvoudig en geeft onmiddelijk de volgende differentiaalvergelijking voor de reactie-snelheid bij constante temperatuur en constante H-ionen concentratie:

$$-dx = m\frac{x}{x+nc}dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

In deze vergelijking is x de concentratie van de ureum (grammen per 100 cc.), c de concentratie van de H-ionen (ook in grammen per 100 cc.) en n de absorptie-coëfficient van de H-ionen, dat is: één gram H-ionen absorbeert n maal zooveel straling als één gram ureum.

De snelheidsconstante m is voor een gegeven temperatuur en H-ionen concentratie alleen evenredig aan de concentratie van het enzym, mits zoowel temperatuur als H-ionen concentratie werkelijk constant gehouden worden.

Wanneer wij de aanvangsconcentratie van de ureum a noemen, uitgedrukt evenals x en c in grammen per 100 cc. en $\frac{a-x}{a}=y$ stellen, krijgen wij na substitutie in (1)

$$a\,dy = m\frac{a(1-y)}{a(1-y)+nc}dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Na integratie en overgang op decimale logarithmen wordt de algemeene vergelijking voor de reactie-snelheid van urease bij constante temperatuur en constante concentratie van H-ionen:

$$\frac{nc}{0{,}434}\log\frac{1}{1-y}+ay=mt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

3. *Bepaling van de constante n.*

Voor de bepaling der belangrijke constante n was het noodig niet alleen nauwkeurig de H-ionen concentratie c te meten, maar ook te zorgen, dat c en daardoor ook m (zooals verder zal blijken) constant bleven. Nu is de hydrolyse van ureum tot ammoniumcarbonaat in zoovere een moeilijk geval voor enzym-studie, dat hier door de enzymwerking zelf een duidelijk alkalische stof gevormd wordt uit een neutraal substraat. Deze alkalivorming is zoo aanzienlijk, dat zelfs met een buffer van 8°/₀ phosphaat slechts 0,01°/₀, of ten hoogste 0,02°/₀ ureumoplossing gebruikt kan worden, als men iets, wat op constante p_H lijkt, wil bereiken.

Een studie van de urease werking zonder de toevoeging van een

krachtigen buffer voor het constant houden der ware reactie, is kennelijk even nutteloos als experimenteeren zonder thermostaat in een kamer van sterk veranderlijke temperatuur.

Bij het vaststellen van de beste voorwaarden voor de bepaling dezer constante n, leidden twee overwegingen de keus van de p_H van het reguleerende phosphaat-mengsel.

Daar m reeds was gebleken een functie te zijn van p_H met een duidelijk maximum, zou de p_H van dit maximum het voordeel geven, dat hier een geringe verandering van p_H een kleiner verschil in m zou meebrengen dan elders.

Ten tweede moest, om den invloed der onvermijdelijke experimenteele fouten te beperken, de coëfficient $\frac{nc}{0,434}$ niet veel grooter of kleiner zijn dan a. Immers, indien de coëfficient van $log \frac{1}{1-y}$ sterk overweegt, verloopt de reactie praktisch als de gewone logarithmische lijn van de monomoleculaire reacties. Daarentegen zal, als a veel grooter is, een nagenoeg rechte lijn te voorschijn komen.

Daarom werd een mengsel van Na_2HPO_4 2 aq en KH_2PO_4 gebruikt in zulke verhouding, dat de enzymwerking verliep in een 8 % phosphaatoplossing van ongeveer $p_H = 7,5$.

De materialen waren de volgende:

Gewone gele Soja-boonen worden fijngemalen onder vermijding van verwarming door de wrijving; het poeder bewaard in een gesloten stopflesch in het donker.

De KH_2PO_4 en Na_2HPO_4 2 aq waren de zuivere stoffen van Kahlbaum, gemerkt „zu Enzymstudien nach Sörensen". De ureum, van Kahlbaum, werd nog eens omgekristalliseerd uit alcohol.

Alle experimenten van dit onderzoek werden uitgevoerd bij 27° C. Deze temperatuur is juist hoog genoeg om zonder moeite gedurende bijna het geheele jaar met een waterbad te werken en aan de andere zijde laag genoeg om de schadelijke werking van hooge temperatuur op het enzym te voorkomen, althans binnen redelijke grenzen van tijd en ware reactie.

7,28 gr. Na_2HPO_4 2 aq en 2,32 gr. KH_2PO_4 werden opgelost in een maatkolf met stop tot 100 cc.

In deze oplossing werd 0.4 gram Soja-meel gebracht, de flesch doorgeschud en gedurende een uur in het bad van 27° gelaten. Na toevoeging van 0.4 gr. kiezelgur (te voren goed gewasschen en gedroogd) werd het extract snel en volmaakt helder afgefiltreerd door een gewoon vouwfilter. Terzelfder tijd was een oplossing bereid van 14.4 gr. Na_2HPO_4 2 aq. in 150 cc. water. Hieraan werden nu

toegevoegd 75 cc. van het heldere Soja extract, waardoor verkregen werd een verdund, steeds nog volmaakt helder, extract, dat aangeduid zal worden door de letter *E*.

Tien reageerbuizen van Jena-glas, ongeveer 20 cm. lang en 2.3 cm. wijd, waren tevoren in het bad geplaatst. Deze buizen waren (als in VAN SLIJKE's experimenten) gesloten door caoutchouc stoppen met twee doorboringen. Door de eene was een glasbuis gestoken, ongeveer 30 cm. lang en 4 a 5 mm. uitwendige diameter, van onderen eindigende in een geperforeerd bolletje. De tweede doorboring bevatte een pipetvormig buisje, bestemd het overgaan van spatten met den luchtstroom te voorkomen.

Elk van deze reageerbuizen kreeg 10 cc. van het extract *E*. Tegelijk met deze buizen werd een kolf met 0.150 gram ureum, opgelost in 250 cc. water, in het waterbad geplaatst.

Nadat temperatuur-evenwicht bereikt was, werd in elke reageerbuis 2 cc. ureum-oplossing gebracht met een nauwkeurige pipet. Deze pipet was evenals alle andere hier gebruikte gecalibreerd op uitblazen één minuut nadat de vloeistof was uitgeloopen. Zoo wordt de grootste nauwkeurigheid bereikt, mits van te voren gereinigd is met zwavelzuur en bichromaat. Een oogenblik roeren door koolzuurvrije lucht door de lange buis te blazen, verzekert volmaakte menging. Beide buizen werden dan gesloten door caoutchouc slang en klemkranen.

Het oogenblik, dat 2 cc. uit de pipet geloopen waren en de inhoud van de reageerbuis voorloopig gemengd was door schudden, werd als beginpunt der enzymwerking genomen; dat was op enkele secunden na nauwkeurig.

In een houten blok met twee rijen gaten (Fig. I. werd het vereischte aantal dikwandige glasbuizen gereed gezet, elk voorzien van een nauwkeurig afgemeten hoeveelheid van tusschen 5 en 12 cc. zwavelzuur van $^1/_{50}$ N en met water gevuld tot circa 7 cm. hoogte. Deze buizen waren ook gesloten door caoutchouc stoppen, waardoor een lange buis met geperforeerden bol en een kort buisje gestoken waren.

Na afloop van den vastgestelden tijd (juister gezegd $^3/_4$ minuut daarvoor, daar dit de tijd was, noodig voor de volgende bewerkingen totdat de reactie als gestopt beschouwd kon worden) werd de reageerbuis uit de thermostaat genomen en in het houten blok geplaatst. De caoutchoucbuis *B* werd verbonden met de absorptiebuis, de klemkraan losgemaakt, de afsluiting van buis *A* verwijderd en vervangen door een caoutchouc buisje, in het open einde waarvan een druppel octylalcohol werd gebracht om het schuimen tegen te gaan.

Onmiddellijk daarop werd de punt van een pipet van 25 cc. gevuld met verzadigde kalium-carbonaat in dit buisje gestoken en werd

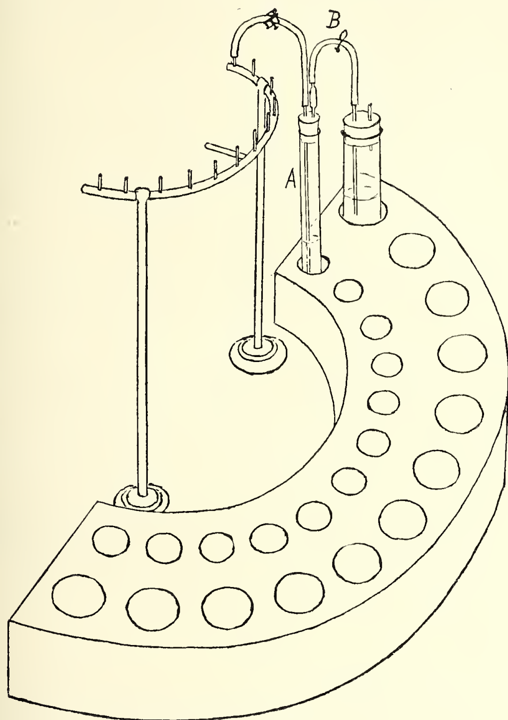


Fig. 1.

door zijn inhoud snel uit te blazen en nog een oogenblik lucht door te blazen, de kalium-carbonaat-oplossing snel gemengd met de vloeistof in de reactiebuis; de enzym werking werd zoo oogenblikkelijk gestopt.

De buis *A* werd dan verbonden met de luchtleiding en de ammonia overgeblazen door een krachtigen luchtstroom, gewasschen door zwavelzuur. Twee uur blazen bleek ruim voldoende voor de gebruikte hoeveelheden vloeistof.

Grootere volumina zouden moeilijk te hanteeren geweest zijn. Om toch voldoende nauwkeurigheid te bereiken bij de bepaling van

deze zeer geringe hoeveelheden NH_3 waren enkelvoudige metingen niet voldoende. Op twee opeenvolgende dagen worden daarom identieke experimenten uitgevoerd in duplo zonder de zwavelzuurbuizen te vervangen. Op deze wijze kreeg elke absorptie-buis vier maal de NH_3 van één reageerbuis. Elken dag werd het Soja-extract versch bereid als boven beschreven.

De noodzakelijke correctie voor de sporen NH_3, die uit het Sojameel mochten zijn ontwikkeld, of uit de gebruikte chemicaliën, werd bepaald door elken dag 3 keer 10 cc. extract E in 3 leege reageerbuizen te brengen en na toevoeging van 25 cc. kalium-carbonaat de NH_3 op de gewone wijze over te blazen in buizen gevuld met 5 cc. zwavelzuur $^1/_{50}$ N en water. Elk van deze absorptiebuizen ontving dus 6 maal het bedrag der correctie.

De bepaling van p_H werd uitgevoerd in den luchtthermostaat bij 27°, als beschreven zal worden in een andere mededeeling.

In dit geval werd gevonden voor 10 cc. extract E, gemengd met 2 cc. water $p_H = 7{,}515$.

10 cc. extract E, gemengd met 2 cc. ureum-oplossing (0,06 %) had na 4 uur staan bij 27° $p_H = 7{,}525$.

Daar de p_H van 0,01 % ureum in 8 % phosphaatoplosing door totale hydrolyse de kleine toename van 0,01 vertoonde, werd de p_H hier dus als 7,52 aangenomen.

De titratie werd uitgevoerd direct in de wijde absorptie-buis met $^1/_{50}$ N NaOH, kort te voren bereid met koolzuurvrij gedistilleerd water en $^1/_{10}$ N NaOH oplossing, vrij van koolzuur bereid en bewaard. Een zeer verdunde oplossing van alizarin sulphonzure natron bleek ook hier de beste indicator voor NH_3 bepalingen.

17—18 Jan. 1917. TABEL 1. (Fig. 2 *A*)

0.01 % ureum. $p_H = 7.52$

t minuten.	c.c. $\frac{1}{50}$ N H_2SO_4	c.c. $\frac{1}{50}$ N NaOH	c.c. $\frac{1}{50}$ N NH_3	c.c. $\frac{1}{50}$ N NH_3 gecorr.	y	$m = \frac{0{,}0327 \log \frac{1}{1-y} + 0{,}01y}{t}$
20	10	8.1	1.9	1.78	0.223	0.000290
30	10	7.3	2.7	2.58	0.323	0.000292
50	10	6.2	3.8	3.68	0.46	0.000267
70	10	4.8	5.2	5.08	0.635	0.000295
90	10	4.0	6.0	5.88	0.735	0.000291
110	12	5.37	6.63	6.51	0.814	0.000291

Zooals blijkt uit Fig. 2 *A* valt het punt voor $t = 50$ buiten de kromme, duidelijk het gevolg van een te groote experimenteele fout.

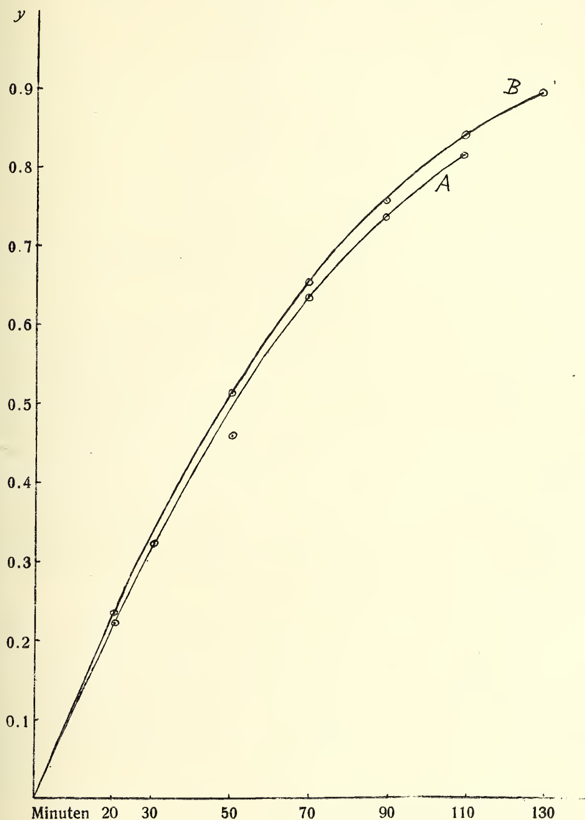


Fig. 2.

Door verbinding van de paren van gegevens voor punten, die voldoende ver van elkaar op deze kromme liggen, geeft de vergelijking $m = \frac{1}{t}\left(\frac{nc}{0,434} log \frac{1}{1-y} + 0,01y\right)$ de tabel 2 voor $\frac{nc}{0,434}$.

De concentratie van de waterstof-ionen in deze vergelijking moet worden uitgedrukt in dezelfde eenheden als die van de ureum, dus in grammen per 100 cc. Daar $p_H = 7.52$ wil zeggen een concen-

TABEL 2.

t	$\frac{nc}{0.434}$
20 en 90	0.0314
20 en 110	0.0318
30 en 90	0.0335
30 en 110	0.0334

Gemiddeld 0.0327

tratie van H-ionen van $10^{-8} \times 3{,}02$ in de gewone eenheid, grammolekulen per liter, hebben wij hier $10^{-8} \times 0{,}302$ gr. H in 100 cc.

Hieruit zou volgen $n = 0{,}047 \times 10^{8}$.

Om duidelijk te maken, dat in deze metingen groote nauwkeurigheid noodig, doch in het resultaat nauwelijks te verwachten is en dat de afwijkingen binnen de grenzen van de onvermijdelijke waarnemingsfouten liggen, moge b.v. $\frac{nc}{0{,}434}$ berekend worden in de onderstelling dat voor $t = 20$ de titratie 8.05 gegeven had in plaats van 8.1.

Uit

$$\frac{1}{20}\left(\frac{nc}{0{,}434}\, 0{,}5768 + 0{,}00735\right) = \frac{1}{90}\left(\frac{nc}{0{,}434}\, 0{,}1128 + 0{,}00229\right)$$

zou dan volgen $\frac{nc}{0{,}434} = 0{,}0426$.

Overwegende, dat de twee kleine hoeveelheden Soja-meel, afgewogen op twee opeenvolgende dagen toch wel niet volmaakt gelijk geweest konden zijn, voerde de schrijver een nieuw stel experimenten uit, waarbij alleen de twee serieën van denzelfden dag gecombineerd werden:

31 Jan. 1917. TABEL 3. (Fig. 2 *B*)

t minuten.	c.c. $\frac{1}{50}$N H_2SO_4	c.c. $\frac{1}{50}$N NaOH	c.c. $\frac{1}{50}$N NH_3	c.c. $\frac{1}{50}$N NH_3 gecorr.	y	$m = \frac{0{,}0302 \log \frac{1}{1-y} + 0{,}01y}{t}$
20	5	4.03	0.97	0.94	0.235	0.000293
50	5	2.92	2.08	2.05	0.513	0.000291
70	5	2.35	2.65	2.62	0.655	0.000293
90	5	1.95	3.05	3.02	0.755	0.000289
110	5	1.62	3.38	3.35	0.838	0.000293
130	5	1.40	3.60	3.57	0.892	0.000293

Uit deze tabel 3 werd als boven berekend:

TABEL 4.

t	$\frac{nc}{0.434}$
20 en 50	0.0343
20 en 110	0.0301
20 en 130	0.0302
50 en 110	0.0282
50 en 130	0.0287
70 en 110	0.0298
70 en 130	0.0300

Gemiddeld 0,0302

De waarneming voor 90 minuten bevat, zooals blijkt uit de m-kolom van tabel 3 een betrekkelijk groote fout. Daarom zijn de cijfers voor 90 minuten uit tabel 4 weggelaten.

Daar van de vele experimenten dezer soort, die de schrijver heeft uitgevoerd, deze de meest geslaagde was, wat regelmatigheid betreft, en, in aanmerking van de kleinheid der cijfers, die door titratie bepaald moesten worden, ook een zeer bevredigend resultaat gegeven had, werd ten slotte de waarde van $\frac{n}{0,434}$ vastgesteld te zijn 0,0302.

Hieruit volgt

$$n = 0,043 \times 10^8$$

welke waarde overal in dit onderzoek gebruikt is en bevestigd werd door de belangrijke quantitatief formuleerbare betrekkingen, die met behulp daarvan in volgende deelen van deze studie zullen ontwikkeld worden.

4. *Experimenteele bevestiging van de algemeene vergelijking van urease-werking.*

Activiteit van het enzym afhankelijk van de ware reactie van de oplossing.

Een ruime experimenteele bevestiging zal nu noodig wezen en gegeven worden om te toonen, dat de formule

$$\frac{nc}{0,434} \log \frac{1}{1-y} + ay = mt$$

werkelijk de algemeene vergelijking van urease-werking is, bij constante temperatuur en constante H-ionen concentratie.

Indien $\frac{nc}{0,434}$ klein is, vergeleken met a, is het duidelijk, dat de omzettingslijn praktisch een rechte lijn moet worden. In 't andere geval, in meer zure oplossingen, waar $\frac{nc}{0,434}$ veel grooter is dan a (als de ureum-concentratie klein is), zal de logarithmische lijn van de monomoleculaire reactie te voorschijn komen.

Door de verhouding van Na_2HPO_4 2 aq en KH_2PO_4 in de 8 °/₀ phosphaatmengsels te wijzigen kon een groot gebied van constante H-ionen concentraties verwezenlijkt worden. Om de constantheid van de p_H gedurende den geheelen loop der omzetting te verzekeren, was het noodig steeds te werken met 0,02 °/₀, of beter nog met 0,01 °/₀ ureum-oplossingen. Daar 12 c.c. van 0,01 °/₀ slechts 1,2 m.gr. ureum bevatten, wil dit zeggen, dat in al deze experimenten de graad van hydrolyse van 1,2 mgr. ureum bepaald moest worden door enkelvoudige metingen, een ernstig bezwaar, dat echter niet ontgaan kon worden met het oog op het overheerschende belang van constante H-ionen concentratie.

Dezelfde hooge graad van nauwkeurigheid, als volstrekt noodzakelijk was bij de bepaling der constante n, kon in die enkelvoudige bepalingen niet verwacht worden en was, gelukkig, hier ook niet noodig.

Een tweede doel van deze experimenten was, m te bepalen in de oplossingen van verschillenden zuurgraad, wanneer gelijke of vergelijkbare hoeveelheden enzym aanwezig waren of, met andere woorden, m als functie van p_H te onderzoeken.

Om vergelijkbare bedragen enzym in de oplossingen te krijgen bleek de volgende eenvoudige methode afdoende.

Een ongeveer 500 gram gemalen Soja-boonen werden voor dit doel bewaard in een stopflesch, afgesloten van het licht in een kast en nu en dan doorgeschud gedurende deze onderzoekingen, die verscheidene maanden duurden.

De vereischte hoeveelheid Soja-meel werd steeds afgewogen en geextraheerd op den dag zelf van het experiment met dezelfde nagenoeg neutrale oplossing van 7.28 gr. Na_2HPO_4 2 aq + 2.32 gr. KH_2PO_4 per 100 cc. water. Deze extractie werd uitgevoerd door Soja-meel en phosphaat-oplossing in een kolfje goed door te schudden, een uur bij 27° te laten staan, kiezelgur toe te voegen tot een gelijk gewicht als het Soja-meel en snel te filtreeren door een gewoon vouwfilter. Steeds werd zonder moeite een heldere oplossing ver-

kregen, slechts eenigszins opaliseerend, wanneer groote hoeveelheden Soja-meel gebruikt waren. De oplossing, waarmee gewerkt werd, werd dan bereid door menging van dit filtraat met het vereischte volume van een 9.6 %, anders samengestelde, phosphaatoplossing. Een rij reageerbuizen van Jena-glas, elk met 10 cc. van deze vloeistof werd in het waterbad geplaatst tezamen met een 250 of 500 cc. kolf met 0.12 % of 0.06% ureum-oplossing, in 't kort, dezelfde methode werd gevolgd als boven beschreven bij de bepaling van de constante n.

Eenige voorloopige proeven hadden getoond, dat m, als berekend met onze formule, klein was bij hooge en bij lage H-ionen concentratie en dat 2 uur staan bij 27° al reeds wat schadelijk was voor het enzym in duidelijk alkalische, niet echter, in zure oplossingen.

Tenzij het zuurgehalte te hoog geweest is, is de vermindering van urease-activiteit door zuren een reversibel proces, evenals de neutralisatie van een base.

Dit feit werd vastgesteld door experimenten, die hier kortheidshalve niet nader medegedeeld zullen worden.

In Sept. 1916 werd de volgende serie experimenten uitgevoerd met 0.02 % ureum. De correctie voor de sporen NH_3, uit de gebruikte materialen ontwikkeld, werd op de gewone wijze bepaald door deze kleine hoeveelheden uit 3 buizen, elk gevuld met 10 cc. extract, te verzamelen in dezelfde absorptie-buis met 5 cc. H_2SO_4 $^1/_{50}$N.

Om de mogelijke tegenwerping te voorkomen, dat het enzym misschien geleden heeft door den invloed van tijd, temperatuur en ware reactie, werd in beide laatste experimenten een buis met 10 cc. van hetzelfde mengsel als in de andere was gedurende 4 uur in het waterbad gelaten vóór er 2 cc. ureum in te brengen. Na 60 minuten werd dezelfde hoeveelheid ureum gehydrolyseerd gevonden als in de tabellen 10—11. Als reeds boven vermeld en zooals verderop nog duidelijker aangetoond zal worden, is de stabiliteit van urease nog grooter bij lagere p_H.

Deze experimenten bevestigen reeds de theorie. Bij hooge H-ionen concentratie is het verloop der reactie, zooals blijkt uit vergelijking der twee laatste kolommen, praktisch gelijk aan dat van eene monomoleculaire omzetting. Hoe lager deze concentratie, des te meer wijkt het daarvan af en nadert tot een rechte lijn, juist in dezelfde mate, als voorspeld door de vergelijking

$$m = \frac{\frac{nc}{0,434} \log \frac{1}{1-y} + ay}{t}.$$

TABEL 5.

3 gr. Soja in 100 c.c. { 7.28 gr. Na_2HPO_4 2 aq. / 2.32 gr. KH_2PO_4 }

50 c.c. filtraat gemengd met 100 c.c. water + { 1.92 gr. Na_2HPO_4 2 aq. / 7.68 gr. KH_2PO_4 }

$p_H = 6.13$

t minuten.	c.c. NaOH $\frac{1}{50}$ N	c.c. NH_3 $\frac{1}{50}$ N gecorrigeerd.	y	$m = \frac{0,74 \log \frac{1}{1-y} + 0,02y}{t}$	$k = \frac{\log \frac{1}{1-y}}{t}$
60	9.3	0.6	0.15	0.00090	0.00118
90	9.1	0.8	0.20	0.00082	0.00108
120	8.9	1.—	0.25	0.00079	0.00104
150	8.65	1.25	0.31	0.00082	0.00107
180	8.45	1.45	0.36	0.00082	0.00108
210	8.2	1.7	0.425	0.00087	0.00114
240	8.05	1.85	0.46	0.00084	0.00111
270	7.8	2.1	0.525	0.00090	0.00120
315	7.7	2.2	0.55	0.00083	0.00110
370	7.5	2.4	0.60	0.00081	0.00107

Gemiddeld 0.00084

$\frac{1}{3} \times 0.00084 = 0.00028.$

TABEL 6.

3 gr. Soja in 100 c.c. { 7.28 gr. Na_2HPO_4 2 aq. / 2.32 gr. KH_2PO_4 }

50 c.c. filtraat gemengd met 100 c.c. water + { 3.84 gr. Na_2HPO_4 2 ac. / 5.76 gr. KH_2PO_4 }

$p_H = 6.40$

t minuten.	c.c. NaOH $\frac{1}{50}$ N	c.c. NH_3 $\frac{1}{50}$ N gecorrigeerd.	y	$m = \frac{0,394 \log \frac{1}{1-y} + 0,02y}{t}$	$k = \frac{\log \frac{1}{1-y}}{t}$
30	9.3	0.6	0.15	0.00103	0.0023
60	8.8	1.1	0.275	0.00101	0.0023
90	8.4	1.5	0.375	0.00098	0.0023
125	7.95	1.95	0.488	0.00100	0.0023
150	7.6	2.3	0.575	0.00105	0.0025
180	7.4	2.5	0.625	0.00101	0.0024
215	7.1	2.8	0.70	0.00102	0.0024
240	6.95	2.95	0.738	0.00102	0.0024
270	6.75	3.15	0.788	0.00104	0.0025
300	6.6	3.3	0.825	0.00105	0.0025

Gemiddeld 0.00102

$\frac{1}{3} \times 0.00102 = 0.00034.$

TABEL 7.

0.75 gr. Soja in 100 c.c. { 7.28 gr. Na_2HPO_4 2 aq. / 2.32 gr. KH_2PO_4 }

50 c.c. filtraat gemengd met 100 c.c. water + { 8.64 gr. Na_2HPO_4 2 aq. / 0.96 gr. KH_2PO_4. }

$p_H = 7.21$

t minuten.	c.c. NaOH $\frac{1}{50}$ N	c.c. NH_3 $\frac{1}{50}$ N gecorrigeerd.	y	$m = \frac{0{,}0611\, log \frac{1}{1-y} + 0{,}02y}{t}$	$k = \frac{log \frac{1}{1-y}}{t}$
20	9.05	0.95	0.238	0.00060	0.0060
40	8.3	1.7	0.425	0.00058	0.0060
60	7.7	2.3	0.575	0.00057	0.0062
80	7.22	2.78	0.695	0.00057	0.0064
100	6.85	3.15	0.788	0.00057	0.0067
120	6.55	3.45	0.86	0.00058	0.0071
150	6.35	3.65	0.91	0.00055	0.0070
180	6.25	3.75	0.94	0.00052	0.0068
210	6.1	3.9	0.975	0.00056	0.0076

Gemiddeld 0.00057

$\frac{4}{3} \times 0.00057 = 0.00076.$

TABEL 8.

Twee gelijke experimenten op opeenvolgende dagen, met telkens versch bereide oplossingen.

0.75 gr. Soja in 100 c.c. { 7.28 gr. Na_2HPO_4 2 aq. / 2.32 gr. KH_2PO_4. }

50 c.c. filtraat gemengd met 100 c.c. water + 9.6 gr. Na_2HPO_4 2 aq.

$p_H = 7.52$

t minuten.	c.c. NaOH $\frac{1}{50}$ N		c.c. NH_3 $\frac{1}{50}$ N gecorrigeerd (gemiddeld).	y	$m = \frac{0{,}0302\, log \frac{1}{1-y} + 0{,}02y}{t}$	$k = \frac{log \frac{1}{1-y}}{t}$
20	8.55	8.50	1.45	0.36	0.00065	0.0097
40	7.4	7.4	2.575	0.64	0.00065	0.0111
60	6.75	6.7	3.25	0.81	0.00063	0.0120
80	6.3	6.25	3.7	0.925	0.00066	0.0141
100	6.15	6.1	3.85	0.96	0.00061	0.0140

Gemiddeld 0.00064

$\frac{4}{3} \times 0.00064 = 0.00085$

TABEL 9.

0.5 gr. Soja in 100 c.c. { 7.28 gr. Na_2HPO_4 2 aq. / 2.32 gr. KH_2PO_4 }

50 c.c. filtraat gemengd met 150 c.c. water + 14.4 gr. Na_2HPO_4 2 aq.

$p_H = 7.64$

t minuten.	c.c. NaOH $\frac{1}{50}$N	c.c. NH_3 $\frac{1}{50}$ N gecorrigeerd.	y	$m = \frac{0{,}0227 \log \frac{1}{1-y} + 0{,}02y}{t}$	$k = \frac{\log \frac{1}{1-y}}{t}$
20½	9.2	0.8	0.20	0.00030	0.0048
40	8.4	1.6	0.40	0.00032	0.0055
60	7.72	2.28	0.57	0.00033	0.0061
80	7.3	2.7	0.675	0.00031	0.0061
100	6.8	3.2	0.80	0.00032	0.0070
120	6.5	3.5	0.875	0.00032	0.0075
150	6.2	3.8	0.95	0.00032	0.0087
				Gemiddeld 0.00032	

$2 \times \frac{4}{3} \times 0.00032 = 0.00032.$

TABEL 10.

0.5 gr. Soja in 100 c.c. { 7.28 gr. Na_2HPO_4 2 aq. / 2.32 gr. KH_2PO_4 }

50 c.c. filtraat gemengd met 200 c.c. water + 19.2 gr. Na_2HPO_4 2 aq.

$p_H = 7.75$

t minuten.	c.c. NaOH $\frac{1}{50}$N	c.c. NH_3 $\frac{1}{50}$ N gecorrigeerd.	y	$m = \frac{0{,}176 \log \frac{1}{1-y} + 0{,}02y}{t}$	$k = \frac{\log \frac{1}{1-y}}{t}$
20	9.27	0.73	0.18	0.00026	0.0043
40	8.65	1.35	0.34	0.00025	0.0045
60	8.1	1.9	0.475	0.00024	0.0047
80	7.7	2.3	0.575	0.00023	0.0047
100	7.2	2.8	0.70	0.00025	0.0062
120	6.85	3.15	0.79	0.00023	0.0056
150	6.45	3.55	0.89	0.00023	0.0064
180	6.2	3.8	0.95	0.00023	0.0072
210	6.1	3.9	0.975	0.00023	0.0076
				Gemiddeld 0.00024	

TABEL II.

Evenzoo als vorig experiment.

$p_H = 7.75$

t minuten.	c.c. NaOH $\frac{1}{50}$N	c.c. NH_3 $\frac{1}{50}$ N gecorrigeerd.	y	$m = \frac{0,176 \log \frac{1}{1-y} + 0,02y}{t}$	$k = \frac{\log \frac{1}{1-y}}{t}$
20	9.3	0.7	0.175	0.00025	0.0042
40	8.57	1.43	0.358	0.00026	0.0048
60	8.12	1.88	0.47	0.00024	0.0046
80	7.65	2.35	0.588	0.00022	0.0048
100	7.2	2.80	0.70	0.00025	0.0062
120	6.9	3.1	0.775	0.00022	0.0054
150	6.4	3.6	0.90	0.00024	0.0066
180	6.15	3.85	0.963	0.00025	0.0079
216	6.05	3.95	0.988	0.00025	0.0089

Gemiddeld 0.00024

Door als eenheid van urease concentratie te nemen 1 gram Soja op 150 c.c. gezamenlijke 9,6 °/₀ phosphaat-oplossing en de gemiddelden van m hiertoe te herleiden (als gedaan is onder aan elke tabel) krijgen wij voor gelijke enzym concentratie bij verschillende p_H de volgende lijst:

p_H	Activiteit van dezelfde hoeveelheid urease
6.13	0.00028
6.40	0.00034
7.21	0.00076
7.52	0.00085
7.64	0.00085
7.75	0.00080

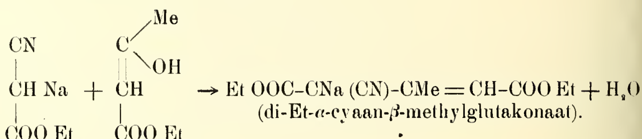
(*Wordt vervolgd.*)

Scheikunde. — De Heer Böeseken biedt een mededeeling aan van den Heer P. E. Verkade: „*Het Glutakonzuur.* III. (*Kondensatie van Natrium-formylazijnester met Cyaanazijnester*)".

(Mede aangeboden door den Heer Holleman).

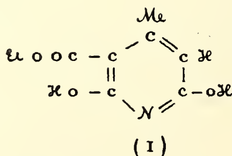
In mijn eerste mededeeling over het glutakonzuur [1]) heb ik in het kort een en ander medegedeeld over een poging ter bereiding van dit zuur volgens een nieuwe methode, nl. door kondensatie van Na-formylazijnester met cyaanazijnester. Deze poging leidde echter niet tot het gewenschte resultaat; de oorzaak dezer mislukking zal ik in het volgende trachten op te sporen.

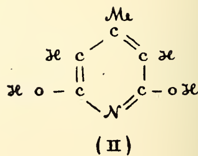
Door Thorpe en Rogerson [2]) zijn derivaten van het glutakonzuur, bevattende een β-methylgroep en eventueel een γ-alkylgroep, verkregen door kondensatie van Na-cyaanazijnester met acetylazijnester of haar *mono*-alkylderivaten. Bv.:



In deze esters was nu door alkyleeren nog een alkylgroep op de α-plaats in te voeren.

Bij verzeeping met gekoncentreerd zoutzuur geven deze cyaanesters het alkyl-gesubstitueerde glutakonzuur in wisselende hoeveelheid, *vaak* — niet altijd — naast pyridine-derivaten (in het bovenstaande voorbeeld 5 °/₀ *β-methylglutakonzuur* naast *Et*-4-*methyl*-2.6-*dihydroxypyridine*-5-*karboxylaat* (I) en veel 4-*methyl*-2.6-*dihydroxypyridine* (II)):

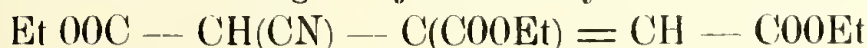




[1]) Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam. 24. pag. 865 (1915).
[2]) Soc. 87. 1685 (1905).

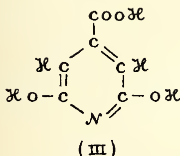
terwijl bij verhitting met methylalkoholische potasch-oplossing *steeds uitsluitend* een alkylgesubstitueerd dihydroxypyridine — hier dus de stof (I) — ontstond [1]). Bovendien wordt, *indien de ester een vrij α-waterstofatoom bevat*, bij staan met gekoncentreerd zwavelzuur de pyridine-5-karbonzure ester — hier dus de stof (II) — gevormd; is echter dit H-atoom door een alkylgroep vervangen, dan heeft geen reaktie plaats.

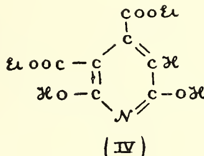
Door kondensatie van Na-cyaanazijnester met oxaalazijnester [2]) ontstond op overeenkomstige wijze de α-cyaanakonietzure ester:



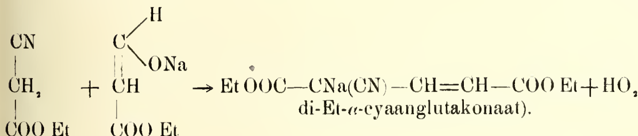
$$\mathrm{Et\,OOC - CH(CN) - C(COOEt) = CH - COOEt}$$

welke bij koken met zoutzuur uitsluitend het akonietzuur gaf en bij verhitting met methylalkoholische potasch in 2.6-*dihydroxypyridine-4-karbonzuur* (*citrazinezuur*) (III) overging, terwijl bij staan met gekoncentreerd zwavelzuur *Et*-2.6-*dihydroxypyridine*-4.5-*dikarboxylaat* (IV) gevormd werd.





Hoewel THORPE en ROGERSON vonden, dat omgekeerd de vrije cyaanazijnester veel moeilijker met de natrium-acetylazijnester tot di-Et-α-cyaan-β-methyl-glutakonaat kondenseerde, rees toch het vermoeden, dat dit met de (vrij gemakkelijk te verkrijgen) natrium-*formyl*azijnester wel eens het geval zou kunnen zijn [3]):



---

[1]) Bovendien ontstaat in het als voorbeeld gekozen geval bij uitzondering wat *malonzuur*. Bij alkalische verzeeping van andere glutakonzuur-derivaten (bv. de dikarboxylglutakonzure of isoakonietzure ester) werd ook meermalen de vorming van dit zuur gekonstateerd. Ook alkylmalonzuren ontstaan op overeenkomstige wijze (THOLE en THORPE, Soc. **99**. 2187).

[2]) THORPE en ROGERSON. Soc. **89**. 631 (1906).

[3]) De vrije formylazijnester is zeer onbestendig; zij kondenseert uiterst gemakkelijk tot trimesinezure ester. Een poging tot kondensatie hiervan met Na-cyaanazijnester (waardoor onze synthese geheel analoog aan die van THORPE en ROGERSON zou worden) biedt dan ook absoluut geen kans van slagen.

Inderdaad verliep de kondensatie vlot als volgt:

65 gram Na-formylazijnester[1]) werden fijngepoederd en in 200 cc. absolute alkohol gesuspendeerd. Direkt daarna werden 50 gram cyaanazijnester toegevoegd en ± 1 uur onder herhaaldelijk omschudden op een kokend waterbad verhit. De reaktie verloopt snel en onder aanzienlijke warmte-ontwikkeling; de kolfinhoud wordt oranjerood gekleurd en zeer gelatineus. De reaktiemassa werd in verdund zwavelzuur opgenomen en de zich afscheidende olie met aether uitgeschud. Na herhaaldelijk, zorgvuldig wasschen met verdunde bikarbonaat-oplossing en water werd de aether voorzichtig in vakuum afgedampt en de achterblijvende ester boven fosforpentoxyde gedroogd. Verkregen werden 45 gram van een geelroode, buitengewoon visceuse en kleverige olie.

Deze olie moest *zonder verdere zuivering* worden geanalyseerd (z. o.). De resultaten waren:

1. 0.1749 gram stof gaven 0.3632 gram CO_2 en 0.0950 gram H_2O
2. 0.2170 ,, ,, ,, 0.4559 ,, CO_2 ,, 0.1221 ,, H_2O
3. 0.2684 ,, ,, ,, 17.7 cc. N_2 (14°.5 en 768 mm.)
4. 0.2354 ,, ,, ,, 15.6 cc. N_2 (14°.1 en 762 mm.)

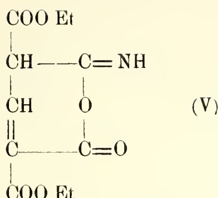
Berekend voor $C_{10}H_{13}O_4N$:	Gevonden: 1	2	3	4
C = 56.84 %	56.92	57.27	—	—
H = 6.20 %	6.06	6.25	—	—
N = 6.64 %	—	—	7.78	7.78

In aanmerking genomen de wijze van bereiding en de ruwe toestand, waarin de ester geanalyseerd moest worden zijn deze resultaten bevredigend.

Deze „*α-cyaanglutakonzure diaethylester*" hadden Guthzeit en Eyssen[2]) reeds vroeger door inwerking van 0,5 %-ige waterige kaliloog op *isoimidodikarboxylglutakonzure ester* (V ?) bij kamertemperatuur verkregen. Hetgeen zij mededeelen omtrent de eigenschappen dezer

[1]) Deze werd verkregen door toedruppelen van een mengsel van gelijke gewichtshoeveelheden aethylacetaat en aethylformiaat aan een gelijk gewicht droge benzol, waaronder zich 1 aeq. (berekend op het aethylacetaat) natriumdraad bevond (Wislicenus, Ber. **20**. 2931; Wislicenus en Bindemann, Ann. **316**. 18). Na 48 uur staan bij kamertemperatuur werd de reaktiemassa door uitpersen van de grootste hoeveelheid benzol bevrijd en gezuiverd door haar eenige malen met het halve gewicht volkomen droge benzol aan te wrijven en telkens weer uit te persen. Het roomgele poeder bevat volgens von Pechmann (Ber. **25**. 1040) slechts ± 70% Na-formylazijnester; de rest bestaat uit onbekende nevenproducten.

[2]) J. pr. (2) **80**. 34 (1909).



verbinding komt met mijn bevindingen geheel overeen; de ester was zeer viskeus en kleverig, had een opvallend bitteren smaak en was *onder geen omstandigheden* (zelfs niet bij drukkingen < 1 mm. Hg) *te distilleeren*. Daarentegen kunnen THORPE's alkylgesubstitueerde cyaanglutakonzure esters zonder eenige ontleding bij vrij hooge temperatuur in vakuum worden gedistilleerd; evenzoo [1]) de ook vloeibare α-cyaanakonietzure ester, mits slechts kleine hoeveelheden tegelijk in bewerking worden genomen en snel wordt gedistilleerd. [2])

In tegenstelling met die van GUTHZEIT en EYSSEN gaf mijn ester in alkoholische oplossing met ferrichloride *geen roodkleuring*.

De hierboven medegedeelde eigenschappen deden het vermoeden rijzen, dat onze ester een van haar alkyl-derivaten afwijkende struktuur zou bezitten. Inderdaad bleek nu uit kryoskopische bepalingen, *dat haar het dubbele molekulairgewicht toekwam*; niet alleen in benzol, maar ook in het dissocieerend werkend oplosmiddel phenol werd dit resultaat verkregen.

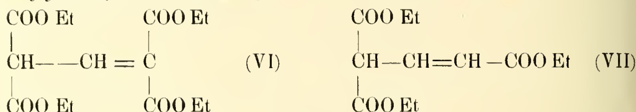
oplosmiddel		*G*	*g*	τ	*M*
benzol	$K = 50.0$	18.4 gr.	0.5842 gr.	0°.367	433
		20.5 „	1.4969 „	0°.860	424
		20.5 „	2.1156 „	1°.256	411
phenol	$K = 72.0$	10.48 gr.	0.2082 gr.	0°.37	386
		11.82 „	0.3886 »	0°.66	359
		12.36 „	0.8561 „	1°.56	348

Berekend voor $C_{20} H_{26} O_8 N_2$: 422.

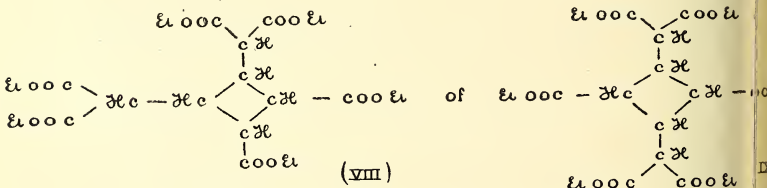
[1]) THORPE en ROGERSON, loc. cit. Kpt. 215° bij 20 mm.

[2]) ERRERA en PERCIABOSCO (Ber. **34**. 3704 (1901) verkregen deze ester door inwerking van verdunde natronloog op isoimidodikarboxylakonietzure ester; volgens hen is hij in vakuum niet onontleed distilleerbaar.

Bij een tweetal andere glutakonzuur-derivaten had GUTHZEIT reeds vroeger gevonden, dat deze langzaam bij jarenlang staan, doch veel sneller *onder invloed van piperidine* in bimeren overgaan; de *dikarboxylglutakonzure tetra-aethylester* [1]) (VI) gaf een kristallijn bimeer,



dat bovendien nog in twee isomere vormen (van smpt. 103° en 87—88°) kon worden verkregen, terwijl het bimeer der *α-monokarboxylglutakonzure* (= isoakonietzure) *triaethylester* [2]) (VII) dikvloeibaar was. In een zeer uitvoerig onderzoek [3]) hebben GUTHZEIT, WEISS en SCHAEFER het later waarschijnlijk gemaakt, dat deze bimeren *cyclobutaan-derivaten* zouden zijn; b.v. van de formule:



uit de stof (VII) [4]). Als bewijs voor de konstitutie kan b.v. dienen, dat bij hydrolyse dezer produkten met zoutzuur verschillende stereoisomere, tegenover salpeterzuur en alkalisch permanganaat zeer bestendige, vierbasische „*biglutakonzuren*” $C_{10} H_{12} O_8$ ontstonden. Alkalische agentia veroorzaakten daarentegen depolymerisatie: kaliloog gaf het gewone glutakonzuur, natriumaethylaat met het bimeer van (VI) kwantitatief de Na-dikarboxylglutakonzure ester.

Evenzoo verkreeg SCHMITT [5]) bij kondensatie van cyaanazijnester met oxaalazijnester in tegenwoordigheid van enkele druppels piperidine een cyaanakonietzure ester, welke in afwijking van de boven

[1]) Ber. **34**. 675. (1901). De overeenkomstige tetramethylester, welke later bereid werd, gaf eveneens met piperidine een kristallijn bimeer.

[2]) ibid. **31**. 2753 (1898).

[3]) J. pr. (2) **80**. 393 (1909).

[4]) Van deze stoffen (VIII) en (IX) zijn resp. 5 en 5 stereoisomeren mogelijk; van de eerste soort zijn er dan bovendien nog 2 in optische antipoden splitsbaar.

[5]) C.r. **143**. 912 (1906).

besprokene *kristallijn* was (smpt. 75°); het molekulairgewicht dezer verbinding heeft hij echter niet bepaald[1]).

De „cyaanglutakonzure-ester" polymeriseert nu blijkbaar veel gemakkelijker dan deze beide esters; zooals uit de door GUTHZEIT en EYSSEN[2]) gevonden bereidingswijze volgt, gaat zij reeds bij kamertemperatuur in haar bimeer over.

Toch bleek zij — *niettegenstaande het reeds een bimeer is* — tegenover piperidine nog niet indifferent. Bij menging met een geringe hoeveelheid hiervan had nl. sterke warmte-ontwikkeling, roodkleuring en verdikking plaats.

De invloed van piperidine bleek ook nog bij de volgende proef: Een oplossing van 2.1156 gr. ester in 20.5 gr. benzol gaf een stolpuntsverlaging van 1°.256 (z.b.). Aan deze oplossing werd nu toegevoegd 0.0752 gr. piperidine, waardoor — indien beide opgeloste stoffen absoluut geen invloed op elkaar hadden — een verdere daling van het stolpunt van 0°.216 (dus een totale daling van 1°.472) gevonden moest worden. In plaats hiervan *steeg het stolpunt langzamerhand*; de daling bedroeg nl.:

direct na toevoeging der piperidine nog slechts	1°.159	
na ± 2 uur	1°.084	
na ± 4 uur	1°.076	(konstant)

Bij toevoeging der piperidine aan de benzolische oplossing ontstond eerst een troebeling (een piperidinium-verbinding?) welke echter weldra weer verdween; de benzolische oplossing kleurde geleidelijk donkerder. De na wasschen der oplossing met verdund zwavelzuur en water en verdamping der benzol bij kamertemperatuur terug gewonnen vloeistof was aanmerkelijk visceuzer dan de oorspronkelijk opgeloste.

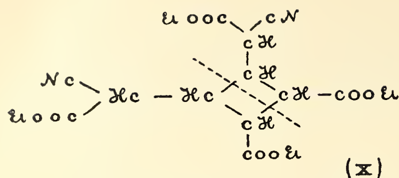
Het inwerkingsprodukt van piperidine op onze ester zal te zijner tijd worden onderzocht.

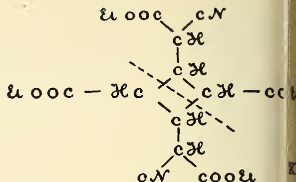
Het bij onze kondensatie verkregen produkt is dus ook waarschijnlijk wel een *cyklobutaan-derivaat*. Afgezien van de mogelijkheid eener verplaatsing der dubbele binding in de „α-cyaanglutakonzure ester", zijn de volgende twee typen van bimeren mogelijk ((X) en (XI))[3]); van elk dezer typen is (door de aanwezigheid van 6 asym-

[1]) SCHMITT zelf kent aan deze verbinding de konstitutie eener γ-cyaanakonietzure ester toe; de oxaalazijnester zou hier dan in zijn ketovorm gereageerd hebben. Deze opvatting is zeer waarschijnlijk wel onjuist, daar volgens THORPE's onderzoekingen de α- en γ-positie in het glutakonzuur- en akonietzuur-molekuul identiek zijn.

[2]) loc. cit.

[3]) Volgens PRINS (Chem. Weekblad **11**, 474) heeft altijd binding der meest kontrasteerende atomen plaats; bijgevolg zou type (XI) den juisten toestand weergeven.





metrische C-atomen, waarvan 4 in en 2 buiten den ring) een zeer groot aantal stereoisomeren mogelijk.

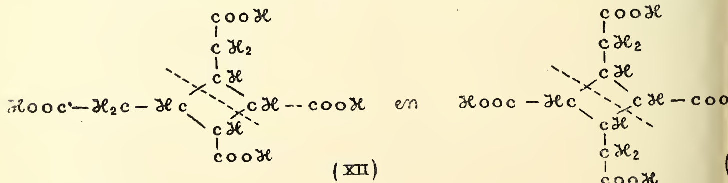
Onze ester is nu zeer waarschijnlijk een mengsel van een aantal dezer (kristallijne) stereoisomeren en ontleent aan dit feit vermoedelijk zijn eigenaardig taai-vloeibare konsistentie.

In een preparaat van *Me-Et-α-cyaanglutakonaat*, hetwelk op overeenkomstige wijze uit Na-formylazijnzure methylester en cyaanazijnzure aethylester was bereid en geheel dezelfde eigenschappen bezat, had zich na enkele maanden een geringe hoeveelheid *kristalletjes* afgezet, welke hoeveelheid na ruim 3 jaar staan niet vermeerderd was [1]. Met eenige moeite konden zij door centrifugeeren van de grootste hoeveelheid der vloeistof worden ontdaan; het was een organische, stikstofhoudende stof. Voor verder onderzoek was de hoeveelheid materiaal ontoereikend.

Ten slotte wil ik er in dit verband nog op wijzen, dat GUTHZEIT en EYSSEN bij aethyleeren hunner „α-cyaanglutakonzure ester" naast een dikke olie een betrekkelijk kleine hoeveelheid van een *kristallijn* aethyl-derivaat verkregen. Dit werd echter niet verder door hen onderzocht.

GUTHZEIT en EYSSEN [2] hebben ook reeds de *verzeeping* der door hen bereide ester bestudeerd. Zij merkten daaromtrent op:

„Verseifungsversuche des Cyanglutakonsäureesters mit sauern



[1]) Enten van ons di-Et-α-cyaanglutakonaat met deze kristalletjes had geen ander gevolg, dan dat deze oplosten.

[2]) loc. cit

Mitteln wurden unter den verschiedensten Bedingungen angestellt, gaben aber alle nur unklare Resultate, vermutlich führten sie zu leicht veränderlichen Oxypyridinderivaten".

en tevens:

.....in Alkalilauge zwar löslich, aber anscheinend auch bald verändert und ein fassbares Zersetzungsprodukt nicht gewinnbar".

Als produkt der verzeeping met *zoutzuur* kon ten eerste een mengsel van „biglutakonzuren" van de typen (XII) en (XIII) worden verwacht.

Daarnaast bestond de mogelijkheid, dat de cyclobutaan-ester voor een gedeelte gemonomeriseerd zou worden en dat het monomeer krachtens de boven besproken onderzoekingen van THORPE en ROGERSON[1]) aanleiding zou geven tot de vorming van één of meer der volgende produkten: *glutakonzuur*, (*Et*-2.6-*dihydroxypyridine*-5-*karboxylaat*)[2]), 2.6-*dihydroxypyridine*-5-*karbonzuur* en 2.6-*dihydroxypyridine*.

10 gram der ester werden met 100 cc. gekoncentreerd zoutzuur op de schudmachine aan terugvloeikoeler gekookt, terwijl tegelijkertijd ter vermijding van eventueele oxydatie een waterstofstroom door de vloeistof geleid werd. Na ongeveer 5 uur was de ester onder koolzuur-ontwikkeling geheel opgelost. De geelgekleurde reaktievloeistof werd nu in vakuum bij ± 40° drooggedampt en ten slotte in vakuum boven natronkalk van de laatste resten vrij zoutzuur volkomen bevrijd.

Het zeer hygroskopische residu (wegende bij twee proeven resp. 8.59 en 8.60 gram) loste zeer gemakkelijk in water, daarentegen niet in aether op; noch Et-2.6-dihydroxypyridine-5-karboxylaat[3]), noch glutakonzuur (hetwelk goed in aether oplost) waren dus in noemenswaardige hoeveelheden aanwezig.

De waterige oplossing van het verzeepingsresidu vertoonde de volgende reakties:

1. bij toevoeging van een overmaat alkali trad geelkleuring op.

2. bij staan aan de lucht ontstond langzamerhand een groengeel, later vuilgroen oxydatieprodukt, onoplosbaar in zuren, doch oplosbaar in alkaliën of ammoniak met groenblauwe kleur.

3. de zwak ammoniakaal gemaakte oplossing kleurde zich bij staan aan de lucht geleidelijk blauw; deze kleur ging later over in violet.

---

[1]) loc. cit.

[2]) Dit produkt is minder waarschijnlijk; de ester zal door het zoutzuur worden verzeept.

[3]) ERRERA: Ber. 31. 1245 (1898); GUTHZEIT en LASKA: J.pr (2) 58. 420. De ester is moeilijk oplosbaar in water of verdunde zuren.

4. ferrichloride gaf in de oplossing een *groenkleuring*; met een overmaat van het reagens ontstonden donkergroene vlokken.

5. een ammoniakale zilver-oplossing werd in de warmte zwak gereduceerd.

Al deze reakties wijzen op de aanwezigheid van 2.6-*dihydroxypyridine* [1]). De hoeveelheid hiervan is echter zeer gering; ik was niet in staat deze stof uit het verzeepingsresidu op eenigerleiwijze te isoleeren.

Toen in de verdund waterige oplossing van het verzeepingsresidu van 10 gram ester het neerslag niet meer vermeerderde (zie reaktie 2), werd afgefiltreerd en de vloeistof door koken met norit [2]) zoo veel mogelijk ontkleurd. In de nu met ammoniak geneutraliseerde oplossing gaven lood- en cadmium-zouten een wit, koperzouten een helblauw vlokkig neerslag, terwijl met calcium- en bariumzouten geen precipitaat ontstond; deze feiten kloppen volkomen met die, welke door GUTHZEIT, WEISS en SCHAEFER [3]) bij de vier door hen bereide „*biglutakonzuren*" werden opgemerkt. Het koperzout werd na wasschen met warm water en alkohol en drogen in vakuum boven fosforpentoxyde geanalyseerd.

1. 0,3507 gram stof gaf 0,1450 gram CuO.

Berekend voor $C_{10}H_8O_8Cu_2$: 33.19 %, gevonden 33.02 % Cu.

Uit een kleine hoeveelheid in water gesuspendeerd koperzout werd het zuur door inleiden van zwavelwaterstof in vrijheid gesteld. Na indamping der oplossing resulteerde een moeilijk kristalliseerende massa; er waren dus denkelijk *verschillende* „*biglutakonzuren*" ontstaan. Het residu was onoplosbaar in aether, uiterst gemakkelijk oplosbaar in aceton en werd door alkalisch permanganaat slechts langzaam aangegrepen [4]).

De hoeveelheid Cu-zout, verkregen uit 10 gram ester, bedroeg ± 1 gram; het grootste deel der stof is dus in andere (onbekende) richting ontleed.

Gezien de onmogelijkheid het uitgangsprodukt in zuiveren toestand te verkrijgen en de zeer weinige tot dusverre met groote moeite verkregen resultaten leek ons verder onderzoek dezer stof niet zeer

---

[1]) ERRERA: loc. cit.; RUHEMANN: Soc. **73**. 350 (1898); GATTERMANN en SKITA: Ber. **49**. 494 (1916). Volgens RUHEMANN ontstaat met ferrichloride *violetroodkleuring*. Vgl. ook de reakties der alkyl-2.6-dihydroxypyridinen, beschreven door THORPE en ROGERSON (loc. cit.).

[2]) Dit produkt van de „Norit White Sugar Co." te Zaandam leent zich hiertoe voortreffelijk.

[3]) loc. cit.

[4]) Vgl. hier de door GUTHZEIT c.s. (loc. cit.) medegedeelde eigenschappen.

hoopvol toe. Verzeepingen met verdund zoutzuur, gekoncentreerd zwavelzuur, verdunde kaliloog, methylalkoholische potasch en waterstofperoxyde + alkali werden uitgevoerd, doch gaven al evenmin definitieve resultaten.

Door dit onderzoek is het intusschen toch wel waarschijnlijk geworden, dat de zgn. „α-cyaanglutakonzure ester" als 1.3-*dimethylcyklobutaan*-1.'3.'-*dicyaan*-1.'3.'2.4-*tetrakarbonzure tetraaethylester* moet worden beschouwd. Onze vroegere onderstelling, dat de ester een *isoimidostruktuur* zou bezitten [1]), is zeker vervallen. Zekerheid omtrent de struktuur hopen wij te verkrijgen door de studie van de kondensatie van de (gemakkelijk in zuiveren toestand te bereiden) fenylformylazijnester met natrium-cyaanazijnester tot „α-cyaan-γ-phenylglutakonzure ester"; over dit onderzoek zullen wij alsdan nader berichten.

Lab. der Nederl. Handels-Hoogeschool.

Rotterdam, 6 Febr. 1919.

---

[1]) VERKADE, Deze Verslagen **24**. 865 (1915).

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt eene mededeeling aan van den Heer NIL RATAN DHAR: "*Catalysis — Part VI — Temperature coefficients of heterogeneous reactions.*"

(Mede aangeboden door den Heer VAN ROMBURGH).

In foregoing papers[1]), the temperature coefficients of catalysed and uncatalysed reactions in a homogeneous medium have been studied. It has been shown that a positive catalyst produces a lowering in the value of the temperature coefficient of the reaction, the reverse is the case with a negative catalyst. It was also proved that the higher the order of a reaction, the smaller is the temperature coefficient.

The object of this paper is to discuss the experimental researches and find, if possible, similar relations in the domain of heterogeneous reactions.

In order to make clear the question of the temperature coefficients of heterogeneous reactions, it is necessary to indicate briefly their characteristics.

In a reaction between a liquid and a solid, according to the diffusion theory of reaction velocity a thin layer of liquid adhering to the solid remains unaffected by stirring and the reaction is maintained by the transport of dissolved substances across this layer of diffusion. Moreover, it is assumed that at the boundary surface between two phases, the velocity of the chemical reaction is extremely high. When the diffusion is sufficiently slow compared with the other stages of the reaction the velocity of the whole reaction will be determined by the rate of diffusion alone.

This theory was first proposed by NOYES and WHITNEY[2]) for some special cases, but its general applicability to various types of heterogeneous reactions was indicated by NERNST and BRUNNER[3]), and has since been accepted by several investigators as giving the best explanation of facts in heterogeneous systems.

On the other hand, the general applicability of the diffusion theory

[1]) Jour. chem. soc. 1917, **111**, 707; Annales de chimie, 1919.

[2]) Zeit. Phys. Chem. 1897, **23**, 689.

[3]) ibid. 1904 **47**, 52, 56.

was contested by ERICSON-AUREN and PALMAER [1]), TAMMANN [2]), MARC [3]), SENTER [4]), WILDERMANN [5]) etc.

Since, according to the diffusion theory, in chemical reactions which occur merely at the boundary between two phases, the phenomenon is essentially one of diffusion, it is useless to try and determine the order of reactions from the rate at which they proceed; this method of argument is only applicable, according to kinetic considerations to the probablity of collisions in homogeneous systems and loses its significance when applied to heterogeneous systems. Moreover, if the velocity is controlled by a diffusion process, one will get a coefficient of the velocity similar to that for a uni-molecular reaction and the coefficient will be independent of the actual order of the more rapid chemical reaction, which accompanies the process. Consequently it is impossible to establish a relation between the order of a reaction and its temperature coefficient in heterogeneous systems.

(*a*) *Temperature coefficients of uncatalysed reactions.*

Another consequence of the diffusion theory is that the temperature coefficient for an elevation of 10° should be of the order 1.3 i.e. of the same order of magnitude as the temperature coefficient of diffusion (compare OHÖLM [6])). We shall now see if experimental results confirm this inference from the diffusion theory. The following is the summary of results. (See table 1 next page).

These results support the diffusion theory of reaction velocity in heterogeneous medium. In this connection it is interesting to observe that elevation of temperature up to a certain limit is found to be without influence on the decomposition of some alcoholic compounds by sodium amalgam (LÖWENHERZ, Zeit. Phys. Chem. 1900, **32**, 480; 1902, **40**, 400) and on the velocity of dissolution of Casein in alkalies (ROBERTSON, Jour. Phys. chem. 1910, **14**, 377).

On the other hand, the following summary of results shows that the conclusion as to the effect of temperature, is not corroborated in these cases. (See table 2 next page).

It has already been pointed out that velocities of diffusion only determine the rate of reaction when no other processes interfere and specially when no slow processes, taking place in the homogen-

[1]) Zeit. Phys Chem. 1906, **56**, 689.
[2]) ibid. 1910, **69**, 257.
[3]) ibid. 1908, **61**, 385; 1909, **67**, 470.
[4]) Jour. Phys. Chem. 1905, **9**, 311.
[5]) Zeit. Phys. Chem. 1909, **66**, 445.
[6]) ibid. 1905, **50**, 309; 1910, **70**, 385.

TABLE 1.

Reaction.	Reference.	$\frac{k_{t+10}}{k_t}$
(1) $CaCO_3 + HCl$	SPRING (Zeit. Phys. Chem., 1887, **1**, 209)	1.5
(2) Metals + acids	VELEY (Journ. chem. soc. 1889, **55**, 361)	1.21
(3) "	ERICSON-AUREN(Zeit.anorg.Chem.1901,**27**,209)	1.1
(4) Solution of $CaSO_4 . 2 H_2O$ in water	BRUNER and TOLLOCZKO (Zeit. Phys. Chem. 1900, **35**, 283)	1.5
(5) Various reactions	BRUNNER (Zeit. Phys. Chem. 1904, **47**, 56)	1.3
(6) Evaporation of water	JABLCZYNSKI (Jour. chim. Phys. 1912, **10**, 241)	1.1
(7) Cu and NH_4OH	YAMASAKI (7th Inter. Cong. App. Chem. 1909, Sec. X, 172)	1.15
(8) O_2 and pyrogallates O_2 and haemaglobin CO and "	BOSELLI (J. Chim. Phys. 1911, **9**, 689; 1912, **10**, 1)	1.1
(9) Halogens and metals Chromic acid and metals Ferric salts and metals	VAN NAME and his associates (Amer. J. Science 1910 [4], 237; 1916 [4], **42**, 301; 1917 [4] **43**, 449)	1.28
(10) Quinol and O_2	EULER and BOLIN (Zeit. Physiol. Chem. 1908, **57**, 80)	1.2
(11) Dissolution of various salts in water	WAGNER (Zeit. Phys. Chem. 1910, **71**, 401)	about 1.2
(12) Dissolution of CO_2 and O_2 in water	CARLSON (Medd. K. Nobel Inst. bd **2**, N°. 5, 1910).	1.4
(13) Mg and HCl	BONSDORFF (ibid bd. **3**, N°. **8**, 1915)	1.44

TABLE 2.

Reaction.	Reference.	$\frac{k_{t+10}}{k_t}$
(1) Dissolution of benzoic acid in water	BRUNER and TOLLOCZKO (loc. cit.) WILDERMANN (loc. cit.)	1.8
(2) Ni and CO	MITTASCH (Zeit. Phys. Chem. 1902, **40**, 1)	1 53
(3) Development of photograpic plates	SHEPPARD and MEES (Proc. Roy. Soc. 1905, **76**, 217)	2.
(4) Precipitation of AgCl, AgBr etc.	JABLCZYNSKI (Zeit. Phys. Chem. 1913, **82**, 115)	2
(5) Slow oxidation of S	BODENSTEIN and KARO (ibid. 1911, **75**, 30)	1.87
(6) H_2 and $KMnO_4$ CO and $KMnO_4$	JUST and KAUKO (ibid. 1911, **76**, 601; 1913, **82**, 71)	2.
(7) Velocity of absorption reversal of (*a*) HgS (*b*) S	FREUNDLICH and associates (ibid. 1913, **85**, 660; 1915, **89**, 147)	(*a*) 4 (*b*) 5
(8) Ferrous salts and oxygen	MC. BAIN (Journ. Phys. Chem. 1901, **5**, 623) BOSELLI (loc. cit.)	2.2

eous phase is connected with the progress of the reaction. It seems probable, that in the examples of reactions cited in Table 2, the changes concerned are *real* chemical reactions rather than diffusion processes. For these reactions it would be interesting to find out a relation between their orders and their temperature coefficients, but unfortunately no experimental work in this direction is available.

(*b*) *Temperature coefficients of catalysed reactions.*

We shall now consider the temperature coefficients of reactions catalysed heterogeneously. The following is the summary of important reactions investigated up till now:

TABLE 3

Reaction.	Reference.	$\frac{k_{t+10}}{k_t}$
(1) Decomposition of H_2O_2 by catalase (blood)	SENTER, Zeit. Phys. Chem. 1903, **44**, 257	1.7
(2) Decomposition of H_2O_2 by colloidal Au, Pt, Ir etc.	BREDIG and his pupils, ibid 1899, **31**, 258, 320; 1901, **37**, 1, 323; 1901, 38, 122; 1909, **66**, 175	1.6
(3) Decomposition of H_2O_2 by colloidal Ag	MC. INTOSH, Jour. Phys. Chem. 1902, **6**, 15	5
(4) Decomposition of H_2O_2 by colloidal MnO_2	MARK. DISSERT. Heidelberg 1907	2
(5) Hydrogenation in presence of colloidal Pd	ZALKIND and PITCHTSCHIKOFF, J. Russ. Phys. Chem. Soc. 1914, **46**, 1527	1.75
(6) Oxydation of NaH_2PO_2 by colloidal Pd or Pd black	SIEVERTS and PETERS, Zeit. Phys. Chem. 1916, **91**, 199	2
(7) Reduction of methylene blue by H.COOH in presence of colloidal metals	BREDIG and SOMMER, ibid 1910, **70**, 34	2
(8) Decomposition of (*a*) H.COOH and (*b*) H.COONa in presence of colloidal Rh	BLACKADDER, ibid 1913, **81**, 385	(*a*) 2 (*b*) 2.5
(9) Oxydation of phenyl thiocarbamide in presence of blood charcoal	FREUNDLICH and BJERCKE, ibid 1916, **91**, 1	2.3
(10) Oxydation of oxalic acid in presence of blood charcoal	WARBURG, Pflüg. Arch. 1914, **155**, 547	2.1
(11) Enzyme actions	Generally higher than	2

The following table shows the summary of results obtained with catalysts in the solid state:

TABLE 4.

Reaction.	Reference.	$\frac{k_{t+10}}{k_t}$
(1) Decomposition of ozone	PERMAN and GREAVES (Proc. Roy. Soc. 1908, 80 A, 353)	about 1.2
(2) $SO_2 + O \rightarrow SO_3$	BODENSTEIN and his pupils (Zeit. Phys. Chem. 1903, 46, 725; 1905, 53, 166; 1907, 60, 1, 46; 1911, 75, 30; 1912, 80, 148; Zeit. Elektrochem. 1905, 11, 373; Festschrift W. NERNST, 1912, p. 99.	1.36
(3) $CO + O \rightarrow CO_2$		1.40
(4) $SO_3 \rightarrow SO_2 + O$		1.57
(5) $NH_3 \rightarrow N + 3H$		1.10
(6) $H_2 - O \rightarrow H_2O$		1.18
(7) Decomposition of H_2O_2	BREDIGAND TELETOFF (Zeit. Elektrochem 1906, 12, 581)	1.28
(8) $Cr^{\cdot\cdot} + H^{\cdot} \rightarrow Cr^{\cdot\cdot\cdot} + H$	JABLCZYNSKI (Zeit. Phys. Chem. 1908, 64, 748)	1.29
(9) $Ti^{\cdot\cdot\cdot} + H^{\cdot} \rightarrow Ti^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + H$	DENHAM (ibid 1910, 72, 641)	1.29

It will be seen at once on glancing at the two foregoing tables that in the reactions catalysed by solids (with the exception of blood charcoal) the temperature coefficient is about 1.3 i.e. of the same order as that for diffusion; whilst in the case of reactions catalysed by colloidal metals and enzymes the temperature coefficient is about 2 i.e. of the same order as that of an ordinary chemical reaction in homogeneous medium. How is this difference to be explained? With catalysts, which cause reaction between the substances in question to take place with practically infinite velocity, the actual rate of reaction will be determined solely by the velocity with which the reacting substances diffuse to the surface of the catalyst; whether such a catalyst exists, must of course be determined separately for every case.

Adsorption is now considered to be an exceedingly rapid process. If the reacting substances were brought to the surface of the catalyst by capillary forces, the temperature coefficient would correspond to that of the slower process, namely, the chemical change involved. If, on the other hand, the reacting substances are brought to the surface by the slow process of diffusion, then the measured velocity would be that of a diffusion process and the temperature coefficient would be of the order of 1.3, which we have seen in the case when solid catalysts are used. To account for the high temperature coefficient in the case of reactions catalysed by colloidal substances and enzymes, one might suppose that the Brownian movement of these particles acted as very efficient stirring in such a way that the diffusion layer was removed as fast as it was formed, with the

result that the homogeneous chemical reaction in the adsorbed layer is the real process of which we determine the temperature coefficient.

Now it is interesting to observe that BREDIG and TELETOFF (Zeit. Elektrochem. 1906, **12**, 583) have calculated the thickness of the diffusion layer from the NERNST diffusion expression (Zeit. Phys. Chem. 1888, **2**, 634), utilising the data obtained from the decomposition of hydrogen peroxide in presence of colloidal platinum and found the thickness to be 0.05 mm. i.e. of the same order as BRUNNER found in the case of the dissolution of benzoic acid in water. This seems to show that in spite of the Brownian movement the diffusion layer remains unchanged. If this is true, the above explanation of the high temperature coefficient in the case of colloids and enzymes breaks down. Moreover, on this point of view, the high values of the temperature coefficient obtained in the oxidations of oxalic acid and phenylthiocarbamide in presence of the solid catalyst blood-charcoal, remain entirely unexplained.

Looking at the whole problem, it seems probable that in some cases the slow chemical change affects the velocity of the total reaction, whilst in other cases, diffusion plays the most important role and it is desirable to investigate fully the kinetics of each individual case.

Certainly much light would be thrown on the whole question if we can study the kinetics and temperature coefficients of one and the same reaction without any catalyst and in presence of both homogeneous and heterogeneous catalysts. The velocity of decomposition of hydrogen peroxide, for example, may be investigated at various temperatures (1) without any catalyst and (2) in presence of iodides or any other substance soluble in water (compare BREDIG and WALTON. Zeit. Phys. Chem. 1904, **47**, 185) and (3) in presence of colloidal metals, MnO_2, charcoal, solid metals etc.

Laboratoire de Chimie Minérale, Sorbonne, Paris.
Imperial College of Science. London S. W. 7.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt een mededeeling aan van de Heeren L. S. ORNSTEIN en H. C. BURGER: „*Statistiek van getallenreeksen*".

(Mede aangeboden door den Heer W. H. JULIUS).

Bij de studie van natuurverschijnselen ontmoet men vaak reeksen van geheele getallen die door het toeval bepaald zijn. Wanneer men bijv. het aantal emulsie deeltjes, dat zich op aequidistante tijdstippen in een bepaald volume element van een emulsie bevindt, telt, verkrijgt men eene door het toeval bepaalde reeks van getallen. SMOLUCHOWSKI[1]) heeft de toevalswetten, waaraan deze getallenreeks voldoet, onderzocht en in verband gebracht met de grootheden, die de BROWN'sche beweging bepalen. Zijne resultaten zijn zonder kritiek toegepast[2]) op de statistiek van andere reeksen van getallen. Wij willen in deze mededeeling eenige algemeene stellingen over de statistiek der getallenreeksen af leiden; tevens zullen wij doen zien dat de uitkomsten van SMOLUCHOWSKI slechts in bijzondere gevallen gelden.

1. Wij beschouwen een reeks geheele positieve getallen n_1 $n_2 \dots$ die door het toeval bepaald zijn. De kans op de getallen kan onderling afhankelijk zijn zoo dat bijv. het feit dat gegeven is dat n_2 een zekere waarde bezit, invloed heeft op de kans op een waarde van n_3, d. w. z. er kan correlatie bestaan, zoo zelfs dat de invloed van een gegeven waarde voor n_1 zich over een grooten afstand in de reeks direct of indirect kan doen gevoelen. Met andere woorden de reeks kan een zich ver uitstrekkende directe of indirecte correlatie vertoonen.

Wij kiezen nu een groot aantal k achtereenvolgende getallen uit de reeks en maken de frequentie wet voor de getallen op. Laat $w(n)$ de kans op een getal n voorstellen; zoodat dus $\Sigma\, w(n) = 1$, waarbij over alle voorkomende waarden van n gesommeerd moet worden. Wij onderstellen nu dat er een eindig doch zeer groot getal k te kiezen is zoodanig dat, wanneer men de frequentie wet voor

[1]) Vergel. bijv. het samenvattende artikel in Phys. Zeitschr. XV. 1916, p. 557.

[2]) A. PODJED. Diffusion und Statistik Phys. Zeitschr. XVII. 1918, p. 39.

E. SCHRÖDINGER. Notiz ueber die Ordnung in Zufallsreihen ibid p 218.

R. FÜRTH. Statistik und Wahrscheinlichkeitsnachwirkung ibid. p. 421.

$k+1$ achtereenvolgende getallen uit de reeks opmaakt de waarden van $w(n)$ voor beide gevallen minder verschillen dan een willekeurig gekozen klein getal ε. Indien wij met een eindige reeks te doen hebben zullen wij onderstellen dat het aantal termen groot is ten opzichte van het aantal termen noodig bij de bepaling der frequentie wet.

Wij zullen een reeks homogeen noemen wat betreft de frequentie wet, wanneer overal in de reeks dezelfde frequentie wet geldt.

Is een reeks homogeen wat betreft de frequentie wet dan is zij ook homogeen wat betreft de gemiddelde waarde van willekeurig hooge machten der termen. Omgekeerd zal de reeks homogeen zijn, wat de frequentie wet betreft als zij het is voor gemiddelden van willekeurig hooge machten van de termen.

Een voorbeeld van een homogeene reeks levert bijv. de getallenreeks van THE SVEDBERG, die door SMOLUCHOWSKI bewerkt is; een niet homogene reeks ontmoet men bij het bekende stappen beeld der BROWN'sche beweging. Wij zullen ons in het volgende uitsluitend met homogeene reeksen bezig houden.

2. Voor de studie der getallenreeksen is een tweede grootheid even belangrijk als de frequentie wet der termen. Deze grootheid is door SMOLUCHOWSKI ingevoerd. Zij is de juiste maat voor de statistische afhankelijkheid van de termen van de reeks.

Laat ons in de reeks alle getallen uitzoeken die een bepaalde waarde n_1 bezitten en de kans vragen dat wij p termen verder, dat is na p intervallen, een getal n_2 ontmoeten. Wij zullen de frequentie functie door $W(n_1, n_2\, p)$ voorstellen. Men moet bedenken dat W geen eigenlijke functie, doch een dubbel oneindige reeks getallen is (bij gegeven p).[1] De kans $W(n_1, n_2\, p)$ voldoet aan de betrekking

$$\sum_{n_2} W(n_1, n_2, p) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarbij de som naar n_2 over alle mogelijke waarden moet worden uitgestrekt. Als n_2 tot oneindig kan loopen moet W aan de eischen der convergentie voldoen. Opgemerkt moet nog worden dat aan p ook verschillende waarden kunnen worden toegekend.

Wij zullen nu onderstellen dat de reeks homogeen is, ten opzichte van de functie $W(n_1, n_2, p)$.

Behalve $W(n_1, n_2, p)$ zijn er nog andere voor de statistiek der getallenreeksen belangrijke grootheden, n.l. $W(n_1, n_2, \ldots n_k, p_1, p_2, \ldots p_k)$

[1]) Wanneer n_1 en n_2 van nul tot oneindig, en n^2 getallen als n_1 en n_2 beide van nul tot n loopen kunnen.

d.w.z. de kans dat wanneer $n_1, n_2 \ldots n_{k-1}$ met intervallen $p_1 \ldots p_{k-1}$ gegeven zijn, op een interval p_k na n_{k-1} een waarde n_k volgt. Uit deze grootheid leidt men grootheden met minder veranderlijken op soortgelijke wijze af als hieronder $W(n)$ uit $W(n_1, n_2, p)$ afgeleid wordt. Wij zullen ons in deze mededeeling tot de beschouwing van de grootheden $W(n)$ en $W(n_1, n_2, p)$ bepalen.

Tusschen de genoemde frequentiefuncties bestaat een eenvoudig verband. Men heeft n.l.

$$W(n_2) = \sum_{n_1} W(n_1)\, W(n_1, n_2, p) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

waarbij n_1 alle mogelijke waarden doorloopt. Men ziet dit onmiddellijk in als men bedenkt dat $W(n_1)$ de kans op een waarde n_1 is en $W(n_1, n_2, p)$ de kans dat deze gegeven waarde n_1 door de waarde n_2 gevolgd wordt, terwijl n_2, p intervallen te voren door één der mogelijke waarden moet zijn vooraf gegaan en wel met de door $W(n_1)$ gegeven kans.

De vergelijking (2) geldt voor alle mogelijke waarden van n_2, zijn er dus n waarden dan zijn er n vergelijkingen (2). Deze zijn echter afhankelijk daar de determinant der coëfficienten volgens (1) nul is.

Bedenkt men echter verder dat $\sum_{n_2} W(n_2) = 1$, dan ziet men dat $W(n)$ bepaald is, wanneer men $W(n_1, n_2, p)$ kent. De oplossing luidt als volgt. Zij Δ de determinant

$$\begin{vmatrix} W(0\,.\,0\,.\,p) - 1 & W(1\,.\,0\,.\,p) \ldots\ldots & W(n\,.\,0\,.\,p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ W(0\,.\,n\,.\,p) & W(1\,.\,n\,.\,p) & W(n\,.\,n\,.\,p) - 1 \end{vmatrix}$$

en stellen wij op de gebruikelijke wijze de onder-determinanten van de termen der eerste rij door $\Delta_{00}, \Delta_{01} \ldots \Delta_{n0}$ voor dan is:

$$\frac{W(0)}{\Delta_{00}} = \frac{W(1)}{\Delta_{10}} = \ldots \frac{W(n)}{\Delta_{n0}} = \frac{1}{\sum_0^n \Delta_{\nu 0}},$$

waarbij bedacht moet worden dat $\sum W(n) = 1$ is.

Wanneer wij nu de $W(n_1, n_2, p)$ voor het interval p' beschouwen is hieruit weder op dezelfde wijze $W(n)$ af te leiden. Dientengevolge bestaan er betrekkingen tusschen de functie $W(n_1, n_2, p)$ voor twee intervallen. Deze luiden, wanneer wij de grootheden die op het tweede interval betrekking hebben door accenten aanduiden:

$$\frac{\Delta_{00}}{\Delta'_{00}} = \frac{\Delta_{10}}{\Delta'_{10}} = \ldots \frac{\Delta_{n0}}{\Delta'_{n0}}.$$

Tusschen de n^2 getallen, die de W voor het tweede interval

bepalen en de gegeven n^2 getallen van de W van het eerste interval bestaan dus $n-1$ betrekkingen. Deze beperken de W naast de voorwaarden, die reeds door (1) worden opgeleverd.

In een bijzonder geval is het mogelijk een vergelijking aan te geven die in staat stelt $W(n_1, n_3, p)$ te berekenen uit $W(n_1, n_2, p')$ en $W(n_2, n_3, p'')$ indien $p = p' + p''$. Dit zal namelijk het geval zijn indien de kans dat n_3 op n_2 volgt na een interval p'' niet afhangt van het feit dat n_2 een interval p' te voren door een waarde n_1 is vooraf gegaan. In dit geval geldt gelijk men onmiddellijk inziet de betrekking:

$$W(n_1, n_3\, p) = \sum_{n_2} W(n_1, n_2\, p')\, W(n_2, n_3\, p'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

waarbij naar alle mogelijke waarden van n_2 te sommeeren is. Indien men $W(n_1, n_2')$ kent is in dit geval $W(n_1, n_2, p)$ te berekenen.

Voor het door SMOLUCHOWSKI behandelde geval der emulsies geldt deze vergelijking, gelijk wij hieronder nader zullen zien, niet.

3. Bij de toepassing van de statistiek van reeksen van getallen op physische verschijnselen doet zich de belangrijke vraag naar de omkeerbaarheid voor. P. en T. EHRENFEST [1]) zijn de eersten geweest, die op de omkeerbaarheid eener door het toeval bepaalde getallen reeks hebben gewezen in hun belangrijke beschouwingen over het H theorema van BOLTZMANN. SMOLUCHOWSKI heeft de omkeerbaarheid aangetoond van de getallenreeks die door intermitteerende waarneming van het aantal emulsiedeeltjes dat in een bepaald volume ligt ontstaat.

Wij zullen nu algemeener voor een getallenreeks de kenmerken van de omkeerbaarheid onderzoeken. Een reeks is omkeerbaar, wanneer hare eigenschappen bij het doorloopen in één richting dezelfde zijn als bij het doorloopen in de tegengestelde richting. Dit legt aan $W(n_1, n_2\, p)$ een voorwaarde op. Definieeren wij $W(n_1, n_2, -p)$ als de kans dat een gegeven getal n_1 p intervallen te voren door een getal n_2 is voorafgegaan dan is de reeks omkeerbaar als: [2])

$$W(n_1, n_2, p) = W(n_1, n_2, -p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Wij kunnen nu in de voorwaarde (7) een kenmerk voor omkeerbaarheid afleiden dat slechts grootheden die op het interval p in één richting betrekking hebben, bevat.

---

[1]) P. en T. EHRENFEST. Ueber zwei bekannte Einwände gegen das BOLTZMANN'sche H theorem. Phys. Zeitschr. 6. 1907, p. 311. Verg. ook Enzyclop. der Math. wiss. Bd. IV en II. Heft 6, p. 42.

[2]) De beschouwde reeks is omkeerbaar voor het beschouwde interval p, men kan de vraag overwegen of een reeks voor andere intervallen niet omkeerbaar is.

Volgens de stelling der waarschijnlijkheid a posteriori heeft men n.l. steeds

$$W(n_1, n_2, -p) = \frac{W(n_2)\ W(n_2, n_1, p)}{\sum\limits_{n_2} W(n_2)\ W(n_2, n_1, p)},$$

waarbij de som naar n_2 over alle mogelijke waarden van n moet worden uitgestrekt. De noemer is volgens (2) gelijk aan $W(n_1)$ zoodat wij hebben

$$W(n_1)\ W(n_1, n_2 - p) = W(n_2)\ W(n_2, n_1, p) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Is de reeks dus omkeerbaar dan geldt volgens (3)

$$W(n_1)\ W(n_1, n_2, p) = W(n_2)\ W(n_2, n_1, p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

een betrekking, die SMOLUCHOWSKI gebruikt in den vorm $H(m . n) = H(n . m)$ en waarmede hij het getallen-materiaal van THE SVEDBERG getoetst heeft. Geldt omgekeerd de betrekking (6) dan geldt dus volgens (5) ook de betrekking (4) en is dus de reeks omkeerbaar.

Bedenkt men nu verder dat $W(n)$ in $W(n_1, n_2, p)$ kan worden uitgedrukt, dan blijkt de voorwaarde (6) een voorwaarde aan $W(n_1, n_2, p)$ opgelegd, te zijn. Stellen wij $W(n_1, n_2, p)$ verder door de twee indices voor, dan krijgen wij als wij $n_1 = 0$, $n_2 = 1, 2 \ldots n$ nemen de voorwaarden.

$$\begin{vmatrix} 01 & -01 & 0 \ldots . & 0 \\ 00-1 & 01 & 02 \ldots . & 0n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n0 & n1 & n2 \ldots . & nn-1 \end{vmatrix} = \ldots = \begin{vmatrix} 0n & 0 & 0 \ldots . & -0n \\ 00-1 & 01 & 02 \ldots . & 0n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n0 & n1 & n2 \ldots . & nn-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Door het eerste getal van nul tot n te laten loopen krijgt men op deze wijze $\frac{n . n-1}{1 . 2}$ betrekkingen waaraan $W(n_1, n_2 p)$ moet voldoen. Tusschen de beschouwde determinanten bestaat echter de betrekking dat hun som nul is, hetgeen men gemakkelijk ziet als men de betrekking $\Sigma W(n_1 n_2 p) = 1$ in aanmerking neemt; op deze wijze krijgt men n betrekkingen tusschen de voorwaarden. Er blijven dus $\frac{n . n+1}{1 . 2}$ van de getallen W vrij ter beschikking, indien men een omkeerbare reeks wil construeeren [1]) [2]) [3]).

---

[1]) Hierbij moet men bedenken dat de $W(n_1 n_2 p) < 1$ moet zijn, daar deze grootheid een kans voorstelt.

[2]) Wanneer wij een reeks hebben die uit twee getallen a en b bestaat is aan de voorwaarden voor de omkeerbaarheid steeds voldaan. Zij toch $W(a . b) = \alpha$, $W(a . a) = 1 - \alpha$, $W(b . a) = \beta$, $W(b . b) = 1 - \beta$, dan is $W(a) \alpha + W(b)(1 - \beta) = W(b)$ of $W(a . b)\ W(a) = W(b . a)\ W(b)$ terwijl $W(a) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$, $W(b) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

[3]) Wanneer de vergelijking (3) geldt voor een richting, geldt zij ook voor de

4. Wij zullen thans eenige toepassingen van het hierboven besprokene behandelen.

Het succes van de beschouwingen van SMOLUCHOWSKI heeft verschillende schrijvers (vergelijk § 1) er toe gebracht een formule, die bij hem voorkomt als het kenmerk voor statistische afhankelijkheid in getallenreeksen te beschouwen. Deze betrekking luidt:

$$\overline{\Delta}_n = (v - n) P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7$$

Hierin is $\overline{\Delta}_n$, het verschil van een bepaald getal n uit de reeks met het getal dat er op volgt, gemiddeld voor alle mogelijke waarden van dit verschil, P een constante onafhankelijk van n, die bij SMOLUCHOWSKI de beteekenis van een kans heeft, en v de gemiddelde waarde van de getallen van de reeks.

Het is nu niet moeielijk een voorbeeld van een getallenreeks te construeeren, waarin statistische afhankelijkheid van de termen van de reeks bestaat, dat wil zeggen de functie $W(n_1, n_2, 1)$ is aan te geven, terwijl aan de betrekking (6) niet is voldaan. Wij hebben deze reeks geconstrueerd door uit te gaan van een reeks bestaande uit de getallen 0 en 1, elk dezer getallen heeft de kans $^1/_2$ en er bestaat geen verband tusschen opvolgende getallen. Laat de reeks nu zijn $u_1\ u_2\ u_3 \ldots$, dan beschouwen wij de reeks $2u_1 + u_2$, $2u_2 + u_3, \ldots$ $2u_n + u_n + 1$, dat wil zeggen een reeks bestaande uit de getallen 0, 1, 2 en 3. Men krijgt gelijk men door een eenvoudige berekening kan aantoonen de volgende waarden voor $W(n_1, n_2, 1)$ [1]).

W	0	1	2	3
0	$^1/_2$	$^1/_2$	0	0
1	0	0	$^1/_2$	$^1/_2$
2	$^1/_2$	$^1/_2$	0	0
3	0	0	$^1/_2$	$^1/_2$

In de kolom is n_1 in de rij n_2 aangegeven.

Past men nu de gevonden W toe om de betrekking (6) te toetsen, dan blijkt dat voor 0, 1 2 3 en 4 de P verschillend is nl. $^1/_3$, 3, 3 en $^1/_3$, zoodat wij dus inderdaad een voorbeeld hebben van statistische afhankelijkheid waar de P betrekking van SMOLUKHOWSKI niet geldt. Uit de wijze waarop de reeks is opgebouwd volgt dat zij niet

andere richting en hetzelfde interval. Wanneer een reeks omkeerbaar is voor een interval p en tevens de vergelijking (3) geldt, is de reeks omkeerbaar voor een interval np (n een geheel getal).

[1]) Men heeft hierbij $W(0) = W(1) = W(2) = W(3) = \frac{1}{4}$, $\nu = \frac{3}{2}$.

omkeerbaar is, het blijkt ook dat $H(m.n) = H(n.m)$. Men heeft opgemerkt, dat het feit dat de betrekking van SMOLUCHOWSKI geldt met $P = 1$ op statistische onafhankelijkheid van de termen van de reeks wijst. Nu geldt wel is waar voor een reeks van statistisch onafhankelijke getallen $P = 1$, doch het omgekeerde is niet het geval. Wij geven hieronder een eenvoudig voorbeeld dat dit doet zien voor een reeks uit de getallen 1, 2 en 3 opgebouwd. De eerste tabel geeft de getallen $W(n_1, n_2, 1)$, de tweede tabel $W(n_1, n_2, -1)$ berekend met behulp van (4). In de eene richting is $P = 1$ in de andere richting is $P = 1$, het feit dat de $W(n_1\, n_2\, p)$ niet identiek met $W(n_2)$ is, is al weder voldoende om de statistische afhankelijkheid te doen blijken.

W	1	2	3
1	$^3/_{10}$	$^3/_5$	$^1/_{10}$
2	$^2/_5$	$^2/_5$	$^1/_5$
3	$^3/_5$	0	$^2/_5$

$$P = 1$$

$$W(1) = {}^2/_5 \quad W(2) = {}^2/_5 \quad W(3) = {}^1/_5$$

$$r = \frac{9}{5}$$

W	1	2	3
1	$^3/_{10}$	$^2/_5$	$^3/_{10}$
2	$^3/_5$	$^2/_5$	0
3	$^1/_5$	$^2/_5$	$^2/_5$

Men kan door geschikte keuze der getallen $W(n_1, n_2\, p)$ in een reeks waarin n_1 en n_2 een voldoende aantal waarden kunnen aannemen, allerlei mogelijkheden verwezenlijken, omtrent omkeerbaarheid en geldigheid van (6) in één of twee richtingen.

5. Wij willen thans een vraagstuk behandelen, dat groote overeenkomst vertoont met het vraagstuk der emulsies dat door SMOLUCHOWSKI behandeld is.

Laat het aantal deeltjes, dat zich in een element bevindt n zijn, de kans dat in een interval een deeltje het element verlaat zij P, de kans dat er l deeltjes bij komen zij $f(l)$, deze kans zij onafhankelijk van n. Wij eischen nu dat het aantal deeltjes in het element gemiddeld constant is. Dit legt een voorwaarde aan $f(l)$ op.

De kans toch dat k deeltjes het element verlaten is

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} P^k (1-P)^{n-k}.$$

Het gemiddelde aantal deeltjes dat het element verlaat, is dus nP. Het gemiddelde aantal deeltjes bij alle mogelijke waarden van n dus rP, wanneer r de gemiddelde waarde van n is. Moet nu het aantal deeltjes gemiddeld constant zijn, dan moet het aantal deeltjes dat gemiddeld in het element komt $\Sigma\, l\, f(l) = \overline{l}$ gelijk aan rP zijn.

Hieruit volgt onmiddellijk dat voor ons geval de betrekking (7) geldt, immers $\overline{\Delta_n} = (\overline{n - k + l}) - n = \overline{l} - \overline{k} = P(\nu - n)$. [1])

Toch is het beschouwde probleem geenszins identiek met het vraagstuk van SMOLUCHOWSKI. Vragen wij toch naar het quadratisch gemiddelde van Δ_n dan is dat $\overline{l^2} - \alpha n \nu P^2 + n^2 P^2 + n P - n P^2$. Dit stemt slechts met $\overline{\Delta^2_n}$ bij SMOLUCHOWSKI overeen, wanneer $\overline{l^2}$ aan een bepaalde voorwaarde voldoet. Wij kunnen $f(l)$ steeds deze voorwaarde opleggen, en zelfs kunnen wij $f(l)$ steeds zoo kiezen dat $\overline{\Delta^p_n}$ bij ons probleem voor willekeurige p met $\overline{\Delta^p_n}$ bij het probleem van SMOLUCHOWSKI overeenstemt. Desondanks blijft er nog een essentieel verschil tusschen het beschouwde probleem en dat van de theorie der emulsies.

Dit verschil komt te voorschijn als men meerdere intervallen beschouwd. Heeft men in ons geval een getal n_2 uit een getal n_1 verkregen, dan kan men zonder meer het proces herhalen, zoo dat in ons geval $W(n, m, p)$ voor meerdere intervallen aan de som vergelijking (3) moet voldoen. Beschouwen wij de intervallen p_1, p_2, p_3 zoodat $p_1 + p_2 = p_3$ dan hebben wij dus

$$W(n_1, n_3, p_3) = \sum_{n_2}' W(n_1, n_2, p_1) \; W(n_2, n_3, p_2)$$

Laat nu de kans dat een deeltje in de verschillende intervallen het element verlaat P_1, P_2 en P_3 zijn dan hebben wij voor het interval p_3

$$\overline{\Delta_n} = \sum_{\xi} (\xi - n) \; W(n, \xi, p_3) = \sum_{\xi} (\xi - n) \sum_{\eta} W(n, \eta, p_1) \; W(\eta, \xi, p_2) =$$

$$= \sum_{\eta} W(n, \eta, p_1) \sum_{\xi} (\xi - n) \; W(\eta, \xi, p_2) =$$

$$\sum_{\eta} W(n, \eta, p_1)(\eta - P_2(\eta - \nu) - n) = - P_3(n - \nu)$$

of dus

$$n - n P_2 - P_1(1 - P_2)(n - \nu) + P_2 \nu = - P_3(n - \nu)$$

$$P_3 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$$

waaruit volgt $1 - P_3 = (1 - P)^3$, als P_3 de P voor drie intervallen en P die voor een interval is, voor k intervallen geldt algemeen $1 - P_k = (1 - P)^k$. Deze betrekking is onmiddellijk evident als men bedenkt dat $1 - P_k$ de kans is, dat een op het eerste moment aanwezig deeltje na k intervallen het element niet verlaten heeft.

De wijze waarop P voor het geval van een emulsie van het interval afhangt is nu geheel anders. Dit is een gevolg van het feit dat wanneer P de kans is dat een deeltje op een tijd 0 aanwezig

[1]) De bedoeling is dat bij gegeven n gemiddeld wordt.

na een tijd τ uit het element verdwenen is, niet geldt dat een deeltje dat op nul en τ aanwezig is, een kans P heeft tusschen τ en 2τ het element te verlaten. De kans P toch wordt door SMOLUCHOWSKI gedefinieerd onafhankelijk van de ligging van het deeltje in het element en daarbij wordt aan de ligging in alle punten dezelfde waarschijnlijkheid toegekend. Wanneer men nu weet dat het deeltje een interval τ te voren ook reeds in het element lag is de waarschijnlijkheid voor alle plaatsen in het element niet meer even groot, en dit moet bij de bepaling van de kans voor het tweede interval in aanmerking genomen worden. Terwijl in ons geval het feit dat n_2 door n_1 is voorafgegaan geen invloed heeft op de kans dat n_3 op n_2 zal volgen is dit bij het probleem der emulsies wel het geval. Daar zal toch een correlatie bestaan die zich veel verder uitstrekt, wanneer bijv. n_1 gevolgd wordt door n_2 zoodat $n_1 > n_2$ is, zal de kans dat $n_3 > n_2$ is grooter zijn dan de kans dat $n_3 < n_2$, mits het interval tusschen de waarneming kort genoeg is opdat $P < 1$ is voor één interval. Bij het probleem van de emulsies spelen dan ook de $W\ (n_1\, n_2 \,.\,.\, p_1\, p_2 \,.\,.)$ een rol.

Voor een interval echter stemmen de problemen volkomen overeen [1]).

SMOLUCHOWSKI heeft de omkeerbaarheid van de diffusie der emulsiedeeltjes onderzocht. Het is mogelijk de omkeerbaarheid van zijn vraagstuk (en ook van ons voorbeeld) direct aan te toonen. Daartoe is slechts noodig aan te toonen dat $\psi\,(n_1\, n_2\, 1)$ en $\psi\,(n_1, n_2, -1)$ gelijk zijn. En dit is aangetoond, wanneer men doet zien dat het proces waaruit n_2 uit n_1 ontstaat na één interval tot hetzelfde kansprobleem voert, als het proces waarbij n_2 aan n_1 voorafging. Wij hebben daartoe slechts aan te toonen, dat de kans voor een deeltje dat op den tijd nul in ons volume-element ligt, om op den tijd $-\tau$ buiten het volume gelegen te hebben gelijk is aan de kans voor een deeltje, dat op den tijd nul in het interval ligt op den tijd τ er buiten te zijn. Deze laatste kans is P genoemd. Beschouwen wij een groot volume V; en laat v een klein deel hiervan zijn waarin het deeltje liggen kan bij de waarnemingen. Wanneer gegeven is dat het deeltje buiten v ligt is de kans dat het na één interval in v is $\frac{v}{V-v}P$, de kans dat het buiten v ligt is $\frac{V-v}{V}$, volgens de bekende stelling van de waarschijnlijkheid à posteriori is dus de kans, dat een deeltje dat op den tijd nul in v ligt er op den tijd $-\tau$ buiten heeft gelegen:

---

1) Zoo geldt het op blz. 1151 gegeven bewijs van de vergelijking (7) ook voor het geval van SMOLUCHOWSKI.

$$\frac{\frac{V-v}{V}\,\frac{v}{V-v}\,P}{\frac{V-v}{V}\,\frac{v}{V-v}\,P+(1-P)\,\frac{v}{V}}=P$$

en dit is inderdaad gelijk aan P.

Hiermede is dus de omkeerbaarheid aangetoond. De gebruikte formules kunnen gebruikt worden om een zeer eenvoudige betrekking te bewijzen, die bij SMOLUCHOWSKI voorkomt, doch die bij hem als resultaat van een betrekkelijk ingewikkelde berekening te voorschijn komt. SMOLUCHOWSKI heeft aangetoond dat de kans dat het element n deeltjes bevat gegeven is door

$$W(n)=\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!};$$

Terwijl de kans dat het aantal deeltjes in het element van 0 op n komt gegeven is door:

$$W(0,n,1)=\frac{(\nu P)^n\, e^{-\nu P}}{n!}\ ^{1})$$

Deze formules ontstaan uit elkaar door ν door νP te vervangen. Dit is een gevolg van het feit dat volkomen gelijke kansproblemen kunnen dienst doen ze te bepalen. Terwijl de kans dat een deeltje in het element ligt $\frac{v}{V}$ is, is de kans dat een deeltje dat buiten het element ligt er in komt $\frac{v}{V-v}P$. Is gegeven dat op den tijd 0 geen deeltjes in het element liggen, dan liggen dus alle er buiten. Zijn er dus N deeltjes, in het geheele volume dan is $W(n)$ de kans dat van deze N deeltjes n in het element liggen als voor elk deeltje de kans $\frac{v}{V}$ is, terwijl het tweede probleem er op neer komt te bepalen hoeveel deeltjes er in het element komen als de kans voor elk deeltje $P\frac{v}{V-v}$ dat is P maal zoo groot is. Bedenkt men nu dat het gemiddelde aantal dat er in ligt $\nu=\frac{v}{V}N$ is, dan ziet men onmiddellijk in dat voor groote waarde van N het verband tusschen de formules voor $W(n)$ en $W(0,n)$ moet bestaan [2]).

---

[1]) Het spreekt van zelf dat $W(0b1)=f(b)$ is.

[2]) Wij kunnen voor het door ons behandelde geval en daarmede voor het probleem van SMOLUCHOWSKI voor zoover het betreft één interval enkele relaties afleiden. Zoo heeft men $W(0,0)=f(0)$, $W(1,0)=Pf(0)$, ... $W(k,0)=P^k f(0)$.

R. FÜRTH heeft de beschouwingen van SMOLUCHOWSKI toegepast op een getallenreeks, die op de volgende wijze verkregen werd. Om de 5 secunden werd het aantal voorbijgangers dat zich op het trottoir voor een huis bevond geteld. De betrekkingen komen goed uit. Opgemerkt moet nu worden, dat zijn geval geheel analoog aan het geval van SMOLUCHOWSKI is. Men kan nl. de kans definieeren, dat een voetganger die zich op den tijd nul in het beschouwde interval bevindt er na een tijd τ uit verdwenen is. Zij de snelheid van een voetganger v, dan zal elke voetganger uit de beschouwde lengte van het trottoir verdwijnen die zich binnen de lengte $v\tau$ van de eindpunten bevindt en wiens beweging naar het eindpunt gericht is. Is de lengte van het beschouwde stuk l, dan is dus de kans P gegeven door

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,v\tau}{l} = \frac{v\tau}{l}.$$

Kent men dus behalve τ v of l en berekent men P uit de getallenrij dan kan men l of v vinden. Voor P was door FÜRTH gevonden 0.316, τ is 5 sec. wij namen voor v 5 Km. per uur en vonden voor l dus 19 M., op ons verzoek deelde de Heer FÜHTH ons mede dat de breedte 24 M. bedraagt. Met deze breedte stemt een snelheid van 5.5 Km. per uur overeen[1]).

Gebruikt men de waarden voor W, die SMOLUCHOWSKI uit de proeven van THE SWEDBERG heeft afgeleid (Studien ueber Molekularstatistik von Emulsionen und deren Zusammenhang mit der BROWN'schen Bewegung Akad. Wien 1915, p. 2401), 0.325, 0.236, 0.171, 0.124, 0.090, 0.065 dan vindt men voor P de waarden 0.726, 0.724, 0.726, 0.725, 0.722, terwijl door SMOLUCHOWSKI uit de betrekking $\overline{\Delta^2} = 2\,vP$, 0.726 werd afgeleid. De goede overeenstemming der P waarden onderling en met die van S. is een duidelijk bewijs voor de juistheid van de theorie.

Voor $W(n\,.\,m)$ heeft men

$$W(n\,.\,m) = \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{(n-s)!\,s!}(1-P)^s P^{n-s} f(m+s-n) \quad \text{voor } n < m$$

$$= \sum_{n-m}^{n} \frac{n!}{(n-s)!\,s!}(1-P)^s P^{n-s} f(m+s-n) \quad \text{voor } n > m.$$

Past men elementaire relaties tusschen de coefficienten van het binomium toe dan vindt men hieruit een recurrente betrekking voor W n.l.:

$$W(m,n) = P\,W(m-1,n) + (1-P)\,W(m-1,n-1).$$

Deze relatie komt ook in de verhandeling van SMOLUCHOWSKI voor. Zij is uitstekend geschikt voor de bepaling van P uit de proeven. (De toepassing voor 11, 12, 13 en 14 geeft bijv. $P = 0.702$, 0.725, 0.729, 0.727).

[1]) De waarneming van FÜRTH geeft een goed voorbeeld hoe uit een statistiek, omtrent de oorzaken van de toevallige grootheid iets is af te leiden.

In het eenvoudige geval van Fürth kan men de betrekking waaraan P voor meer intervallen voldoet, gemakkelijk afleiden; is P voor den tijd $\tau = P$, dan is voor den tijd k $P_k = k\,P_1$, deze relatie geldt zoolang $\frac{v\tau k}{l} < 1$ is, voor grooter waarden van k is dan verder $P = 1$.

Wij hebben de relatie $P_k = kP_1$ aan het getallenmateriaal van Fürth getoetst, zij bleek zeer slecht uit te komen. Wij schrijven dit toe aan het feit dat er langs de lengte van de straat een correlatie tusschen de verdeeling der voetgangers bestaat, terwijl de beschouwingen van Fürth slechts juist zijn zoo deze correlatie niet aanwezig is [1]).

6. Ten slotte willen wij nog een getallenrij beschouwen, die in de afleiding van de stralingswet een rol speelt [2]). Een resonator bevindt zich in een stralingsveld, de energie neemt lineair met den tijd toe, zoodat in den tijd τ de toename $\varepsilon = h\nu$ bedraagt, telkens als de energie $k\varepsilon$ bereikt wordt is er een kans η, alle energie te emitteeren. De waarden van de energie uitgedrukt in ε als eenheid telkens nadat een emissie kan hebben plaats gehad, vormen een reeks van geheele getallen. Het is onmiddellijk duidelijk dat deze reeks niet-omkeerbaar is. Wij zullen de functie W beschouwen. Voor een interval heeft men

$$W(n, 0, 1) = \eta \quad , \quad W(n, n+1, 1) = 1 - \eta$$

terwijl alle andere combinaties nul zijn.

Hieruit is nu $W(n)$ te berekenen, men heeft toch $\Sigma\, W(n) = 1$, $\Sigma\, W(\zeta)\, W(\zeta, n, 1) = W(n)$, waaruit volgt

$$W(n) = \eta\,(1 - \eta)^n$$

en dus

$$\bar{n} = \Sigma\, n\, W(n) = \frac{1 - \eta}{\eta}.$$

---

[1]) Opgemerkt moge worden, dat voor het kansprobleem dat P. en T. Ehrenfest ter illustratie van het H theorema gebruikt hebben ook een W functie bestaat n.l. $W(\Delta, \Delta + 2, 1) = \frac{N - \Delta}{2N}$, $W(\Delta, \Delta, 1) = 0$ en $W(\Delta, \Delta - 2, 1) = \frac{N - \Delta}{2N}$, dat de P relatie van Smoluchowski voor dit geval geldt met $P = \frac{2}{N}$, doch dat het quadratisch gemiddelde niet aan de relatie $\overline{\Delta^2} = 2\nu P$ voldoet, daar ν bij Ehrenfest nul is. De verkregen getallen rij is omkeerbaar.

[2]) M. Planck. Ueber die Begruendung des Gesetzes der schwarzen Strahlung Ann. der Phys. 1912. Bd. 37, p. 642.

Verder is het gemakkelijk $W(n_1, n_2, k)$ te berekenen, daar de sombetrekking (3) geldt.

Men vindt op deze wijze:

$$W(n, 0, k) = \eta \quad , \quad W(n, 1, k) = \eta\,(1 - \eta) \;.\;.\;.\;.$$

$W(n, k - 1, k) = \eta\,(1 - \eta)^{k-1}$, vervolgens zijn de W's nul tot aan $W(n), n + k, k)$ die gelijk aan $(1 - \eta)^k$ is, terwijl alle volgende nul zijn.

Aan de omkeerbaarheidsbetrekking voor de quantengetallen m en n met het interval k is voldaan mits m en n beide kleiner dan k zijn voor andere waarden echter niet, zoodat gelijk te verwachten is de reeks der doorloopen toestanden niet omkeerbaar is.

Men kan nagaan of er een betrekking van den vorm (7) bestaat, het blijkt dat deze geldt met $P = 1$.

Terwijl men in het algemeen zou verwachten dat $W(m, n, k)$ wanneer het aantal intervallen k vergroot wordt tot $W(n)$ asymptotisch nadert, is dit bij dit voorbeeld niet het geval. $W(m, n, k)$ en $W(n)$ blijven verschillend hoe groot k ook is, alleen worden voor waarden van $n < k$ de getallen $W(m, n, k)$ gelijk $W(n)$, dit geschiedt echter reeds dadelijk ook voor kleine k, en het eenige bijzondere voor $k = \infty$ is dat het gebied waar $W(m\, n\, k)$ en $W(n)$ verschillen verschuift naar oneindige waarden van n waar beide grootheden tot nul naderen.

In een volgende mededeeling zullen wij onze beschouwingen uitbreiden tot gevallen waarin een door het toeval bepaalde veranderlijke continu van een onafhankelijk veranderlijke afhangt.

Utrecht, Instituut voor Theoretische Natuurkunde.

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt een mededeeling aan van den Heer D. COSTER: *„Het gebruik van het audion in de draadlooze telegrafie"*.

(Deze mededeeling zal in het volgende Zittingsverslag worden opgenomen).

Ter uitgave in de Werken der Akademie wordt door den Heer P. ZEEMAN aangeboden, namens den Heer M. PINKHOF, het manuscript van diens verhandeling: „Bijdrage tot de theorie der Halo-verschijnselen."

De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren J. P. VAN DER STOK en J. P. KUENEN met verzoek om rapport, uit te brengen in een volgende vergadering.

Voor de bibliotheek wordt ten geschenke aangeboden:

a. door den Heer F. A. F. C. WENT een exemplaar van de dissertatie van den Heer C. SPRUIT P.Pz.: „De invloed van electrolyten op de tactische bewegingen van Chlamydomonas variabilis" en een exemplaar van de dissertatie van den Heer D. F. VAN SLOOTEN: „Bijdrage tot de kennis der Combretaceeën en Flacourtiaceeën van Nederlandsch-Indië."

b. door den Heer W. H. JULIUS, een exemplaar van de dissertatie van den Heer P. H. VAN CITTERT: „Spectraalverschijnselen veroorzaakt door onregelmatige lichtbreking en hun beteekenis voor de physica der zon."

De vergadering wordt gesloten.

---

30 Juni 1919.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 29 MAART 1919.

DEEL XXVII.

N°. 9.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Kennisgeving van de Heeren W. DE SITTER en H. KAMERLINGH ONNES dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Een bericht van het overlijden op 3 Februari j.l. van Prof. EDWARD CHARLES PICKERING, sinds 1877 Directeur van „Harvard College Observatory" te Cambridge (Mass.).

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

Anatomie. — De Heer J. K. A. WERTHEIM SALOMONSON brengt, mede namens den Heer E. D. WIERSMA, het volgende praeadvies uit:

In de vergadering van 22 Februari j.l. werd aan de ondergeteekenden opgedragen om in de Maartvergadering een praeadvies uit te brengen aangaande een request aan Zijne Excellentie den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, gericht door Dr. C. U. ARIËNS KAPPERS te Amsterdam, om een rijkssubsidie te mogen ontvangen voor de uitgave van een werk over de vergelijkende anatomie van het zenuwstelsel bij wervellooze dieren, bij gewervelde dieren en bij den mensch. Wij hebben de eer aan deze opdracht te voldoen en het volgende tot Uw kennis te brengen.

Het werk van Dr. C. U. ARIËNS KAPPERS dat in manuskript geheel persklaar is, geeft een zeer volledig en uitvoerig kritisch overzicht over de tegenwoordig verkregen kennis der vergelijkende anatomie van het zenuwstelsel. Dr. DROOGLEVER FORTUYN heeft daarin de evertebrata behandeld, terwijl door Dr. KAPPERS de vertebrata van af Amphioxus tot en met den mensch behandeld zijn. Een dergelijk werk bestaat tot dusverre niet. Het is misschien het beste te vergelijken met het bekende werk van LUDWIG EDINGER dat echter veel beknopter en vooral veel minder volledig is en dat, hoewel het reeds den 8en druk bereikt heeft, ongetwijfeld voor een niet onbelangrijk gedeelte een niet zeer juist te achten voorstelling geeft van de tegenwoordig heerschende begrippen en de nu vastgestelde feiten. In Amerika bestond indertijd een dusdanig werk van JOHNSTON, waaraan dezelfde bezwaren aankleven als aan EDINGER's boek, doch in sterkere mate, en dat nu als verouderd moet worden beschouwd. Daar geen enkel ander werk van eenige beteekenis over dit onderwerp bestaat is de arbeid van Dr. ARIËNS KAPPERS dus ongetwijfeld een nuttig werk dat aan een bestaande behoefte voldoet.

Dat het werk aan zeer hooge eischen zal voldoen, daarvoor waarborgt de naam van den schrijver. Het geldt hier toch de geestesvrucht van een geleerde die niet alleen het geheele gebied van zijn vak beheerscht, doch die het wetenschappelijk inzicht daarin krachtig heeft bevorderd. Hij heeft een nieuw en uiterst vruchtbaar beginsel, — het begrip der neurobiotaxis — ingevoerd, dat gekomen is om voor goed te blijven. Dit beginsel verklaart tal van eigenaardigheden

in den groei, den vorm en de ontwikkeling van verschillende deelen van het zenuwstelsel en werpt een geheel nieuw licht op talrijke duistere punten en den bouw en de verrichting van het zenuwstelsel bij verschillende diersoorten. Doch afgezien van het feit dat de schrijver door zijn wetenschappelijke onderzoekingen en ontdekkingen een der meest geziene en bekwame voorgangers op het door hem behandelde gebied is, maakt zijne werkzaamheid aan het instituut hem bij uitstek geschikt en tot den aangewezen persoon om een dergelijk werk te schrijven. Wij waren in de gelegenheid eenige groote stukken van het manuskript door te lezen en kunnen slechts getuigen van den hoogen standaard van volmaking waardoor het gekenmerkt is.

De aanwezigheid van Dr. Ariëns Kappers als directeur van het Nederlandsche centrale herseninstituut en zijn arbeidsveld van bijzonderen aard lokt voortdurend buitenlandsche onderzoekers naar Nederland. Zij wenschen zich onder zijne leiding in zijne denkbeelden en methoden in te werken. Reeds daardoor neemt het Nederlandsche instituut een belangrijke en zeer eervolle plaats in onder de rij der verschillende herseninstituten. Over hetgeen er gepresteerd wordt vindt men een aanwijzing in de onlangs uitgegeven ,,Complete list of publications etc. from the central institute for brain research in Amsterdam".

Het nu door Dr. Ariëns Kappers geschreven werk is het resultaat van jarenlangen noesten arbeid, en belichaamt in volledigen gekuischten vorm het grootsche werkprogramma van dat instituut. Het tot stand brengen van dit werk is een verrichting die den schrijver zoowel als het instituut 'twelk hij bestuurt tot groote eer verstrekt. Het werk legt welsprekende getuigenis af omtrent de groote beteekenis van Nederland op het gebied der vergelijkende neurologie.

De uitgave van dit werk is dan ook een feit, dat voor ons vaderland van niet gering onmiddellijk wetenschappelijk en moreel belang is.

De kosten voor het uitgeven zijn door den omvang en de talrijke illustratiën, vooral in den tegenwoordigen tijd, zeer hoog, en aangezien het debiet van een dergelijk werk uit den aard der zaak zeer beperkt blijft, is de uitgave niet mogelijk zonder Regeeringshulp. De ondergeteekenden zijn dan ook van oordeel dat de aanvrage om Regeeringshulp in elk opzicht gerechtvaardigd is en dat groote belangen gediend worden indien de Regeering kan besluiten deze hulp te verleenen.

Zij stellen daarom aan deze Vergadering voor gunstig te adviseeren en aan Zijne Excellentie den Minister van Onderwijs, Kunsten

en Wetenschappen te verzoeken de gevraagde subsidie van *f* 12000.— op de Begrooting te brengen.

(get.) J. Wertheim Salomonson.
,, E. D. Wiersma.

Groningen-Amsterdam, 25 Maart 1919.

De Vergadering besluit dit prae-advies onveranderd over te nemen en een afschrift daarvan met een begeleidend schrijven aan den Minister te zenden als antwoord der afdeeling op Zijner Excellentie's verzoek om bericht en raad.

Embryologie. — De Heer C. WINKLER brengt, mede namens de Heeren G. VAN RIJNBERK en H. J. HAMBURGER het volgende prae-advies uit:

De ondergeteekenden, door de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen in commissie benoemd om verslag uit te brengen omtrent een schrijven van het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, naar aanleiding van een verzoek der Commissie voor het Internationaal Embryologisch Instituut om toekenning eener subsidie van ten minste *f* 6000.— 's jaars, hebben de eer U voor te stellen aan den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen het volgende te berichten.

In antwoord op de missive N°. 551 der Afdeeling K. W. d.d. 17 Februari 1919, heeft de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen de eer het onderstaande ter kennis van Uwe Excellentie te brengen.

Gelijk uit den hieraan toegevoegden staat der geldmiddelen van het Internationaal Embryologisch Instituut blijkt, hebben de inkomsten over het jaar 1918 van dit instituut ten hoogste *f* 4500.— bedragen.

Want al gaat die staat over een bedrag van ± *f* 11.000.—, zoo is daarin een batig saldo van *f* 6801.— over 1917 begrepen, een saldo, zoo groot, omdat het kapitaal nog niet geheel belegd was.

Het ligt voor de hand, dat deze inkomsten te gering zijn om een soortgelijke inrichting naar behooren in werking te stellen.

Na aftrek van het salaris voor directeur (*f* 2500.—) en amanuensis (*f* 800.—) is er niet meer dan hoogstens *f* 1300.— voor instrumenten, boeken, chemicaliën en glaswerk beschikbaar geweest.

Bedenkt men, dat voor deze niet-pensioen-gerechtigde ambtenaren tractementen van *f* 4500—6000 en *f* 1500.— waarlijk niet te hoog zouden zijn, dat er dan van een assistent nog geen sprake is en dat er dan *f* 3000—4500 voor de noodzakelijke onkosten van de verwerking der materialia overschiet, dan mag een subside van *f* 6000.— niet te hoog worden geacht, als men een zoo nuttige inrichting met vrucht wil doen werken.

Daar de afdeeling er van overtuigd is, ook op grond der argumenten door de Commissie van het Internationaal Embryologisch

Instituut gebezigd, dat het van zeer groot belang is, soortgelijke instituten in den tegenwoordigen tijd, zooveel mogelijk te steunen, is zij van meening, dat de toekenning dezer subsidie alleszins is aan te bevelen.

22 Maart 1919.

(get.) G. VAN RIJNBERK.
,, H. J. HAMBURGER.
,, C. WINKLER.

De vergadering besluit dit prae-advies onveranderd over te nemen en een afschrift daarvan met een begeleidend schrijven aan den Minister te zenden als antwoord der Afdeeling op Zijner Excellentie's verzoek om bericht en raad.

Meteorologie. — De Heer J. P. van der Stok brengt, mede namens den Heer J. P. Kuenen, het volgende verslag uit over een verhandeling van den Heer M. Pinkhof, getiteld: *„Bijdrage tot de theorie der halo-verschijnselen."*

De theorie der parhelia is gegrond, in de eerste plaats op den aard der ijskristallen die hierin eene rol spelen, in de tweede plaats op de beelden, die zich door breking en weerkaatsing der lichtstralen aan deze kristallen, bij verschillende mogelijke oriënteering, kunnen vormen. Terwijl — zooals de schrijver dezer verhandeling opmerkt — de eigenlijke mathematische theorie als voltooid kan worden beschouwd en ook omtrent den aard der kristallen overeenstemming bestaat, blijven er nog verscheidene bezwaren bestaan bij pogingen tot verklaring van sommige zeldzaam en moeilijk waar te nemen verschijnselen.

De schrijver tracht deze bezwaren te ondervangen en de tegenstrijdige verklaringen, door verschillende onderzoekers ten beste gegeven, tot eenheid te brengen door omtrent de oriënteering der kristallen een nieuwen factor in te voeren, waarmede natuurlijk een ruimere mogelijkheid van verklaring gepaard gaat.

Tot den laatsten tijd is hierbij alleen rekening gehouden met de zwaartekracht als oorzaak van oriënteering en is de horizontale luchtbeweging, de wind, als een storende factor beschouwd, die oriënteering in alle richtingen te weeg brengt.

De Heer Pinkhof stelt voorop dat, wel is waar, in een homogene, eenvoudige, zich gelijkmatig bewegende cirruslaag de wind geen oorzaak van oriënteering ten opzichte van de bewegingsrichting kan zijn, maar dat zoowel de structuur der wolken als de z.g. valstrepen er op wijzen, dat veelal kristallen door rijzing of daling der luchtlagen, of ook door eigen val in lagen van een met de hunne verschillende horizontale snelheid terecht komen en dat door dit verschil in snelheid ook een oriënteering ten opzichte van horizontaal gerichte krachten mogelijk wordt, zij het ook met beperkte percentages.

Uit deze stelling volgt o. a. dat er samenhang moet bestaan tusschen zonnestand en windrichting eenerzijds en de frequentie van halo-verschijnselen anderzijds, waarbij voor de laatste dan ook een gunstigste tijd van den dag kan worden aangewezen.

Eene stelling van dezen aard kan alleen getoetst worden aan een

uitgebreid waarnemingsmateriaal, waarvoor de schrijver gebruik heeft gemaakt van de halo-verschijnselen samengesteld in de uitgave N°. 81 van het Kon. Ned. Meteor. Instituut: „Onweders, optische verschijnselen enz.", 1901—1910 en van eigen observaties, verricht gedurende de jaren 1917 en 1918. De bewerking van dit materiaal levert den schrijver verschillende bevestigingen van zijne stelling.

Daar achtereenvolgens de vele onderscheidene verschijnselen eerst met het doel de gegeven verklaringen te herzien, daarna voor toetsing aan de waarnemingen behandeld moesten worden, was eene misschien niet altijd noodige uitvoerigheid bezwaarlijk te vermijden.

De schrijver, bij het Instituut bekend als een ijverig en nauwgezet waarnemer van optische verschijnselen, heeft in deze studie niet alleen een nuttig overzicht gegeven van den tegenwoordigen stand van het onderzoek, maar ook een belangrijke bijdrage geleverd tot de theorie der parhelia, die tot hernieuwde beschouwing en bewerking van het aanwezige materiaal kan leiden.

De ondergeteekenden zijn, op grond van het bovenstaande, van meening, dat er alleszins reden bestaat tot opneming van deze verhandeling in de werken der Akademie.

(get.) J. P. van der Stok.
„ J. P. Kuenen.

De vergadering hecht hare goedkeuring aan de conclusie van dit verslag om de verhandeling op te nemen in de Werken der Akademie.

Aan den Heer Pinkhof zal van dit besluit bericht gezonden worden.

Wiskunde. — De Heer KLUYVER biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. J. DROSTE: „*Over integraalvergelijkingen, die in verband staan tot differentiaalvergelijkingen.*"

(Mede aangeboden door den Heer W. KAPTEYN).

§ 1. Tusschen lineaire integraalvergelijkingen met symmetrische kern eenerzijds en lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met twee lineaire homogene randvoorwaarden in φ en $\frac{d\varphi}{dx}$ anderzijds bestaat een samenhang, die door HILBERT is uiteengezet in zijn tweede verhandeling over integraalvergelijkingen (Gött. Nachr. 1904, blz. 213 en volg.). Nemen wij bijv. in het interval (0,1) de differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mu\varphi = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin μ een constante is, dan kan men het probleem stellen, $\varphi(x)$ zoo te bepalen, dat die functie aan de differentiaalvergelijking voldoet en tevens twee randvoorwaarden bevredigt. Dit kan alleen voor zekere waarden van μ, de zoogenaamde karakteristieke getallen. Kiest men nu een waarde μ_0, waarvoor het probleem geen oplossing heeft, dan kan men wel een functie $K(x,y)$ vinden, symmetrisch in x en y, die als functie van x de integraalvergelijking bevredigt, voor $x = y$ een discontinuïteit (een eenvoudigen sprong) in haar afgeleide $\frac{\partial K(x,y)}{\partial x}$ heeft en aan de randvoorwaarden voldoet. De karakteristieke getallen en functies van de kern $K(x,y)$ (dat zijn de getallen μ en de functies $\varphi(x)$, waarvoor

$$\varphi(x) = \mu \int_0^1 K(x,y)\, \varphi(y) dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

is) zijn de waarden μ en de functies $\varphi(x)$ die het gestelde probleem der differentiaalvergelijking oplossen; en omgekeerd leidt het randwaardenvraagstuk tot de oplossing van de homogene integraalvergelijking (2).

Het is duidelijk, dat niet alleen kernen van de beschouwde soort, nl. kernen die de differentiaalvergelijking bevredigen, de functies $\varphi(x)$

tot karakteristieke functies zullen hebben. Moeten de kern en de integraalvergelijking alleen dienen om het randwaardenvraagstuk tot een ander vraagstuk terug te brengen, dan is het ook niet noodig, andere kernen te beschouwen. Wanneer echter de integraalvergelijking gegeven is kan het van veel nut zijn te onderzoeken of de kern karakteristieke functies heeft, die oplossingen zijn van (1) voor zekere waarden van μ. Om die reden schijnt het mij van belang algemeen de kernen te beschouwen, welker karakteristieke functies aan (1) voldoen. Dat zeer algemeene klassen van kernen oplossingen van (1) tot karakteristieke functies hebben blijkt wel uit de voorbeelden van § 2 en § 3 die twee willekeurige functies bevatten.

§ 2. Voor $0 \leq x \leq 1$ en $0 \leq y \leq 1$ zal

$$K(x,y) = F(x+y) + \Phi(x-y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2a)$$

een symmetrische functie van x en y zijn, indien $\Phi(x-y) = \Phi(y-x)$ is. De functie $F(z)$ moet gedefinieerd zijn in het interval (0,2) en de functie $\Phi(x)$ in $(-1, +1)$. Wij onderstellen van $F(z)$ en $\Phi(z)$ nu nog de eigenschap, dat voor $0 \leq z \leq 1$

$$F(z+1) = F(z) \quad , \quad \Phi(z-1) = \Phi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Zijn $F(z)$ en $\Phi(z)$ in het interval (0,1) ontwikkelbaar in uniform convergente-reeksen van Fourier, dan zijn deze reeksen van den vorm

$$F(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kz - \alpha_k) \quad , \quad (0 \leq \alpha_k < \pi)$$

$$\Phi(z) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos 2\pi kz,$$

daar uit $\Phi(-z) = \Phi(z)$ en $\Phi(z-1) = \Phi(z)$ volgt

$$\Phi(z) = \Phi(1-z).$$

Men heeft dus

$$K(x,y) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \{\cos(2\pi kx - \tfrac{1}{2}\alpha_k)\cos(2\pi ky - \tfrac{1}{2}\alpha_k) -$$
$$- \sin(2\pi kx - \tfrac{1}{2}\alpha_k)\sin(2\pi ky - \tfrac{1}{2}\alpha_k)\}$$
$$+ b_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \{\cos(2\pi kx - \tfrac{1}{2}\alpha_k)\cos(2\pi ky - \tfrac{1}{2}\alpha_k) +$$
$$+ \sin(2\pi kx - \tfrac{1}{2}\alpha_k)\sin(2\pi ky - \tfrac{1}{2}\alpha_k)\}$$
$$= (b_0 + a_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \{(b_k + a_k)\cos(2\pi kx - \tfrac{1}{2}\alpha_k)\cos(2\pi ky - \tfrac{1}{2}\alpha_k) +$$
$$+ (b_k - a_k)\sin(2\pi kx - \tfrac{1}{2}\alpha_k)\sin(2\pi ky - \tfrac{1}{2}\alpha_k)\}.$$

Daar de functies

$$1 \quad , \quad \sqrt{2}\cos(2\pi ky - \tfrac{1}{2}\alpha_k) \quad , \quad \sqrt{2}\sin(2\pi ky - \tfrac{1}{2}\alpha_k) \quad . \quad . \quad (4)$$

orthogonaal en genormeerd zijn, en de reeks uniform convergeert,

volgt door vermenigvuldiging met een dier functies en integratie naar y van 0 tot 1, dat het karakteristieke functies zijn, behoorend bij de karakteristieke getallen $1/(b_0+a_0)$, $2/(b_k+a_k)$ en $2/(b_k-a_k)$. Daar een andere karakteristieke functie van $K(x,y)$ continu zou moeten zijn en orthogonaal t. o. z. van het stelsel (4), blijkt het, dat een zoodanige functie niet bestaat, aangezien het stelsel (4) volledig is.

De onderstelling, dat $F(z)$ en (z) in uniform convergente reeksen van FOURIER ontwikkelbaar zijn, is onnoodig, zooals uit een eenigszins andere inkleeding van het bewijs blijkt. Stel $F(z)$ en $\Phi(z)$ zijn continue functies, die alleen voldoen aan de bovengenoemde functioneele betrekkingen (3), terwijl $\Phi(-z)=\Phi(z)$. Men heeft dan

$$\int_0^1 F(x+y)\cos(2\pi ky-\tfrac{1}{2}a_k)\,dy=\int_x^{1+x} F(\xi)\cos(2\pi k\xi-2\pi kx-\tfrac{1}{2}a_k)d\xi.$$

Daar de integrand de periode 1 heeft, mag men van 0 tot 1 integreeren inplaats van x tot $x+1$. Daardoor wordt

$$\int_0^1 F(x+y)\cos(2\pi ky-\tfrac{1}{2}a_k)dy=\int_0^1 F(\xi)\cos(2\pi k\xi-2\pi kx-\tfrac{1}{2}a_k)d\xi$$

$$=\cos(2\pi kx+\tfrac{1}{2}a_k)\int_0^1 F(\xi)\cos(2\pi k\xi)d\xi+\sin(2\pi kx+\tfrac{1}{2}a_k)\int_0^1 F(\xi)\sin(2\pi k\xi)d\xi.$$

Is nu

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(2\pi kz-a_k)$$

de reeks van FOURIER van $F(z)$ (de reeks behoeft niet te convergeeren), dan wordt

$$\int_0^1 F(\xi)\cos(2\pi k\xi)d\xi=\tfrac{1}{2}a_k\cos a_k,\qquad \int_0^1 F(\xi)\sin(2\pi k\xi)d\xi=\tfrac{1}{2}a_k\sin a_k$$

en dus wordt met deze beteekenis van a_k

$$\int_0^1 F(x+y)\cos(2\pi ky-\tfrac{1}{2}a_k)\,dy=$$

$$=\tfrac{1}{2}a_k\cos a_k\cos(2\pi kx+\tfrac{1}{2}a_k)+\tfrac{1}{2}a_k\sin a_k\sin(2\pi kx+\tfrac{1}{2}a_k)=\tfrac{1}{2}a_k\cos(2\pi kx-\tfrac{1}{2}a_k).$$

Verder zij

$$b_0+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cos(2\pi kz)$$

de reeks van FOURIER van $F(z)$, zoodat

$$\int_0^1 F(\xi)\cos(2\pi k\xi)d\xi = \tfrac{1}{2}b^k \quad , \quad \int_0^1 F(\xi)\sin(2\pi k\xi)d\xi = 0.$$

Dan is, daar ook $\Phi(z)$ de periode 1 heeft,

$$\int_0^1 \Phi(x-y)\cos(2\pi ky - \tfrac{1}{2}a_k)dy = \int_0^1 \Phi(\xi)\cos(2\pi k\xi + 2\pi kx - \tfrac{1}{2}a_k)d\xi$$

$$= \tfrac{1}{2}b_k \cos(2\pi kx - \tfrac{1}{2}a_k).$$

Dus wordt

$$\int_0^1 K(x,y)\cos(2\pi ky - \tfrac{1}{2}a_k)dy = \tfrac{1}{2}(b_k + a_k)\cos(2\pi kx - \tfrac{1}{2}a_k).$$

Evenzoo kunnen wij bewijzen, dat $\sin(2\pi kx - \tfrac{1}{2}a_k)$ een karakteristieke functie is (terwijl dit van 1 zonder meer duidelijk is). Het spreekt vanzelf, dat sommige der functies uit de rij (4) onder de karakteristieke functies van $K(x,y)$ kunnen ontbreken, nl. wanneer de bijbehoorende waarde $a_0 + b_0$ of $a_k + b_k$ of $b_k - a_k$ nul is.

§ 3. Zij $K(x,y)$ een kern van den vorm

$$K(x,y) = f(x+y) + \varphi(x-y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waarin weer $f(z)$ in $(0,2)$ en $\varphi(z)$ in $(-1, +1)$ is gedefinieerd.

Wederom zij $\varphi(-z) = \varphi(z)$, zoodat $K(x,y)$ symmetrisch is; ook onderstellen wij weer dat $f(z)$ en $\varphi(z)$ continu zijn. Thans echter zij voor $0 \leq z \leq 1$

$$f(z+1) = -f(z) \quad , \quad \varphi(z-1) = -\varphi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

De functies

$$\sqrt{2}\cos\{(2k-1)\pi z - \tfrac{1}{2}\beta_k\} \quad , \quad \sqrt{2}\sin\{(2k-1)\pi z - \tfrac{1}{2}\beta_k\} \quad . \quad . \quad (7)$$

zijn voor $k = 1,2, \ldots$ een stelsel genormeerde en orthogonale functies voor alle waarden van β_k. Nu is

$$\int_0^1 f(x+y)\cos\{2k-1)\pi y - \tfrac{1}{2}\beta_k\}dy = \int_x^{1+x} f(\xi)\cos\{(2k-1)\pi\xi - (2k-1)\pi x - \tfrac{1}{2}\beta_k\}d\xi.$$

Splitsen wij de integraal in drie stukken, een van 0 tot 1, een van 1 tot x en een van 0 tot x (de laatste met het negatieve teeken) en voeren wij in de tweede integraal de substitutie $\xi = 1 + \xi_1$ uit, dan wordt die integraal

$$-\int_0^x f(1+\xi_1)\cos\{(2k-1)\pi\xi_1 - (2k-1)\pi x - \tfrac{1}{2}\beta_k\}d\xi_1$$

en dit valt wegens (6) juist tegen de derde integraal weg. Er komt dus

$$\int_0^1 f(x+y)\cos\{(2k-1)\pi y-\tfrac{1}{2}\beta_k\}dy=\int_0^1 f(\xi)\cos\{(2k-1)\pi\xi-(2k-1)\pi x-\tfrac{1}{2}\beta_k\}\,d\xi$$

$$=\cos\{(2k-1)\pi x+\tfrac{1}{2}\beta_k\}\int_0^1 f(\xi)\cos(2k-1)\pi\xi d\xi+$$

$$+\sin\{(2k-1)\pi x+\tfrac{1}{2}\beta_k\}\int_0^1 f(\xi)\sin(2k-1)\pi\xi d\xi$$

$$=\tfrac{1}{2}c_k\cos\{(2k-1)\pi x-\tfrac{1}{2}\beta_k\},$$

indien wij stellen

$$\int_0^1 f(\xi)\cos(2k-1)\pi\xi d\xi=\tfrac{1}{2}c_k\cos\beta_k \quad , \quad \int_0^1 f(\xi)\sin(2k-1)\pi\xi d\xi=\tfrac{1}{2}c_k\sin\beta_k,$$

waardoor β_k gedefinieerd is. Wij stellen $0 \leqq \beta_k \leqq \pi$.

Evenzoo is

$$\int_0^1 f(x+y)\sin\{(2k-1)\pi y-\tfrac{1}{2}\beta_k\}dy=\int_0^1 f(\xi)\sin\{(2k-1)\pi\xi-(2k-1)\pi x-\tfrac{1}{2}\beta_k\}d\xi$$

$$=-\sin\{(2k-1)\pi x+\tfrac{1}{2}\beta_k\}\,.\int_0^1 f(\xi)\cos(2k-1)\pi\xi d\xi+$$

$$+\cos\{(2k-1)\pi x+\tfrac{1}{2}\beta_k\}\int_0^1 f(\xi)\sin(2k-1)\pi\xi d\xi$$

$$=-\tfrac{1}{2}c_k\sin\{(2k-1)\pi x-\tfrac{1}{2}\beta_k\}.$$

Verder is

$$\int_0^1 \varphi(x-y)\cos\{(2k-1)\pi y-\tfrac{1}{2}\beta_k\}dy=\int_{-x}^{1-x}\varphi(\xi)\cos\{(2k-1)\pi\xi+(2k-1)\pi y-\tfrac{1}{2}\beta_k\}d\xi.$$

Daar weer

$$\int_{-x}^0 \varphi(\xi)\cos\{(2k-1)\pi\xi+(2k-1)\pi x-\tfrac{1}{2}\beta_k\}d\xi=\int_{1-x}^1 \varphi(\xi)\cos\{(2k-1)\pi\xi+(2k-1)\pi x-\tfrac{1}{2}\beta_k\}\,d\xi$$

is, wordt

$$\int_0^1 \varphi(x-y)\cos\{(2k-1)\pi y-\tfrac{1}{2}\beta_k\}dy=\int_0^1 \varphi(\xi)\cos\{2k-1)\pi\xi+(2k-1)\pi x-\tfrac{1}{2}\beta_k\}d\xi$$

$$+\tfrac{1}{2}d_k\cos\{(2k-1)\pi x-\tfrac{1}{2}\beta_k\},$$

waarin gesteld is

$$\int_0^1 \varphi(\xi) \cos (2k-1)\pi\xi d\xi = \tfrac{1}{2} d_k,$$

terwijl $\int_0^1 \varphi(\xi) \sin(2k-1)\pi\xi d\xi = 0$ is, wegens $\varphi(1-z) = -\varphi(z)$.

Als wij in deze formule $\frac{1}{2}\beta_k$ door $\frac{1}{2}\beta_k + \frac{\pi}{2}$ vervangen, blijkt, dat

$$\int_0^1 \varphi(x-y) \sin \{(2k-1)\pi y - \tfrac{1}{2}\beta_k\} dy = \tfrac{1}{2} d_k \sin \{(2k-1)\pi x - \tfrac{1}{2}\beta_k\}.$$

Dit alles laat zien, dat

$$\int_0^1 K(x,y) \cos \{(2k-1)\pi y - \tfrac{1}{2}\beta_k\} dy = \tfrac{1}{2}(d_k + c_k) \cos \{2k-1)\pi x - \tfrac{1}{2}\beta_k\},$$

$$\int_0^1 K(x,y) \sin \{(2k-1)\pi y - \tfrac{1}{2}\beta_k\} dy = \tfrac{1}{2}(d_k - c_k) \sin \{(2k-1)\pi y - \tfrac{1}{2}\beta_k\}$$

is, zoodat de functies (7) karakteristieke functies van $K(x,y)$ zijn, behoorend bij de karakteristieke getallen $2/(d_k + c_k)$ en $2/(d_k - c_k)$.

Er zijn geen andere karakteristieke functies, want de functies (7) vormen een volledig stelsel, zoodat wij de karakteristieke functies en de karakteristieke getallen van de kern (5) gevonden hebben.

Iedere symmetrische kern van den vorm

$$K(x,y) = D(x+y) + \Delta(x-y)$$

is de som van een kern als (2) en een kern als (5). Want zijn $D(z)$ en $\Delta(z)$ in $(0,2)$ en $(-1, +1)$ gedefinieerd, dan stelle men

$$2F(z) = D(z) + D(1+z) \quad , \quad 2f(z) = D(z) - D(1+z) \text{ voor } 0 \leqq z \leqq 1,$$
$$2F(z) = D(z) + D(z-1) \quad , \quad 2f(z) = D(z) - D(z-1) \text{ voor } 1 \leqq z \leqq 2,$$
$$2\Phi(z) = \Delta(z) + \Delta(z+1) \quad , \quad 2\varphi(z) = \Delta(z) - \Delta(z+1) \text{ voor } -1 \leqq z \leqq 0,$$
$$2\Phi(z) = \Delta(z) + \Delta(z-1) \quad , \quad 2\varphi(z) = \Delta(z) - \Delta(z-1) \text{ voor } 0 \leqq z \leqq 1,$$

waardoor overal $K(x,y)$ de som wordt van een kern als (2) en een kern als (5). Daaruit kan men echter weinig besluiten aangaande den aard der karakteristieke functies van $K(x,y)$.

§ 4. Wij beschouwen thans een veel algemeener geval. Zij de differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dz}{dx} \right) + \{q(x) + \mu\} z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

gegeven; wij stellen ter bekorting

$$\Delta_x z = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right) + q(x)z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

zoodat de differentiaalvergelijking wordt

$$\Delta_x z + \mu z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

De functie $p(x)$ zij eenmaal continu differentieerbaar in het interval (a,b), $q(x)$ zij continu in dat interval.

Zij verder $K(x,y)$ een symmetrische kern voor $a \leq x \leq b$ en $a \leq y \leq b$ en zij $K(x,y)$ tweemaal continu differentieerbaar naar x (en dus ook naar y). Voorts zij

$$\Delta_x K(x,y) = \Delta_y K(x,y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Is dan $\psi(x)$ een continue functie in (a,b), dan is blijkbaar

$$\frac{d}{dx}\int_a^b K(x,y)\psi(y)dy = \int_a^b \frac{\partial K(x,y)}{\partial x}\psi(y)dy$$

en

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_a^b K(x,y)\psi(y)dy = \int_a^b \frac{\partial^2 K(x,y)}{\partial x^2}\psi(y)dy,$$

zooals door integratie dezer betrekkingen naar x blijkt, daar bij de gemaakte onderstellingen de integratie onder het integraalteeken mag geschieden. Op dezelfde wijze blijkt, dat als $\varphi(x)$ een karakteristieke functie van $K(x,y)$ is, die functie tweemaal continu differentieerbaar is.

Wij stellen nog

$$\Delta(x,y) = \left[p(\eta)\left\{K(x,\eta)\frac{\partial K(\eta,y)}{\partial \eta} - \frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}K(\eta,y)\right\}\right]_b^a, \quad . \quad (11)$$

waarin het substitutieteeken, als steeds voortaan, betrekking heeft op η.

Dan geldt de volgende

Stelling I. Is $\varphi(x)$ een karakteristieke functie van $K(x,y)$, m. a. w. is

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

dan is

$$\Delta_x\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\,\Delta_y\varphi(y)dy - \lambda^2\int_a^b \Delta(x,y)\varphi(y)dy \quad . \quad . \quad (13)$$

Bewijs. Men heeft

$$\Delta_x\varphi(x) = \lambda\int_a^b \Delta_x K(x,y)\,\varphi(y)dy = \lambda\int_a^b \{\Delta_y K(x,y)\}\,\varphi(y)dy$$

wegens (10). Nu geldt voor twee willekeurige tweemaal continu differentieerbare functies de zoogenaamde formule van GREEN, die voor de functies $K(x,y)$ en $\varphi(y)$ luidt

$$\int_a^b \{K(x,y)\Delta_y\varphi(y)-\varphi(y)\Delta_y K(x,y)\}dy = \left[p(\eta)\left\{K(x,\eta)\varphi'(\eta)-\frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\varphi(\eta)\right\}\right]_a^b.$$

Daardoor vinden wij

$$\Delta_x\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\,\Delta_y\varphi(y)dy - \lambda\left[p(\eta)\left\{K(x,\eta)\varphi'(\eta) - \frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\varphi(\eta)\right\}\right]_a^b.$$

Substitueeren wij nu hierin

$$\varphi(\eta) = \lambda\int_a^b K(\eta,y)\varphi(y)dy,$$

$$\varphi'(\eta) = \lambda\int_a^b \frac{\partial K(\eta,y)}{\partial \eta}\varphi(y)dy,$$

dan verschijnt (13).

Stelling II. De noodige en voldoende voorwaarde, waaraan $K(x,y)$ moet voldoen opdat een volledig stelsel van orthogonale karakteristieke functies van $K(x,y)$ oplossingen van (8) *zijn, is, dat identiek in x en y*

$$\Delta(x,y) = 0 \quad \text{. . . . . (14)}$$

Bewijs. Stel vooreerst, dat $\Delta(x,y) = 0$ is. Indien dan $\varphi(x)$ een karakteristieke functie is, die bij de karakteristieke waarde λ behoort, dan volgt uit (13)

$$\Delta_x\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\Delta_y\varphi(y)dy.$$

Dus is ook $\Delta_x\,\varphi(x)$ een bij λ behoorende karakteristieke functie. Laat nu $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ een volledig bij λ behoorend orthogonaal en genormeerd stelsel van karakteristieke functies zijn, dan zijn dus ook $\Delta_x\varphi_1(x), \ldots, \Delta_x\varphi_n(x)$ karakteristieke functies, bij λ behoorend; zij kunnen dus lineair in $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ worden uitgedrukt, stel door de formules

$$\Delta_x\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\varphi_j(x) \quad \text{. . . . . (15)}$$

Dan is

$$c_{ij} = \int_a^b \varphi_j(x)\Delta_x\varphi_i(x)dx.$$

De formule van GREEN geeft dan

$$c_{ij} - c_{ji} = \int_a^b \{\varphi_j(x)\Delta_x\varphi_i(x) - \varphi_i(x)\Delta_x\varphi_j(x)\}dx =$$

$$[p(\eta)\{\varphi_j(\eta)\varphi'_i(\eta) - \varphi_i(\eta)\varphi'_j(\eta)\}]_a^b$$

en substitueert men hierin

$$\varphi_j(\eta) = \lambda \int_a^b K(x,\eta)\,\varphi_j(x)dx,$$

$$\varphi_j'(\eta) = \lambda \int_a^b \frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\,\varphi_j(x)dx$$

en overeenkomstige uitdrukkingen voor $\varphi_i(\eta)$ en $\varphi_i'(\eta)$, met y als integratieveranderlijke, dan komt er

$$c_{ij} - c_{ji} = \lambda^2 \int_a^b\int_a^b \left[p(\eta)\left\{K(x,\eta)\frac{\partial K(\eta,y)}{\partial \eta} - \frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}K(\eta,y)\right\}\right]_a^b \varphi_j(x)\varphi_i(y)dxdy$$

$$= \lambda^2 \int_a^b\int_a^b \Delta(x,y)\varphi_j(x)\varphi_i(y)dxdy = 0.$$

Dus is $c_{ij} = c_{ji}$. Door een orthogonale transformatie kan men nu steeds n nieuwe functies $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ vinden, die lineair in $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ zijn, ook orthogonaal en genormeerd zijn, maar die, inplaats van aan (15), voldoen aan vergelijkingen van den vorm

$$\Delta_x\psi_i(x) = -\mu_i\,\psi_i(x),$$

d. w. z. aan (8). Daarmede is bewezen, dat de voorwaarde $\Delta(x,y) = 0$ voldoende is.

Zij thans gegeven, dat een volledig stelsel van orthogonale karakteristieke functies van $K(x,y)$ bestaat uit louter oplossingen van (8). Dit stelsel zij $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_i(x), \ldots$ en de bijbehoorende waarden van μ zijn $\mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots$ Dan volgt uit (12) en (13)

$$\Delta_x\varphi_i(x) + \mu_i\varphi(x) = \lambda_i \int_a^b K(x,y)\{\Delta_y\varphi_i(y) + \mu_i\varphi(y)\}dy - \lambda_i^2 \int_a^b \Delta(x,y)\,\varphi_i(y)dy$$

en dus, daar $\varphi_i(x)$ aan de differentiaalvergelijking voldoet,

$$\int_a^b \Delta(x,y)\varphi_i(y)dy = 0$$

voor alle i. Dus is $\Delta(x,y)$ een functie van y, die orthogonaal is t.o.z. van alle karakteristieke functies van $K(x,y)$ en daaruit volgt

$$\int_a^b \Delta(x,y)\,K(y,z)dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

voor alle x en y in (a,b). Tevens is

$$\int_a^b \Delta\,(x,y)\frac{\partial K(y,z)}{\partial z}\,dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16a)$$

Nu is

$$\int_a^b \{\Delta(x,y)\}^2 dy = \int_a^b \Delta(x,y)\Big[\,p(\eta)\Big\{K(x,\eta)\frac{\partial K(\eta,y)}{\partial \eta} - \frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\,K(\eta,y)\Big\}\Big]_a^b dy =$$

$$= \Big[\,p(\eta)K(x,\eta)\int_a^b \Delta(x,y)\,\frac{\partial K(\eta,y)}{\partial \eta}\,dy\,\Big]_a^b - \Big[\,p(\eta)\,\frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\int_a^b \Delta(x,y)K(\eta,y)dy\,\Big]_a^b$$

en dit is 0 wegens (16) en $(16a)$. Daar $\Delta(x,y)$ continu is, is dus voor alle waarden van x en y in (a,b) de functie $\Delta(x,y) = 0$. Hiermede is aangetoond, dat de voorwaarde noodzakelijk is.

Voorbeeld. Zij $\Delta_x = \dfrac{d^2}{dx^2}$. De kern $K(x,y)$ is dan van den vorm

$$K(x.y) = F(x+y) + \Phi(x-y)$$

en $\Phi(x-y) = \Phi(y-x)$. Zij $a=0$, $b=1$ en zij aan (3) voldaan, dan is

$$\Delta(x,y) = (\{F(x+1) + \Phi(x-1)\}\{F'(y+1) - \Phi'(y-1)\} -$$
$$- \{F'(x+1) - \Phi'(x-1)\}\{F(y+1) + \Phi(y+1)\})$$
$$- (\{F(x) + \Phi(x)\}\{F(y) - \Phi'(y)\} - \{F'(x) - \Phi'(x)\}\{F(y) + \Phi(y)\})$$

Is nu aan (3) voldaan, dan wordt $\Delta(x,y) = 0$. Is aan (6) voldaan, met vervanging van f door F en φ door Φ, dan wordt $\Delta(x,y)$ eveneens nul. In beide gevallen zijn dus de karakteristieke functies oplossingen van (1), hetgeen het in § 2 en § 3 gevondene bevestigt.

§ 5. Wij gaan nu de gevonden voorwaarde (14) van meer nabij beschouwen. Stellen wij ter bekorting

$$\frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=b} = P(x),\ \frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=a} = Q(x),\quad K(x,b) = S(x)\quad K(x,a) = T(x),$$

dan wordt zij

$$p(b)\,\{\,S(x)\,P(y) - P(x)\,S(y)\,\} = p(a)\,\{\,T(x)\,Q(y) - Q(x)\,T(y)\,\} \quad . \quad . \quad (14a)$$

Laat nu vooreerst $p(b) \neq 0$, $p(a) \neq 0$ zijn en stel er zijn twee waarden

y_1 en y_2 in (a,b) te vinden, waarvoor $S(y_1)\,P(y_2) - S(y_2)\,P(y_1) \neq 0$ is. Geven wij ter bekorting de functies $P(y)$, $Q(y)$, $S(y)$, $T(y)$ voor de argumenten y_1 en y_2 aan door P_1, enz., P_2, enz., dan wordt (14a), wanneer wij y door y_1 en y_2 vervangen,

$$p(b)P_1S(x) - p(b)S_1P(x) = p(a)Q_1T(x) - p(a)T_1Q(x),$$
$$p(b)P_2S(x) - p(b)S_2P(x) = p(a)Q_2T(x) - p(a)T_2Q(x).$$

Hieruit volgt door eliminatie van $P(x)$ of van $S(x)$

$$p(b)\,(P_1S_2 - P_2S_1)\,S(x) = p(a)\,\{(Q_1S_2 - Q_2S_1)T(x) + (S_1T_2 - S_2T_1)Q(x)\},$$
$$p(b)\,(P_1S_2 - P_2S_1)\,P(x) = p(a)\,\{(Q_1P_2 - Q_2P_1)T(x) + (P_1T_2 - P_2T_1)Q(x)\}.$$

Stellen wij nu

$$\frac{p(a)}{p(b)}\frac{Q_1S_2 - Q_2S_1}{P_1S_2 - P_2S_1} = \alpha,\quad \frac{p(a)}{p(b)}\frac{S_1T_2 - S_2T_1}{P_1S_2 - P_2S_1} = \beta,\quad \frac{p(a)}{p(b)}\frac{Q_1P_2 - Q_2P_1}{P_1S_2 - P_2S_1} = \gamma,$$
$$\frac{p(a)}{p(b)}\frac{P_1T_2 - P_2T_1}{P_1S_2 - P_2S_1} = \delta,$$

dan worden deze betrekkingen

$$S(x) = \alpha T(x) + \beta Q(x),$$
$$P(x) = \gamma T(x) + \delta Q(x).$$

Men vindt gemakkelijk de betrekking

$$p(b)\,(\alpha\delta - \beta\gamma) = p(a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Dus worden S en P uit T en Q berekend door een lineaire substitutie. Vervangen wij deze functies weer door hetgeen zij beteekenen, dan is dus

$$\left.\begin{aligned} K(x,b) &= \alpha\, K(x,a) + \beta \left.\frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=a}, \\ \left.\frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=b} &= \gamma\, K(x,a) + \delta \left.\frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=a} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (18)$$

Dat, omgekeerd, door deze vergelijkingen aan (14) voldaan wordt, volgt hieruit, dat de determinant der grootheden links van het gelijkteeken voor twee waarden van x, stel x en y, gelijk is aan $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ maal die der grootheden rechts en dit laat zien, dat, in verband met (17), aan (14) voldaan wordt.

Wij schrijven nog even de omgekeerde substitutie van (18) op; zij luidt

$$\left.\begin{aligned} K(x,a) &= \alpha'\, K(x,b) + \beta' \left.\frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=b}, \\ \left.\frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=a} &= \gamma'\, K(x,b) + \delta' \left.\frac{\partial K(x,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=b} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (18a)$$

en nu is

$$p(a)\,(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') = p(b) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17a)$$

Indien het onmogelijk is, y_1 en y_2 zoo te vinden, dat $S_1 P_2 - S_2 P_1 \neq 0$ is, dan zijn $S(x)$ en $P(x)$ evenredig en (14a) leert, dat dan ook $Q(x)$ en $T(x)$ evenredig zijn. Dit kan men ook beschouwen uit (18) te volgen.

Is $p(a) = 0$, $p(b) \neq 0$, dan verlangt (14a) dat $S(x)$ en $P(x)$ evenredig zijn en daar wegens (17a) dan ook (18) de evenredigheid van $S(x)$ en $P(x)$ tot gevolg heeft, kan men zeggen, dat ook in dat geval (18) blijft gelden. Evenzoo blijft (18a) geldig voor $p(b) = 0$, $p(a) \neq a$. Is $p(a) = p(b) = 0$, dan zal een kern, waarvoor de functies $P(x)$, $Q(x)$, $S(x)$ en $T(x)$ eindig blijven, steeds aan (14) voldoen, zoodat hare karakteristieke functies steeds oplossingen van (8) zijn.

§ 6. Uit de voorwaarden (18) voor de kern kan men nu zonder moeite voorwaarden afleiden voor de karakteristieke functies. Is $\varphi_i(x)$ een zoodanige functie en is

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x,y)\varphi_i(y)dy,$$

dan wordt

$$\varphi'_i(x) = \lambda_i \int_a^b \frac{\partial K(x,y)}{\partial y} \varphi_i(y)dy$$

en dus

$$\varphi_i(a) = \lambda_i \int_a^b K(y,a)\varphi_i(y)dy \quad , \quad \varphi'_i(a) = \lambda_i \int_a^b \frac{\partial K(y,\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=a} \varphi_i(y)dy,$$

$$\varphi_i(q) = \lambda_i \int_a^b K(y,b)\varphi_i(y)dy \quad , \quad \varphi'_i(b) = \lambda_i \int_a^b \frac{\partial K(y,\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=b} \varphi_i(y(dy.$$

Dus wordt wegens (18)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(b) &= \alpha\varphi_i(a) + \beta\varphi'_i(a), \\ \varphi'_i(b) &= \gamma\varphi_i(a) + \delta\varphi'_i(a). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

§ 7. Wij gaan tenslotte, onafhankelijk van eenige kern, onderzoeken, wanneer twee oplossingen van (8) orthogonaal zijn, en zullen zien dat dit de condities (19) zijn. Laat $\varphi(x)$ en $\psi(x)$ twee oplossingen zijn, zoodat

$$\Delta_x\varphi(x) + \mu_1\varphi(x) = 0,$$
$$\Delta_y\psi(x) + \mu_2\psi(x) = 0.$$

Door de eerste dezer vergelijkingen met $\psi(x)$, de tweede met $\varphi(x)$ te vermenigvuldigen vindt men na aftrekking

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\{\psi(x)\varphi'(x)-\varphi(x)\psi'(x)\}\right]+(\mu_1-\mu_2)\varphi(x)\psi(x)=0$$

en hieruit door integratie van a tot b

$$\left[p(\eta)\{\varphi(\eta)\psi'(\eta)-\psi(\eta)\varphi'(\eta)\}\right]_a^b=(\mu_1-\mu_2)\int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx.$$

Behooren φ en ψ bij verschillende μ's, dan volgt hieruit, dat voor de orthogonaliteit noodig en voldoende is, dat

$$\left[p(\eta)\{\varphi(\eta)\psi'(\eta)-\psi(\eta)\varphi'(\eta)\}\right]_a^b=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Behooren φ en ψ bij dezelfde μ, dan is de voorwaarde noodig. Is dus $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ een orthogonaal stelsel, dan moet (19) voor elk paar functies van het stelsel gelden.

Stel nu algemeen

$$\varphi_i(a)=x_i \quad , \quad \varphi'_i(a)=y_i \quad , \quad \varphi_i(b)=u_i \quad , \quad \varphi'_i(b)=v_i ,$$

dan wordt (19)

$$p(a)\,(x_i y_j-x_j y_i)=p(b)\,(u_i v_j-u_j v_i)$$

voor elk paar indices i en j. Voor de drie indices i, r en s luiden de vergelijkingen

$$p(a)\,(x_i y_r-x_r y_i)=p(b)(u_i v_r-u_r v_i)$$
$$p(a)\,(x_r y_s-x_s y_r)=p(b)\,(u_r v_s-u_s v_r),$$
$$p(a)\,(x_s y_i-x_i y_s)=p(b)\,(u_s v_i-u_i v_s).$$

Vermenigvuldig de eerste dezer vergelijkingen met u_s, de tweede met u_i, de derde met u_r en tel op. Er komt dan

$$p(a)\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_r & x_r & y_r \\ u_s & x_s & y_s \end{vmatrix}=0$$

Evenzoo vindt men door vermenigvuldiging met v_s, v_i en v_r

$$p(a)\begin{vmatrix} v_i & x_i & y_i \\ v_r & x_r & y_r \\ v_s & x_s & y_s \end{vmatrix}=0$$

Is dus $p(a)\neq 0$, dan wordt door ontwikkeling naar de elementen der eerste rij

$$u_i(x_r y_s-x_s y_r)+x_i(y_r u_s-y_s u_r)+y_i(u_r x_s-u_s x_r)=0,$$
$$v_i(x_r y_s-x_s y_r)+x_i(y_r v_s-y_s v_r)+y_i(v_r x_s-v_s x_r)=0.$$

Laat nu de indices r en s zoo gekozen zijn, dat $x_r y_s-x_s y_r\neq 0$ is. Stellen wij dan

$$\frac{y_s u_r-y_r u_s}{x_r y_s-x_s y_r}=\alpha,\ \frac{u_s x_r-u_r x_s}{x_r y_s-x_s y_r}=\beta,\ \frac{y_s v_r-y_r v_s}{x_r y_s-x_s y_r}=\gamma,\ \frac{v_s x_r-v_r x_s}{x_r y_s-x_s y_r}=\delta,$$

dan wordt voor alle waarden van i

$$u_i = \alpha x_i + \beta y_i,$$
$$v_i = \gamma x_i + \delta y_i.$$

Men vindt gemakkelijk

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(x_r y_s - x_s y_r) = u_r v_s - u_s v_r$$

en dus

$$p(b)(\alpha\delta - \beta\gamma) = p(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

De gevonden formules luiden

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(b) &= \alpha\varphi_i(a) + \beta\varphi_i'(a), \\ \varphi_i'(b) &= \gamma\varphi_i(a) + \delta\varphi_i'(a) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Men overtuigt er zich, in verband met (21), gemakkelijk van, dat (19) aan (20) voldoet.

Is voor elke r en s de uitdrukking $x_r y_s - x_s y_r = 0$, dan zijn y_i en x_i evenredig en hetzelfde geldt dan van u_i en v_i blijkens (20).

Is $p(a) = 0$ en $p(b) \neq 0$, dan leert (21), dat $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ en (19) dat $\varphi_i(b)$ evenredig is met $\varphi_i'(b)$, hetzelfde, wat ook (20) leert. In dat geval blijven (19) en (21) dus van kracht.

Is $p(b) = 0$ en $p(a) \neq 0$, dan leert de reciproke substitutie van (19), nl.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(a) &= \alpha'\varphi_i(b) + \beta'\varphi_i'(b), \\ \varphi_i'(a) &= \gamma'\varphi_i(b) + \gamma'\varphi_i'(b) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19a)$$

met

$$p(a)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') = p(b), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21a)$$

dat $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 0$ is en dat dus wegens (21a) de grootheden $\varphi_i(a)$ en $\varphi_i'(a)$ evenredig zijn. Dit leert ook (20) en dus blijven ook dan de gevonden betrekkingen (19) of (19a) geldig.

Voor $p(a) = p(b) = 0$ is steeds aan (20) voldaan, voor alle $\varphi_i(x)$, die in a en b eindig blijven.

Physiologie. — De Heer WERTHEIM SALOMONSON doet eene mededeeling over: „*Meting der Chronaxie*".

In HOORWEG'S wet over de prikkelingswaarde van electrische stroomen wordt aangegeven, dat het vermogen van een prikkelbaar orgaan om een electrischen prikkel op te nemen snel afneemt, tijdens het overvloeien van electriciteit. In zijne mathematische formuleering wordt dit aangegeven door de exponentieele uitdrukking:

$$y = a \int_0^\infty I \varepsilon^{-\beta t} \, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin y de prikkelende werking van een stroom I voorstelt. Door I als een tijdfunctie in deze uitdrukking te plaatsen kan de prikkelende waarde voor een stroomstoot gevonden, als de vorm daarvan als tijdfunctie gegeven is. In de formule is a de „aanvangsconstante". HOORWEG noemt β de uitdoovingsconstante, terwijl hij $\frac{1}{\beta}$ de *tijdconstante* van het prikkelbare orgaan noemt. Door LAPICQUE is voor die tijdconstante de naam van *chronaxie* ingevoerd.

De meting van de chronaxie is van veel beteekenis voor onze kennis van de prikkelbaarheid van een spier of zenuw. Men kan haar meten door een stel van drie condensatorontladingen zooals door DOUMER geschiedt; of door 2 condensatorontladingen en één meting met een constanten stroom, zooals reeds in den beginne door HOORWEG zelf werd aangegeven. CLUZET bepaalt in een reeks van vele condensatorontladingen, die waarbij de energie de kleinste is en berekent daaruit de chronaxie. Verder heeft LAPICQUE een methode aangegeven die ook door KEITH en door ADRIAN gebruikt is om met een uiterst snel werkenden stroomsluiter- en stroomonderbreker de chronaxie te meten waarbij twee bepalingen noodig zijn. Eindelijk heb ik zelf onlangs een methode aangegeven om met het inductorium de meting te verrichten, waarbij drie bepalingen noodig zijn.

Bij al deze metingen, wordt behalve de chronaxie nog een andere grootheid n.l. de *rheobasis* van LAPICQUE bepaald. Deze stemt overeen met de stroomsterkte waarmede men bij het gewone onderzoek een minimale spiercontractie verkrijgt. Zoowel LAPICQUE, LUCAS KEITH

als HOORWEG bepalen haar dan ook onmiddellijk met den constanten stroom. In HOORWEG's constanten uitgedrukt is deze rheobasis $= \frac{\beta}{\alpha}$. Kent men rheobasis en chronaxie, dan laat zich onmiddellijk de aanvangsconstante α van HOORWEG, of wel haar reciproque waarde $\frac{1}{\alpha}$ als *hoeveelheidsconstante* berekenen.

Nu blijkt het dat in het algemeen de rheobasis een minder groote beteekenis heeft dan de chronaxie. Dit hangt hoofdzakelijk daarmede samen, dat de rheobasis afhankelijk is van het oppervlak der bij de prikkeling gebruikte electroden. Verder verschilt de rheobasis aanmerkelijk bij de verschillende methoden ter bepaling. Zoo vond ik b.v. met dezelfde electroden, dat de condensatormethode mij 4.4 milliampere voor de rheobasis opleverde, het inductieapparaat 6.1 milliampere terwijl de directe meting met den constanten stroom 2.3 milliampere aangaf. De metingen geschiedden onmiddellijk achter elkaar. Ik vond daarentegen voor de chronaxie telkens 0.00008 seconden, met de methode van HOORWEG, DOUMER en mijne methode. De rede van dit verschil ligt wel uitsluitend in het verschil in lichaamsweerstand tegenover de gebruikte stroomen.

Terwijl ieder gemakkelijk de rheobasis bepaalt met den constanten stroom, is de meting der chronaxie nog niet gemeengoed geworden. Dit kan alleen geschieden wanneer de meting vereenvoudigd wordt. En dit laatste is, zooals wij zien zullen, mogelijk. Het gelukt namelijk zoowel de condensator methode als die met het inductorium zoodanig in te richten, dat slechts twee bepalingen noodig zijn, terwijl bovendien de uitkomst door een deeling of door een vermenigvuldiging verkregen of zelfs op een schaal direct afgelezen wordt.

Condensatormethode. Volgens de wet van HOORWEG is de formule voor condensator-ontladingen :

$$V = \frac{\beta}{\alpha} R + \frac{1}{\alpha C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin V het potentiaalverschil voorstelt (in Volts) waartoe een condensator C (in farad) moet geladen worden om bij een weerstand van den stroomloop R ohm een minimaal-contractie te geven. Wij richten nu onze proef zóó in, dat wij met een condensator C_1 juist een minimaal-contractie verkrijgen. Vervolgens vervangen wij dezen condensator C_1 door een grooteren C_2, en trachten opnieuw een minimaal-contractie te verkrijgen. Daartoe wordt echter niet de spanning V veranderd, doch wij schakelen zooveel weerstand W in, dat het beoogde doel bereikt wordt. Wij krijgen dan

$$\beta R + \frac{1}{C_1} = \beta (R + W) + \frac{1}{C_2}$$

en

$$\frac{1}{\beta} = \frac{W C_1 C_2}{C_2 - C_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wij zijn echter geheel vrij in de keuze van C_2 en kiezen voor het gemak $C_2 = 2C_1$. Dan wordt:

$$\frac{1}{\beta} = W C_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Daar C_2 bekend is, terwijl wij W, den weerstand kennen, is de chronaxie eveneens bekend. Beschikken wij over een voldoend onderverdeeld stel condensatoren, dan zouden wij, evengoed een bepaalden weerstand W kunnen invoeren en nu zooveel capaciteit toevoeren totdat opnieuw een minimale contractie verkregen wordt. De chronaxie wordt dan berekend volgens formule (3). Op practische gronden is echter de methode naar formule (4) te verkiezen, daar in dat geval slechts twee gelijke condensatoren bv. van 0.05 μF noodig zijn benevens een weerstand van 10—10000 Ω; tevens wordt de uitkomst dan onmiddellijk afgelezen in millioenste seconden, wanneer de ingeschakelde weerstand door 10 gedeeld wordt. Met formule (3) werkende hebben wij een vasten weerstand bv. van 1000 of 2000 Ohm noodig, benevens een goed en kostbaar condensatoren stel van 0.001 tot 0.5 μF gaande, terwijl de uitkomst niet direct kan worden afgelezen, doch een kleine berekening vereischt.

Bij beide methoden is natuurlijk een meting van V met een Voltmeter geheel overbodig.

Inductorium methode. De secundaire openingsstroom van het inductorium wordt voorgesteld door:

$$i_{0_{11}} = I \frac{M}{L_{11}} \varepsilon^{-\frac{R_{11}}{L_{11}} t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waarin I de primaire stroomsterkte, M den constanten inductiecoefficient, L_{11} de zelfinductie van de secundaire rol R den secundairen weerstand aangeeft. Plaatsen wij deze uitdrukking in HOORWEG's grondformule, dan krijgen wij:

$$\eta = \alpha I \frac{M}{L_{11}} \int_0^\infty \varepsilon^{-\left(\frac{R_{11}}{L_{11}} + \beta\right)t} dt = \frac{\alpha I M}{R_{11} + \beta L_{11}}$$

en de prikkelwaarde voor de minimale contractie als eenheid stellende:

$$\alpha I M = R_{11} + \beta L_{11} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Voer ik nu achtereenvolgens twee bepalingen van de minimale

contractie uit, waarbij I en M constant blijven doch waarbij in het eene geval een hulp-zelfinductie L in den stroomloop is geplaatst, terwijl deze in het tweede geval door een weerstand W vervangen is, van zoodanige grootte dat opnieuw de minimale contractie verkregen wordt, dan is:

$$R_{11} + W + \beta L_{11} = R_{11} + \beta (L_{11} + L)$$

en

$$\frac{1}{\beta} = \frac{L}{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Ook hier kan de meting geschieden door een vaste zelfinductie L bv. van 0.1 HENRY te gebruiken bij de eerste proef, en bij de tweede uit een rheostaat zooveel weerstand in te voeren tot dat de minimaal-contractie verkregen wordt. In dat geval levert een deelsommetje het getal voor de chronaxie. Omgekeerd kan ook een vaste weerstand bv. 1000 Ohm bij de eerste proef ingeschakeld worden, terwijl bij de tweede proef een veranderlijke zelfinductie — bv. een geijkte variator van WIEN — dezen weerstand vervangt. De zelfinductie wordt dan zoolang gewijzigd tot de minimaal-contractie optreedt. Kiest men in dit geval 1000 Ohm dan zal de aflezing der zelfinductie in HENRY het getal geven voor de chronaxie uitgedrukt in duizende deelen van een seconde. Practisch is een dergelijke inrichting een toestel waarmede de chronaxie zonder verdere berekening afgelezen wordt.

Deze laatste methode heeft het voordeel dat zij met bijna elk inductieapparaat gebruikt kan worden, en dat men niet behoeft te werken met telkens één enkelen prikkelingsstoot, doch den gewonen onderbreker kan gebruiken. Het is alleen noodig om een inductor te kiezen waarbij het aantal der secundaire windingen voldoende groot is, althans niet minder dan 3000.

De reden hiervoor is gelegen in het feit, dat de gebruikte formules voor het inductieapparaat niet meer toegepast mogen worden wanneer de totale weerstand in den secundairen stroomkring buitensporig groot wordt in vergelijking met den secundairen zelfinductiecoefficient, daar in dat geval de aanvangssterkte van den secundairen stroomstoot niet meer onafhankelijk van den secundairen weerstand is. Immers dan doet zich de invloed van de capaciteit in de secundaire rol gelden, die aanleiding geeft dat de secundair geinduceerde E.M.K. niet boven een zeker maximum kan stijgen bij gegeven primaire stroomsterkte. Is de secundaire zelfinductiecoefficient te klein, dan vinden wij ook te kleine chronaxiën. Een opzettelijk hierop gericht physiologisch zoowel als physisch onderzoek met den oscillograaf leerde

dat bij een aantal van 3000 secundaire windingen, deze invloed nog niet kon worden waargenomen, zelfs bij inschakeling van 15000 Ohm.

Ten slotte wijs ik er nog op dat zoowel bij de condensatormethode als bij die met het inductieapparaat gemakkelijk een kleine wijziging aangebracht kan worden, waardoor het mogelijk is om vooreerst een niet gecalibreerden veranderlijken weerstand te gebruiken, en daarna door één enkele aflezing van een speciaal geijkt stroommetend instrument onmiddellijk de chronaxie af te lezen.

Natuurkunde. — De Heer H. HAGA doet een mededeeling, mede namens den Heer F. ZERNIKE: *„Over thermo-electrische stroomen in kwikzilver.”*

In een uitvoerige verhandeling[1]) „Ein für Thermo-elektrizität und metallische Wärmeleitung fundamentaler Effekt” tracht C. BENEDICKS het bestaan aan te toonen van een thermo-electrische kracht in een homogenen geleider in iedere plaats optredende, ter weerszijde waarvan het temperatuursverloop ongelijk, waar dus de temperatuursgradient verschillend is[2]). Hij erkent de mogelijkheid dat de thermo-electrische kracht, die onder deze omstandigheid in vaste geleiders optreedt, toegeschreven kan worden aan wijzigingen in de structuur, tengevolge waarvan de aan elkaar grenzende deelen van den geleider zich als verschillende stoffen zouden gedragen en stelt derhalve het bewijs van het bestaan der bedoelde kracht afhankelijk van het slagen der proeven bij een vloeibaren geleider. Daartoe nam hij een met kwikzilver gevulde glazen buis, die op één plaats zeer vernauwd was en verwarmde het wijdere deel zoodat hierin een hooge temperatuur was, die vloeiend veranderde, terwijl naar de zijde van het nauwe gedeelte de temperatuur snel afnam; betrouwbare resultaten kon hij uit deze proeven niet afleiden, hetgeen hij meende te moeten toeschrijven aan de geleiding van warmte door het glas, waardoor het kwik in het nauwe deel ook verwarmd werd en de temperatuur niet steil genoeg verliep. Tegen de bekende proeven van MAGNUS, die geen stroom kan aantoonen bij het in aanraking brengen van kwik van verschillende temperatuur en waarbij ook de temperatuursgradienten verschillend waren, voerde BENEDICKS de geringe gevoeligheid aan van den door MAGNUS gebruikten galvanometer, vergeleken met de tegenwoordige spiegelgalvanometers.

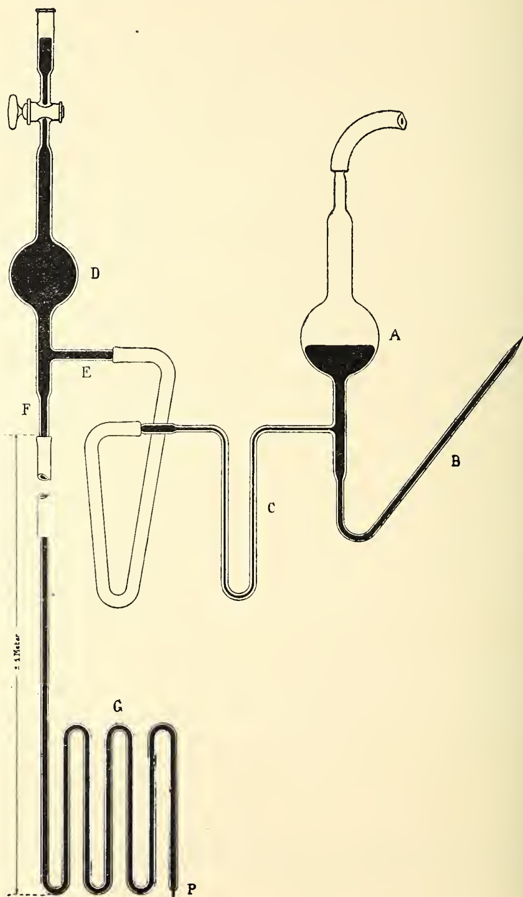
Het kwam ons niet onmogelijk voor met kwik de proef zoodanig in te richten dat aan alle eischen[3]), door BENEDICKS gesteld, voldaan werd en daardoor een beslissing te treffen over het bestaan van het nieuwe effekt en wel door gebruik te maken van twee elkaar rakende kwikstralen, waarvan de een uit verwarmd kwik bestaat

[1]) Ann. der Physik. **55**, p. 1—80, p. 103—150. 1918.

[2]) Pogg. Ann. **23**, p. 497, 1851. MAGNUS bestrijdt hier het ontstaan van thermostroomen onder deze omstandigheden.

[3]) l. c. p. 118.

en ze te verbinden aan een zeer gevoeligen galvanometer. Hierdoor toch ontgaat men geheel den door BENEDICKS gevreesden invloed van den wand; men kan het aanrakingsoppervlak zeer klein maken, terwijl in dit oppervlak voortdurend ander kwik met elkaar in aanraking komt, zoodat de temperatuursgradient steeds zeer groot is en dezelfde blijft.



Nevensgaande figuur is een afbeelding van de gebezigde inrichting. Een glazen bol A[1]) is voorzien van een buis B, waarvan het uiteinde tot een nauwe opening is uitgetrokken; C is een capillaire buis waarvan het uiteinde, door middel van een 50 c.M. lange caoutchoucbuis, verbonden is met de glazen buis E. Deze buis E is een zijbuis van het glazen toestel DF; het ondereinde van F is weder met een 50 c.M. lange caoutchoucbuis aan buis G verbonden, waarvan het laatste deel zeven keer op en neer gebogen is; bij P is een platinadraad ingesmolten.

De helft van bol A en verder het geheele glastoestel was met in vacuo gedistilleerd kwik gevuld. Over het uitgetrokken boveneinde van A was een dikwandige caoutchoucslang geschoven, waardoor A in verbinding gebracht kon worden met een reservoir gevuld met samengeperste lucht van 2 à 3 atmosferen. De hier beschreven inrichting had vooreerst ten doel te beletten dat warmte zich door geleiding van de verwarmde buis B tot den ingesmolten platinadraad P voortplantte en in de tweede plaats om den bol A gemakkelijk met kwik te vullen.

Voor ieder der beide kwikstralen werd een dergelijk toestel vervaardigd; de beide buizen G waren met hun op- en neergaande deelen tegen elkaar gebonden en bevonden zich in een grooten bak met water (48 × 24 × 20 c.M.); aan de platinadraden P waren de uiteinden van de koperen toeleidingsdraden naar den galvanometer — een met zijde omwikkelde gummiader-souple-kabel — gesoldeerd; de soldeerplaatsen en de niet geïsoleerde platina- en koperdraden zorgvuldig met schellak bedekt en twee meter van den kabel in het water gedompeld, zoodat de verbindingsplaatsen kwik-platina-koper op gelijke temperatuur waren en beveiligd tegen geleidingswarmte door het kwik of het koper. De weerstand van de toeleidingsdraden, buizen met kwik en de kwikstralen was 1.5 ohm. De gebruikte galvanometer was een door CARPENTIER vervaardigde van het THOMSON-type, waarvan het magneetstelsel vervangen was door een door de firma SIEMENS en HALSKE vervaardigd stelsel volgens DU BOIS-RUBENS, opgehangen aan een kwartsdraad van 7 μ. De weerstand der klossen is 2.7 ohms; de schaalsafstand was 2.8 meter, de vergrooting van den afleeskijker 33 maal. Door regeling van de astasie werd een gevoeligheid verkregen van 1 m.M. uitwijking door 5.8×10^{-9} amp. zoodat, daar de geheele weerstand 4.2 ohm bedroeg 1 microvolt (10^{-6} V.) een uitwijking gaf van 41 m.M. Bij deze gevoeligheid waren we echter verplicht de waarnemingen eerst te

---

[1]) De middellijn van A is ongeveer 7.5 c.M.

doen na het ophouden van het tramverkeer; dan echter was, tenzij de schommelingen in de magnetische declinatie groot waren, de aflezing tot 0.1 m.M. geheel betrouwbaar.

Een der toestellen *ABC* was bevestigd aan een stevig statief, dat fijn regelbare verplaatsingen in drie loodrecht op elkander staande richtingen toeliet.

Ten einde bij de proeven het kwik op te vangen waren in een verticaal geplaatste 4 c.M. glazen buis twee van boven open verticale gleuven gemaakt, waardoor de buizen *B* geschoven werden; de kwikstralen spoten tegen de binnenzijde der glazen buis en het kwik werd opgevangen in een onder de buis geplaatst bekerglas; op den bovenrand der buis werd een houten ring met glazen venster gelegd, waardoorheen de stralen door een binoculair microscoop met 15-malige vergrooting konden worden waargenomen.

Bij goede openingen in de buizen *B* ontstonden zeer fraaie kwikstraaltjes, die over een lengte van een paar centimeter geheel het uiterlijk hadden van metaaldraden, zoodat ook de dikte, met microscoop van oculair-micrometer voorzien, gemeten kon worden; bij de hier besproken proeven was de diameter van den eenen straal 0.10 m.M., van den anderen 0.13 m.M. Soms waren op de stralen dikkere en dunnere gedeelten; iets verder dan het gladde deel werden de stralen doffer door het vormen van druppeltjes.

Liet men den eenen straal den anderen langzaam naderen en raakten slechts de oppervlakten elkander, zoo behielden de stralen voor het grootste deel hun richting en vormde zich bij de aanraking een dun vliesje; bij centrale botsing der stralen was het vlak van dit vliesje loodrecht op het vlak der stralen; het vlies bestond voor het grootste deel uit fijne druppeltjes.

Voor het verkrijgen van den verwarmden straal was om het bovengedeelte van buis *B* een 16 c.M. lange, nauwsluitende roodkoperen buis geschoven en deze werd door een er onder geplaatste gasvlam verwarmd; de temperatuur kon hierdoor ook onder het spuiten zeer hoog worden, hetgeen o. a. bleek toen eenmaal, onmiddellijk na de proef, de overdruk in *A* werd weggenomen en het toestel brak door de groote hoeveelheid plotseling zich ontwikkelende damp uit de oververhitte vloeistof. Het kwam ons bij dit onderzoek niet noodig voor de temperatuur met groote nauwkeurigheid te bepalen, het was voldoende deze te schatten o. a. uit de hoeveelheid van den ontwijkenden damp.

Onderstaande tabel geeft als voorbeeld een der genomen reeksen van proeven die alle goed met elkander overeenstemmen. Daarin zijn de getallen van kolom 2 en 3 de aflezingen op de schaal in millimeter.

Tijd 6 Maart 1919.	Aflezing op de schaal. De kwikstralen raken elkaar niet.	Aflezing op de schaal. De kwikstralen raken elkaar.	Uitwijking.
$1^h\ 27^m$	154.2		
		161.9	+ 7.9
	153.8		
		161.9	+ 8.0
	154.0		
		161.7	+ 7.7
	154.0		
$1^h\ 31^m$	gasvlam onder de koperen buis		
	153.2		
		161.4	+ 8.3
	153.0		
		161.7	+ 8.7
	153.0		
		162.0	+ 9.2
	152.5		
		162.6	+ 9.8
	153.0	kwikdampen zichtbaar	
		163.0	+ 10.0
	153.0		
		163.2	+ 10.2
	153.0	zeer veel kwikdamp	
		163.5	+ 10.8
	152.7		
		163.7	+ 10.8
	153.0		
	gasvlam verwijderd		
	152.7		
		163.5	+ 10.8
	152.7		
	kwik op kamertemperatuur		
	154.0		
		162.1	+ 8.0
$1^h\ 41^m$	154.2		
$1^h\ 48^m$	155.2		
		162.8	+ 7.6
	155.2		

Van 1^h 27 tot $1^h\ 31^m$ waren de kwikstralen onverwarmd en aflezingen werden gedaan beurtelings zonder dat de stralen elkander raakten en bij aanraking; de uitwijking wordt veroorzaakt door zwakke thermoelektrische krachten in de keten.

Daarna werd de gasvlam onder de koperen buis geplaatst zoodat de eene kwikstraal voortdurend in temperatuur steeg; de afwijkingen

werden eveneens grooter. Na het verwijderen der vlam werden de afwijkingen kleiner om de oorspronkelijke waarde weder aan te nemen wanneer het kwik de kamertemperatuur had aangenomen. Bij verwarming van de andere buis waren de uitwijkingen kleiner dan bij de niet verwarmde kwikstralen.

Ten einde te onderzoeken of het verschil in uitwijking bij gelijke en ongelijke temperatuur der beide kwikstralen — maximaal 3.2 m.M. — kon toegeschreven worden aan een mogelijke verbinding van kwik met een der bestanddeelen van het glas, werd een uur lang voor het begin der proef de eene buis *B* sterk verwarmd, zoodat het kwik in deze buis veel meer gelegenheid had een dergelijke verbinding te vormen dan gewoonlijk; gedurende de eerste minuut van de proef zou dan het kwik een andere samenstelling hebben dan daarna en een andere uitslag zou verkregen worden. Van een dergelijk gedrag was echter niets te bespeuren, zoodat bovenvermeld verschil niet aan een chemische verontreiniging van het kwik kan worden toegeschreven.

Ongedwongen laat zich het verschil, wat grootte en richting betreft, verklaren als gevolg van de thermokracht tusschen kwik onder druk en kwik zonder druk, welke kracht door DES COUDRES [1]) is aangetoond en later ook door WAGNER en HÖRIG gemeten. [2]) Het kwik stond toch in de glazen toestellen onder den druk der samengeperste lucht; de kwikstralen bestonden uit kwik onder den druk van de atmosfeer en hun aanrakingsplaatsen met het kwik onder overdruk waren op verschillende temperatuur.

Dat deze opvatting de juiste is werd nog aangetoond door een afzonderlijke proef, waarbij een knievormig omgebogen nauwsluitend glazen buisje over de uiteinden der beide buizen *B* geschoven werd zoodat de kwikstralen het buisje vulden; een kleine opening aan de bovenzijde van het buisje diende als overloop voor het kwik. Werd nu een der buizen *B* verwarmd, zoo verkregen we uitwijkingen van geheel dezelfde orde als voorheen terwijl er geen vrije kwikstralen meer waren.

Eén verschijnsel werd bij deze proeven opgemerkt, dat door het bovenstaande niet verklaard wordt; steeds was gebleken dat de uitwijking bij een zeer oppervlakkige aanraking der stralen grooter was dan bij een centrale botsing: dus bij een fijn contact grooter dan bij een vol; het verschil nam toe met het temperatuursverschil der stralen en bedroeg bij de grootste temperatuursverschillen **1.5** mM.

---

1) DES COUDRES. Wied. Ann. **43**, p. 673, 1891.

2) E. WAGNER. Ann. d. Physik. **27**, p. 955, 1908.
H. HÖRIG. Ann. d. Physik. **28**, p. 871, 1909.

Men zou dit verschil kunnen toeschrijven aan den bij een fijn contact grooteren temperatuursprong en er een bewijs in vinden van het door BENEDICKS genoemde fundamenteele effekt. Men moet dan echter niet vergeten dat deze thermokracht slechts bedraagt: 3.5×10^{-8} Volt bij een zeer steilen temperatuurval van 300° op een afstand van een onderdeel van 1 mM., zoodat bij de werkelijk voorkomende gevallen van thermostroomen met deze geringe kracht geen rekening behoeft gehouden te worden. Ten einde de bovenste grens van deze, eventueel aan te nemen, thermo-electrische kracht voor meer normale gevallen nog verder te kunnen trekken, werd een dunwandig buisje — wanddikte 0.1 mM., inwendige middellijn ± 0.8 mM. — in het midden uitgetrokken waar de wanddikte 0.08 mM. en de inwendige middellijn ± 0.3 mM. bedroeg. Dit buisje werd horizontaal geplaatst tusschen de uiteinden van de buizen *B*; door een caoutchoucbnisje werd het eene uiteinde met een der buizen *B* verbonden; van de tweede buis *B* werd de fijne opening afgesneden, zoodat het andere uiteinde van het dunwandige buisje, na omgebogen te zijn, in deze buis *B* reikte en men, door aanbrenging van geringen overdruk, in de eerstgenoemde buis een langzamen stroom kwik door het buisje kon verkrijgen. Zonder dezen stroom gaf een verwarming van het buisje aan eene zijde der vernauwing niet de minste uitwijking. Nu was de oppervlakte der doorsnede van het kwik in het buisje 0.50 mM^2, die van den glaswand 0.38 mM^3 en in het nauwe deel resp. 0.08 mM^2 en 0.1 mM^2; daar het geleidingsvermogen voor warmte van glas tienmaal kleiner is dan van kwik zal de door BENEDICKS gevreesde invloed van het glas onder deze omstandigheden slechts gering kunnen zijn.

Bovendien kan deze invloed nog in hooge mate verminderd worden door het kwik te laten stroomen tegen de richting van den warmtestroom. Bij verwarming van het glas links van de vernauwing lieten we het kwik van rechts naar links stroomen zoodat, mocht, tengevolge der geleiding van warmte door het glas, het kwik in het nauwe deel verwarmd worden, dit door het stroomende koude kwik vervangen werd, terwijl, wegens de zes maal geringere snelheid van het kwik in het wijdere dan in het nauwere deel, de temperatuur in het wijdere deel niet merkbaar verminderd zal zijn. Hierdoor werd een temperatuurval van minstens 250° op een afstand van een paar millimeter verkregen. Daar bij het doen van deze proef de variatie van de magnetische declinatie uiterst gering was, konden veranderingen in de aflezingen van 0.1 mM. volkomen nauwkeurig onderkend worden; zelfs een dergelijke kleine verplaatsing werd niet waargenomen, zoodat bij bovengenoemden temperatuursgradient

geen thermo-electrische kracht in kwikzilver bestaan kan grooter dan 1×10^{-9} Volt.

Wat nu het zoo even vermelde kleine verschil van 1.5 mM. betreft bij de verschillende wijzen van aanraken der stralen, zoo zou dit ook, zonder een met de temperatuursgradient samenhangende thermo-electrische kracht aan te nemen, aan een andere oorzaak kunnen worden toegeschreven. Uit de gedurende éène minuut uitgespoten hoeveelheid kwik en de dikte van den straal volgt dat de snelheid van het kwik ongeveer 5 meter bedroeg, zoodat de tijd voor den eenen straal om, bij oppervlakkige aanraking, door den anderen te gaan minder dan $\frac{1}{50000}$ secunde is. Is het temperatuursverschil der beide stralen 300°, dan is het zeer goed denkbaar dat, in het aan beide stralen gemeenschappelijk deel, de electronen en kwikmoleculen gedurende dien korten tijd niet in den voor kwik normalen toestand gekomen zijn, zoodat dat laagje te beschouwen is als te bestaan uit een ander soort kwik, dat aan beide zijden een verschillende temperatuur bezit en dientengevolge een thermo-electrische kracht doet ontstaan.

Naar onze meening heeft dit onderzoek het bestaan van het door Benedicks gezochte effekt in kwikzilver niet bevestigd zoodat er geen aanleiding is de theorie der thermo-stroomen in den door dezen onderzoeker verlangden zin te wijzigen.

Natuurkundig Laboratorium der Rijks-Universiteit te Groningen.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt eene mededeeling aan over: *„Een involutie in de stralenruimte, die bepaald wordt door een bilineaire congruentie van elliptische biquadratische ruimtekrommen"*.

§ 1. De ruimtekrommen van den vierden graad (eerste soort), die elke van twee vaste krommen derzelfde soort in acht punten snijden, vormen een *bilineaire congruentie*[1]). Een willekeurige rechte t is bisecante van één dier krommen ϱ^4; in haar snijpunt P met het vaste vlak α wordt zij gesneden door één andere bisecante t' der bedoelde ϱ^4. De rechten t en t' vormen een paar van een *stralen-involutie*, welke hier zal worden onderzocht.

Elke bisecante b der vaste kromme β^4 is singulier voor de congruentie $[\varrho^4]$. Immers deze wordt voortgebracht door twee bundels (β^2) en (γ^2) van quadratische oppervlakken, welke de vaste krommen β^4 en γ^4 tot bases hebben; de hyperboloïde β^2, welke b bevat, wordt door de oppervlakken van den bundel (γ^2) in krommen ϱ^4 gesneden, die allen de rechte b tot koorde hebben. De tweede rechte, b^*, welke die hyperboloïde door het punt $b\alpha$ zendt, is gemeenschappelijke koorde voor dezelfde krommen ϱ^4. De bisecanten der basiskrommen β^4 en γ^4 zijn dus *niet* singulier voor de involutie (t, t').

§ 2. De congruentie $[\varrho^4]$ heeft nog andere singuliere bisecanten s; op elke rechte s bepalen de bundels dezelfde involutie; de rechten s zijn tot een congruentie (7,3) vereenigd[2]).

Door de involutie, welke (β^2) en (γ^2) op s bepalen, worden zij projectief gemaakt. De krommen σ^4, welke elk door twee homologe hyperboloïden worden voortgebracht, liggen op een biquadratisch oppervlak, dat de rechte s bevat. Het heeft met een vlak σ door s een kromme σ^3 gemeen, welke de meetkundige plaats is van de puntenparen, die de krommen σ^4, buiten s, met σ gemeen hebben. De involutie dier paren is centraal, d. w. z. de koorden t', welke die paren dragen, komen samen in een punt S van σ^3. De koorden t' van elke σ^4, die op s rusten, vormen een regelschaar; de hyper-

[1]) Zie mijn mededeeling: *„Een bilineaire congruentie van biquadratische ruimtekrommen der eerste soort"*. (Verslagen XX, 197—201).

[2]) T. a. p. bl. 199.

boloïden waarop die scharen liggen, zijn vereenigd tot een bundel, waarvan de basis uit s en σ^3 bestaat. Daar σ^3 twee punten met s gemeen heeft, zal het involutiecentrum S, bij wenteling van het vlak σ, tweemaal op s komen. Bijgevolg vormen de koorden t', die s in een punt P snijden, een *kubisch kegelvlak* met dubbelribbe s. De singuliere rechten s zijn dus ook *singulier voor de involutie* (t, t').

§ 3. Ik beschouw nu de meetkundige plaats Ψ der krommen ϱ^4, die ieder een koorde in den waaier (T, τ) brengen. De krommen $\varrho_B{}^4$, welke β^4 in het punt B snijden, liggen op de hyperboloïde $\gamma_B{}^2$, die door B gaat. Deze snijdt τ volgens een kegelsnede, waarop de krommen $\varrho_B{}^4$ een involutie I^4 bepalen; hierbij behoort een directiekromme van de derde klasse. Dus bevat de waaier (t) drie koorden van krommen $\varrho_B{}^4$, en hieruit volgt, dat de basiskrommen β^4 en γ^4 *drievoudig* zijn op het oppervlak Ψ.

De meetkundige plaats der puntenparen Q, Q', waarin de stralen t van den waaier (T, τ) door krommen ϱ^4 tweemaal worden gesneden, is een kromme τ^5 met drievoudig punt T, welke de doorgangen B_k en C_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ der basiskrommen β^4 en γ^4 bevat[1].

Een hyperboloïde β^2 heeft met τ^5, behalve de vier punten B, drie paren Q, Q' gemeen. Dus worden de bundels (β^2) en (γ^2) door de stralen (t) in een verwantschap (3,3) gebracht; bijgevolg is de meetkundige plaats Ψ een oppervlak van den *twaalfden* graad.

Zij nu (L, λ) een andere waaier, λ^5 de bijbehoorende kromme (die analoog is met τ^5). Van de snijpunten van λ^5 met Ψ^{12} liggen 8×3 in de punten B_k, C_k; de overige 36 vormen 18 paren steunpunten van koorden van krommen ϱ^4. Hieruit volgt, dat *de bisecanten der krommen* ϱ^4, *die ieder een koorde in een gegeven waaier brengen, tot een complex van den* 18^{en} *graad zijn vereenigd.*

§ 4. De kromme ϱ^4, welke door het in α aangenomen punt P gaat, wordt uit P geprojecteerd door een kubischen kegel, waarvan de ribben s^* *singuliere stralen* der involutie (t, t') zijn. Elke ribbe is toegewezen aan alle andere ribben van dien kegel, is dus tevens coïncidentiestraal. De kromme τ^5, die door een waaier (T, τ) wordt bepaald, heeft vijf punten P gemeen met de rechte $\alpha\tau$; elk dier punten brengt een singulieren straal s^* in den waaier. De stralen s^* vormen dus een *complex van den vijfden graad.*

Een rechte t_α in het vlak α is, in het algemeen, koorde van één ϱ^4. Alle koorden van deze ϱ^4, die op t_α rusten, zijn in de involutie

[1]) T. a. p. bl. 199.

(t, t') aan t_α toegewezen. Met dien *singulieren straal* t_α komen dus overeen de stralen van een quadratische regelschaar en de stralen van de twee kubische kegels, die ϱ^4 uit haar snijpunten met t_α projecteeren.

Ik beschouw nu een waaier (T, τ). De kromme ϱ^4, die een straal t van dien waaier tot koorde heeft, brengt zes van haar koorden in α; de snijpunten Q van die 6 rechten t_α met τ voeg ik toe aan het snijpunt P van t met α. Aan den waaier (Q, α) is (§ 3) een complex van den graad 18 toegevoegd, gevormd door de bisecanten der krommen ϱ^4 welke de stralen van (Q, α) tweemaal ontmoeten; deze heeft 18 stralen t in (T, τ), zoodat aan Q zijn toegewezen 18 punten P. Daar P dus 24 maal met Q samenvalt, bevat (T, τ) 24 koorden t van krommen ϱ^4, die ieder gesneden worden door een in α gelegen koorde van dezelfde ϱ^4. De bij (T, τ) behoorende kromme τ^5 (§ 3) bepaalt op $\alpha\tau$ vijf punten P_0; de door een dier punten gelegde kromme ϱ^4 voegt aan den straal TP_0 drie stralen t_α toe; dus is TP_0 driemaal in rekening te brengen in de bovengenoemde groep van 24 stralen t. Hieruit volgt, dat een *waaier* door de transformatie (t, t') wordt omgezet in het samenstel van *vijf kubische kegels* en een *regelschaar van den graad negen*.

Deze regelschaar $(t')^9$ heeft de rechte $\alpha\tau$ tot richtlijn. Het regelvlak, waarop zij ligt, heeft met het waaiervlak τ, behalve de richtlijn $\alpha\tau$ en de vijf stralen TP_0, nog drie rechten t' gemeen.

Het gevonden resultaat kan als volgt worden bevestigd. Elke kromme ϱ^4 bepaalt in het vlak τ vier punten R_k; de koorden $u \equiv R_1 R_2$ en $v \equiv R_3 R_4$ zijn aan elkaar toegevoegd in een quadratische transformatie [1]). Als u den waaier (T, τ) doorloopt, omhult v een kegelsnede; dus zal het snijpunt van u met v dan driemaal op de rechte $\alpha\tau$ komen. Er zijn dus drie waaierstralen t, waarvoor de straal t' in τ ligt (en niet met t samenvalt).

§ 5. Een ster, met top M, wordt door (t, t') omgezet in een congruentie. Een kromme ϱ^4, welke een van haar koorden t in $[M]$ brengt, zendt twee koorden u door het punt N. Aan het snijpunt P van t met α voeg ik de doorgangen Q_1 en Q_2 der koorden u_1 en u_2 toe. Met elk punt Q komen analoog twee punten P overeen. Als P een rechte doorloopt, beschrijft t een waaier; in den daardoor bepaalden complex $\{u\}^{18}$ zal u dan een kegel van den graad 18 beschrijven, dus Q een kromme α^{18} doorloopen. P en Q komen

---

[1]) Zie mijn mededeeling: „*Een quadrupelinvolutie in het platte vlak, en een daarmede verbonden tripelinvolutie*". (Verslagen XIX, 52—62).

dus overeen in een verwantschap (2,2) van den graad 18. Daar deze, in het algemeen, 22 coïncidenties vertoont, is de *stergraad* der met $[M]$ overeenkomende congruentie 22.

De krommen ϱ^4, welke koorden door M zenden, vormen een oppervlak van den vijfden graad. In α ligt dus een kromme α^5, waarvan elk punt een kubischen kegel van singuliere stralen s^* uitzendt. Daar die stralen tevens coïncidenties $t \equiv t'$ zijn, heeft het beeld der ster $[M]$ in M een *singulier punt* van de *vijfde* orde.

Zij μ een willekeurig vlak, Φ het vlak door M en $\alpha\mu$. Met elken straal t van (M,Φ) komen in μ overeen zes koorden van de kromme ϱ^4, die t tweemaal ontmoet; hun snijpunten Q met $\alpha\mu$ voeg ik toe aan het snijpunt P van t met $\alpha\mu$. De complex $\{u\}^{18}$, die bij den waaier (Q,μ) behoort, zendt 18 stralen t in den waaier (M,Φ), bepaalt dus 18 punten P. Daar Q 24maal met P samenvalt, bevat μ evenveel stralen t', die in (t,t') zijn toegewezen aan stralen van $[M]$. De *veldgraad* van het beeld eener ster bedraagt dus 24. Het *beeld* van een *ster* is dus een *congruentie* (22, 24).

Een stralenveld $[\mu]$ wordt omgezet in een congruentie, waarvan de stergraad blijkbaar 24 is. Om den veldgraad te vinden, heeft men te bedenken, dat een vlak Φ slechts stralen t' kan bevatten, die door het snijpunt Q der vlakken α, μ en Φ gaan. De complexkegel van Q in den complex $\{u\}^{18}$, die bij den waaier (Q,μ) behoort, valt uiteen in den waaier (Q,μ), den kubischen kegel, welke de door Q gelegde kromme ϱ^4 projecteert en een kegel van den graad 14; deze bevat de koorden, welke de krommen ϱ^4, die stralen van (Q,μ) tweemaal snijden, nog door Q zenden. De drie stralen t', welke de kubische kegel in Φ brengt, zijn ieder toegevoegd aan elke der drie in μ gelegen ribben, zijn dus driemaal in rekening te brengen. Hieruit volgt, dat de *veldgraad* der congruentie 23 is. Het *beeld* van een *stralenveld* is dus een *congruentie* (24, 23).

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan: *„Over topologische involuties"*.

Onder een *topologische involutie van de* n^{de} *orde* eener h-dimensionale ruimte F verstaan we een zoodanige verdeeling van F in systemen van *ten hoogste* n punten, dat de verzameling dezer systemen zich sitaal (d. i. eeneenduidig en continu) laat afbeelden op een andere h-dimensionale ruimte M, die we de *moduulruimte* der involutie noemen.

§ 1. *Involuties van lijnen.*

Zij P een punt van de moduullijn M, dat eindpunt is van een zoodanig segment s van M, waarvan elk punt n verschillende beeldpunten op de lijn F bezit, terwijl voor P zelf $m > 1$ dezer beeldpunten in een punt Q van F samenvallen. Kiezen we een punt C van s dicht genoeg bij P, dan vallen voor de punten van F in de nabijheid van Q, die nòch aan P nòch aan C beantwoorden, drie en slechts drie categorieën te onderscheiden: zulk een punt is òf beeldpunt van een tusschen C en P liggend punt van M en kan dan zonder ontmoeting der in de nabijheid van Q liggende beeldpunten $D_1, D_2, \ldots D_m$ van C met Q worden verbonden, òf beeldpunt van een door C van P gescheiden punt van M, in welk geval het zonder ontmoeting van $Q, D_1, D_2, \ldots D_m$ uit de nabijheid van Q kan worden verwijderd, òf beeldpunt van een door P van C gescheiden punt van M, in welk geval het zoowel zonder ontmoeting van $D_1, D_2, \ldots D_m$ met Q verbonden, als zonder ontmoeting van $Q, D_1, D_2, \ldots D_m$ uit de nabijheid van Q verwijderd kan worden. Dit beteekent echter voor $m > 1$ een onmogelijkheid, zoodat *ieder punt van* M *noodzakelijk* n *verschillende beeldpunten op* F *bezit*. Hieruit volgt onmiddellijk, *ten eerste*, dat F een *gesloten* lijn is, *ten tweede*, dat *de involutie van de* n^{de} *orde van* F *topologisch aequivalent is met een* n*-periodieke rotatiegroep*.

§ 2. *Involuties van oppervlakken.*

Zij β een zoodanig gebied van het moduuloppervlak M, waarvan ieder punt n verschillende beeldpunten op het oppervlak F bezit, en P een zoodanig bereikbaar punt van de grens van β, dat langs

een zekeren uit β naar P voerenden weg m deze n beeldpunten tot het beeldpunt Q van P convergeeren. Zij j een op M in de nabijheid van P om P getrokken enkelvoudige gesloten kromme, k haar op F in de nabijheid van Q gelegen beeld. Kiezen we j klein genoeg, dan is een punt van F in de nabijheid van Q, dat niet aan een punt van j beantwoordt, *òf* beeldpunt van een punt van M binnen j en kan dan zonder ontmoeting van k met Q worden verbonden, *òf* beeldpunt van een punt van M buiten j, in welk geval het zonder ontmoeting van k uit de nabijheid van Q kan worden verwijderd. Daar derhalve k op F *twee en slechts twee gebieden* bepaalt, is k een enkelvoudige gesloten kromme, waarop de gegeven involutie van F een involutie met j als moduullijn bepaalt, die noodzakelijk van de m^{de} orde en derhalve topologisch aequivalent met een m-periodieke rotatiegroep moet zijn. Hieruit volgt onmiddellijk, *ten eerste*, dat de beeldpunten der bereikbare punten van de grens van β, dus ook deze bereikbare punten zelf geïsoleerd zijn, dat derhalve die punten van M, waarvan het aantal beeldpunten minder dan n bedraagt, evenals de correspondeerende beeldpunten zelf, geïsoleerd zijn, *ten tweede*, dat *het oppervlak F als een Riemannsch oppervlak n-bladig ligt uitgebreid over het moduuloppervlak M.*

§ 3. *Eindige groepen van lijnen.*

We beschouwen een eindige groep G van n sitale (d. i. eeneenduidige en continue) transformaties met invariante indicatrix van een lijn F. Daar iedere transformatie van G periodiek is, moet F noodzakelijk gesloten zijn en kan voor geen enkele transformatie van G een invariant punt bestaan. Zij nu s een segment van F, waarvan het eene eindpunt S_1 door de transformatie t van G in het andere eindpunt S_2 overgaat, dat echter voor het overige geen twee voor G aequivalente punten bevat. Laten $S_2, S_3, \ldots . S_m, S_{m+1} = S_1$ de punten van F zijn, waarin S_1 door de achtereenvolgende machten der m-periodieke transformatie t overgaat. Dan kan geen der segmenten $S_h S_{h+1}$ behalve zijn eindpuntenpaar nog een ander paar van voor G aequivalente punten bevatten, zoodat twee punten van F slechts dan voor G aequivalent zijn, als ze door een macht van t in elkander overgaan. Daar derhalve de groep G uitsluitend de machten van t bevat, is zij topologisch aequivalent met een n-periodieke rotatiegroep, m. a. w. zij is een *involutie van de n^{de} orde.*

§ 4. *Eindige groepen van oppervlakken.*

We beschouwen een eindige groep G van n sitale transformaties

met invariante indicatrix van een gesloten tweezijdig oppervlak F. Zij P een voor een ondergroep γ van G invariant punt, τ een (klaarblijkelijk periodieke) transformatie van γ. Met de transformatie τ van F correspondeert een eveneens periodieke, een beeldpunt van P invariant latende transformatie van het enkelvoudig samenhangende overwikkelingsoppervlak van F. Hieruit volgt op grond van de *rotatiestelling* van KERÉKJÁRTÓ, dat P op F een van voor τ invariante punten vrije, volledige omgeving bezit, zoodat op F eveneens een volledige omgeving van P bestaat, waarbinnen *geen enkele* transformatie van γ een punt invariant laat. Construeeren we dus om P en voldoende dicht bij P een enkelvoudige gesloten kromme, dan bepaalt deze tezamen met hare beelden voor γ een eveneens een enkelvoudige gesloten kromme vormende *buitengrens* k, die door γ zoodanig in zichzelf getransformeerd wordt, dat voor geen enkele transformatie van γ een invariant punt kan optreden. Hieruit volgt onmiddellijk, dat γ *door een enkele periodieke transformatie t wordt voortgebracht.* Stellen we nu het systeem der voor G met P aequivalente punten voor door π, dan levert, als we t op de boven beschreven wijze uitbreiden over het enkelvoudig samenhangende overwikkelingsoppervlak van F, de rotatiestelling het resultaat, dat in de verzameling der systemen van voor G aequivalente punten van F een volledige omgeving van π bestaat, die zich inclusief π sitaal op een deelgebied van een oppervlak laat afbeelden. En hiermede is gebleken, dat de groep G een (overigens speciale) *involutie van de n^{de} orde. is.*

Sterrekunde. — De Heer DE SITTER biedt eene mededeeling aan: „*Theorie der Satellieten van Jupiter.* I. *De intermediaire baan*".

In het volgende wordt de uitwerking gegeven van de theorie, die geschetst is in mijne mededeeling [1]) van 23 Maart 1918. Ik zal hier alleen de uitkomsten vermelden. De berekeningen zullen later uitvoerig gepubliceerd worden in de Annalen van de Sterrewacht te Leiden. De huidige mededeeling bevat de bepaling van de elementen der intermediaire baan. Zooals in de „Schets" uitgelegd is, stelt deze de banen der satellieten voor als keplersche ellipsen met de constante halve groote assen a_i en excentriciteiten e_i, terwijl de perijovia de gemeenschappelijke retrograde beweging $-\varkappa\tau$ hebben.

In plaats van den tijd gebruiken wij de onafhankelijk veranderlijke τ, zoodat de tijdseenheid 1.1221899034 middelbare zonnedagen is. De eenheid van massa is de massa van Jupiter, en de eenheid van lengte is zoo gekozen dat de constante van GAUSS $f=1$ wordt. Deze lengte-eenheid is

$a_0 = 0.0070854378$ astronomische eenheden.

De gebruikte massa's der satellieten zijn [2])

$$m_1 = 0.00003796\ (1+\lambda_1)$$
$$m_2 = 0.00002541\ (1+\lambda_2)$$
$$m_3 = 0.00008201\ (1+\lambda_3)$$
$$m_4 = 0.00004523\ (1+\lambda_4).$$

De massa van de zon is $M = 1047.40\ (1+\Sigma\, m_i)$, of

$$M = 1047.600$$

Voor de afplattingsgrootheden J en K nemen wij

$$J = 0.02186^5\ (1+\lambda_0) \qquad K = 0.00259\ (1+\lambda_5).$$

Deze komen alleen voor in de combinaties Jb^2 en Kb^4, waarvan de geadopteerde waarden zijn, in onze eenheden uitgedrukt

$$\log Jb^2 = 5.9969318 - 10$$
$$\log Kb^4 = 2.72766 - 10.$$

De middelbare afstand van de zon tot Jupiter is, in onze eenheid uitgedrukt

$$\log A = 2.865871.$$

---

[1]) Schets eener nieuwe theorie der satellieten van Jupiter, deze Verslagen, Deel XXVI, blz. 1374 en 1476.

[2]) Zie Annalen van de Sterrewacht te Leiden, Deel XII, Eerste Stuk, Appendix.

De middelbare anomaliën der satellieten in de intermediaire baan zijn

$$l_i = c_i \tau$$

en de middelbare lengtes zijn

$$\lambda_i = \lambda_{00} + \pi_{i_0} + (c_i - \varkappa)\,\tau$$

waar λ_{00} de lengte is van de als oorsprong gekozen oppositie van II en III, terwijl

$$\pi_{10} = \pi_{30} = \pi_{40} = 0, \qquad \pi_{20} = 180^\circ.$$

Men heeft

$$c_1 = 4$$
$$c_2 = 2$$
$$c_3 = 1$$
$$c_4 = 0.43697298$$
$$\varkappa = 0.0144839248.$$

De waarden van c_i, $\varkappa$, M en A worden als absoluut bekend en niet voor verbetering vatbaar beschouwd, terwijl de correcties λ_i tot de geadopteerde waarden der massa's en afplattingsgrootheden in de formules opgenomen zullen worden.

De storingsfunctie is gegeven door de formule (15). [1])

Deze wordt ontwikkeld tot een reeks van den vorm

$$R = -\tfrac{1}{2}\frac{(c_i-\varkappa)(1-\mu_i)}{1+m_i}\,\Sigma\,(C_i)^n_q\; e^n_i \cos q l_i$$
$$+\tfrac{1}{2}\frac{(c_i-\varkappa)(1-\mu_i)}{1+m_i}\,\Sigma_j\,\frac{\mathrm{a}_i}{\mathrm{a}_j}\,m_j\,\Sigma\,\Pi^{n,n'}_{q,q'}\,(b_{ij})_p\; e^n_i\; e^{n'}_j \cos(p\lambda_j - p\lambda_i + q l_i + q' l_j)$$
$$-\frac{(c_i-\varkappa)(1-\mu_i)}{1+m_i}\,\Sigma_j\,\frac{\mathrm{a}_i^2}{\mathrm{a}_j^2}\,m_j\,\Sigma\,Q^{n,n'}_{q,q'}\; e^n_i\; e^{n'}_j \cos(\lambda_j - \lambda_i + q l_i + q' l_j)$$

De bovenste lijn is wat wij zullen noemen het „additioneele" deel van de storingsfunctie en bevat de afplattingstermen benevens de termen met den onbepaalden parameter μ_i. Het hangt alléén van de elementen van den gestoorden satelliet i af.

De tweede lijn is het principale deel der storingsfunctie. Zoo als zij hier geschreven is geldt zij voor het geval dat de storende satelliet de buitenste is, dus $j > i$. Is de gestoorde satelliet de buitenste, dus $i > j$, dan moet de factor $\mathrm{a}_i/\mathrm{a}_j$ vervallen en

$$\Pi^{n,n'}_{q,q'}\,(b_{ij})_p \text{ vervangen worden door } \Pi^{n',n}_{-q',-q}\,(b_{ji})_p.$$

---

[1]) Deze Verslagen Deel XXVI blz. 1383. In deze formule moet binnen de haak in de bovenste lijn staan $\left[\frac{1}{3}\frac{J_i}{\varrho_i^3} + \frac{1}{10}\frac{K_i}{\varrho_i^5}\right]$.

$\Pi^{n,n'}_{q,q'}$ zijn de bekende operatoren van NEWCOMB, en $(b_{ij})_p$ zijn de coefficienten van LAPHAAR in de ontwikkeling van a'/Δ.

De derde lijn is het complementaire deel der storingsfunctie. De coefficienten $Q^{n,n'}_{q,q'}$ verschillen van de gewoonlijk gebruikte door de termen met J_j en K_j. De waarden van $(C_i)^n_q$ en $Q^{n,n'}_{q,q'}$ zijn gegeven in Annalen Leiden XII, 1, blz. 22 en 23.

Van deze storingsfunctie gebruiken wij vóor de bepaling van de intermediaire baan alleen het niet-periodieke deel $[R_i]$. Wij voegen hieraan toe die termen van het seculaire deel der storingsfunctie voor de werking van de zon, die geen hoekvariabelen van de zon bevatten. Deze zijn, met voldoende nauwkeurigheid

$$\frac{(c_i-\varkappa)(1-\mu_i)}{1+m_i}\frac{\mathrm{a}_i^3}{A^3}M\left[\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{8}i_\omega^2+\tfrac{3}{8}(\mathrm{e}_i^2+e_0^2)\right],$$

als e_0 de excentriciteit en i_0 de helling van de zonsbaan is.

De storingsfunctie is ontwikkeld naar machten van e_i. Daarom heb ik ook in plaats van η_i als onbekende ingevoerd $\mathrm{e}_i=\eta_i\sqrt{1-\frac{1}{4}\eta_i^2}$. De vergelijkingen die de grootheden μ_i en e_i bepalen worden dan, in plaats van (18) en (19)

$$a_i\frac{\partial\,[R_i]}{\partial\,a}+\tfrac{1}{4}\varkappa\,\mathrm{e}_i^2=0$$

$$\frac{\partial\,[R_i]}{\partial\,e_i}\sqrt{1-\mathrm{e}_i^2}+\varkappa\,\mathrm{e}_i=0$$

Noemt men $[R'_i]$ de niet-periodieke termen van de principale en complementaire deelen der storingsfunctie, dan worden deze beide vergelijkingen

$$\frac{\mu_i}{1-\mu_i}-[J_i+\tfrac{1}{2}K_i]-(\tfrac{2}{3}J_i+\tfrac{5}{2}K_i)\mathrm{e}_i^2+\tfrac{1}{2}\frac{M}{1+m_i}\frac{\mathrm{a}^3}{A^3}+$$

$$+\frac{\varkappa\,\mathrm{e}_i^2}{4\,(c_i-\varkappa)(1-\mu_i)}+\frac{1}{(c_i-\varkappa)(1-\mu_i)}a_i\frac{\partial\,[R'_i]}{\partial a_i}=0\quad .\quad .\quad (1)$$

$$A_i\,\mathrm{e}_i+2\,(c_i-\varkappa)(1-\mu_i)\,J_i\,\mathrm{e}_i^3+(1-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}_i^2)\frac{\partial\,[R'_i]}{\partial \mathrm{e}_i}=0\quad .\quad .\quad (2)$$

$$A_i=\varkappa+(c_i-\varkappa)(1-\mu_i)(J_i+K_i)+\tfrac{3}{4}\frac{(c_i-\varkappa)\;(1-\mu_i)}{1+m_i}M\frac{\mathrm{a}_i^3}{A^3}.$$

De eerste vergelijking geeft direct $\mu'_i=\dfrac{\mu_i}{1-\mu_i}$. Dan is a_i bepaald door

$$\mathrm{a}_i^3\,(c_i-\varkappa)^2=(1+m_i)(1+\mu_i').$$

Voor de oplossing van de vergelijkingen (1) en (2) zijn wij uitgegaan van de benaderingen [1])

$log\, a_1 = 9.5997740-10$	$e_1 = 0.00404164$
$log\, a_2 = 9.8015496-10$	$e_2 = 0.00936330$
$log\, a_3 = 0.0042524$	$e_3 = 0.00059680$
$log\, a_4 = 0.2494696$	$e_4 = 0$

De coefficienten van LAPLACE behoorende bij deze waarden van a_i werden afgeleid uit de door SOUILLART gebruikte waarden, door de vereischte correcties toe te voegen om SOUILLART's resultaten tot onze waarden voor de verhoudingen der halve grootte assen te herleiden. Daarna werden met deze coefficienten de in de vergelijkingen (1) voorkomende operatoren van NEWCOMB, en de andere coefficienten van die vergelijkingen, bepaald, en uit deze vergelijkingen de waarden van μ'_i opgelost, en de hiermee overeenkomende waarden van a_i berekend. De coefficienten van LAPLACE werden dan op deze nieuwe waarden van a_i gereduceerd, en nieuwe waarden van μ'_i werden bepaald, die slechts onmerkbaar van de eerste afweken. De zoo bepaalde waarden van a_i werden als definitief beschouwd, en werden gebruikt als grondslag voor een geheel nieuwe berekening der coefficienten van LAPLACE.

Met deze coefficienten werden dan de voor de vergelijkingen (2) noodige operatoren van NEWCOMB gerekend. De vergelijkingen (2) zijn niet, als (1) onafhankelijk van elkaar, doch moeten door successieve benadering worden opgelost. De benaderingen, die zeer snel convergeerden, werden voortgezet zoolang de negende decimaal van e_i er nog door veranderde. De aldus afgeleide waarden van e_i zijn de definitieve. Zij werden nog in plaats van de eerst gebruikte in de vergelijkingen (1) gesubstitueerd, doch dit gaf geen verandering meer in de waarden μ'_i en a_i. Hiermede zijn dus de elementen van de intermediaire baan bepaald. De verschillende termen waaruit μ'_i is opgebouwd, worden hier gegeven. De termen gemerkt „*add.*" zijn de tweede en derde van de formule (1), „$\varkappa$" is de vijfde en „*zon*" de vierde, terwijl het effect van den laatsten term voor iedere storende satelliet afzonderlijk gegeven wordt. De grootheden $\varkappa$ en e_i worden als van de eerste orde beschouwd, de massa's en J_i zijn van de tweede orde, een term die den factor me^2 bevat, is dus b.v. van de vierde orde. Wij vonden [2])

[1]) Zie Leiden, Annalen XII, 1, blz. 52 en 53.

[2]) De berekeningen werden uitgevoerd met twee decimalen meer dan hier gepubliceerd worden. Daardoor kan het voorkomen dat de som der afzonderlijke termen een eenheid der laatste decimaal verschilt van de som.

μ'_1 : *add.* :	2e orde	+	·000 62824	+	·000 62826
	4e ,,	+	2		
$\varkappa$:	3e ,,			—	3
zon :	3e ,,			—	8
m_2 :	2e ,,	—	·000 00552	—	507
	3 ,,	+	48		
	4e ,,	—	3		
m_3 :	2e ,,			—	303
m_4 :	2e ,,			—	27
				$\mu'_1 =$ +	·00061977

μ'_2 : *add.* :	2e orde	+	·000 24791	+	·000 24794
	4e ,,	+	3		
$\varkappa$:	3e ,,			—	32
zon :	3e ,,			—	34
m_1 :	2e ,,	+	·000 05599	+	5328
	3e ,,	—	281		
	4e ,,	+	10		
m_3 :	2e ,,	—	·000 01761	—	1609
	3e ,,	+	157		
	4e ,,	—	5		
m_4 :	2e ,,			—	119
				$\mu'_2 =$ +	·000 28328

μ'_3 : *add.* :	2e orde			+	·000 09739
zon :	3e ,,			—	136
m_1 :	2e ,,			+	4313
m_2 :	2e ,,	+	·000 03738	+	3628
	3e ,,	—	114		
	4e ,,	+	3		
m_4 :	2e ,,			—	643
				$\mu'_3 =$ +	·000 16901

μ'_4 : *add.* :	2e orde	+	·000 03148
zon :	3e ,,	—	741
m_1 :	2e ,,	+	3946
m_2 :	2e ,,	+	2816
m_3 :	2e ,,	+	11069
		$\mu'_4 =$ +	·000 20238

Hieruit vindt men

$$\log a_1 = 9\cdot 559\ 77215 - 10 + \delta \log a_1$$
$$\log a_2 = 9\cdot 801\ 46241 - 10 + \delta \log a_2$$
$$\log a_3 = 0\cdot 004\ 26052 \qquad + \delta \log a_3$$
$$\log a_4 = 0\cdot 249\ 49217 \qquad + \delta \log a_4$$

De correcties $\delta \log a_i$ zijn toegevoegd om rekening te kunnen houden met eventueele correcties λ_i tot de massa's en de afplattingsgrootheden. Stelt men tevens

$$e_i = e_{i_0}(1 + \eta_i)$$

dan kan ook de onzekerheid der coefficienten e_i in rekening gebracht worden. Wij vinden

$$10^7\, \delta \log a_1 = + 907\, \lambda_0 + 2\, \lambda_5 + 55\, \lambda_1 - 7\, \lambda_2 - 4\, \lambda_3$$
$$10^7\, \delta \log a_2 = + 359\, \lambda_0 + 77\, \lambda_1 + 22\, \lambda_2 - 22\, \lambda_3 - 2\, \lambda_4 - \eta_1 - \eta_2$$
$$10^7\, \delta \log a_3 = + 140\, \lambda_0 + 62\, \lambda_1 + 52\, \lambda_2 + 119\, \lambda_3 - 9\, \lambda_4 - \eta_2$$
$$10^7\, \delta \log a_4 = + 45\, \lambda_0 + 57\, \lambda_1 + 41\, \lambda_2 + 160\, \lambda_3 + 66\, \lambda_4$$

Voor de coefficienten A_i van den eersten term der vergelijkingen (2) vinden wij:

	I	II	III	IV
$\varkappa$	0·014 48392	0·014 48392	0·014 48392	0·014 48392
add.	2 50655	49242	9599	1330
zon.	50	100	201	469
A_i	0·016 99097	0·014 97735	0·014 58193	0.014 50191

De tweede term is te verwaarloozen voor de satellieten III en IV. Voor I en II geeft hij een bijdrage van resp. —2 en —5 eenheden der 8^e^ decimaal tot e_i.

Voor den derden term vinden wij

$$10^{16}\left(1 - \tfrac{1}{2} e_1^2\right) \frac{\partial [R'_1]}{\partial e_1} :$$

m_2 : 2e orde	— 752429			
3e ,,	+ 43589			
4e ,,	— 1908	— 710677		
5e ,,	+ 73			
6e ,,	— 3			
m_3 : 3e ,,	+ 801			
4e ,,	— 7	+ 793		
m_4 : 3e ,,		+ 70		
		— 709814		

$$10^{10}\left(1-\tfrac{1}{2}e_2^2\right)\frac{\partial [R'_2]}{\partial e_2}$$

m_1 :	2e orde	— 312553	
	3e „	+ 72951	
	4e „	— 3396	— 242876
	5e „	+ 125	
	6e „	— 3	
m_3 :	2e orde	—1198671	
	3e „	+ 42122	
	4e „	— 930	— 1157462
	5e „	+ 18	
m_4 :	3e „		+ 368
			— 1399970

$$10^{10}\left(1-\tfrac{1}{2}e_3^2\right)\frac{\partial [R'_3]}{\partial e_3}$$

m_1 :	3e orde	— 75	— 72
	4e „	+ 4	
m_2 :	2e „	— 100444	
	3e „	+ 13874	— 86928
	4e „	— 366	
	5e „	+ 7	
m_4 :	3e		+ 77
			— 86923

$$10^{10}\left(1-\tfrac{1}{2}e_4^2\right)\frac{\partial [R'_4]}{\partial e_4}$$

m_1	3e orde	+ 5
m_2	3e „	+ 51
m_3	3e „	— 71
		— 15

De termen van de 6e orde zijn niet direct berekend, maar verkregen door extrapolatie.

Men vindt hieruit:

$$e_1 = 0{\cdot}004\ 17757\ (1+\eta_1)$$
$$e_2 = 0{\cdot}009\ 34720\ (1+\eta_2)$$
$$e_3 = 0{\cdot}000\ 59610\ (1+\eta_3)$$
$$e_4 = 0{\cdot}000\ 00010\ (1+\eta_4)$$

Voor de waarden van η_i vind ik

$$\eta_1 = -\ {\cdot}14356\ \lambda_0 - {\cdot}00049\ \lambda_5 - {\cdot}00683\ \lambda_1 + {\cdot}98651\ \lambda_2 - {\cdot}03338\ \lambda_3 -$$
$$-\ {\cdot}00009\ \lambda_4 + {\cdot}021\ \lambda_0^2 + {\cdot}001\ \lambda_0\lambda_1 - {\cdot}140\ \lambda_0\lambda_2 + {\cdot}006\ \lambda_0\lambda_3 -$$

$- \cdot 006\, \lambda_1\lambda_2 + \cdot 001\, \lambda_1\lambda_3 - \cdot 013\, \lambda_2^2 + \cdot 034\, \lambda_2\lambda_3 + \cdot 02\, \lambda_0^2\lambda_2$

$\eta_2 = - \cdot 02951\, \lambda_0 + \cdot 16326\, \lambda_1 - \cdot 01272\, \lambda_2 + \cdot 77826\, \lambda_3 - \cdot 00024\, \lambda_4 +$
$+ \cdot 001\, \lambda_0^2 - \cdot 002\, \lambda_0\lambda_1 + \cdot 002\lambda_0\lambda_2 - \cdot 024\lambda_0\lambda_3 - \cdot 005\lambda_1^2 + \cdot 010\, \lambda_1\lambda_2$
$+ \cdot 030\, \lambda_1\lambda_3 - \cdot 001\, \lambda_2\lambda_3 - \cdot 018\, \lambda_3^2,$

$\eta_3 = - \cdot 0023\, \lambda_0 - \cdot 0215\, \lambda_1 + \cdot 9878\, \lambda_2 - \cdot 1068\, \lambda_3 - \cdot 0008\, \lambda_4 - \cdot 02\, \lambda_1\lambda_2 -$
$- \cdot 01\, \lambda_2^2$

$\eta_4 = + 0 \cdot 1\, \lambda_0 - 1 \cdot 0\, \lambda_1 + 1 \cdot 0\, \lambda_2 + 1 \cdot 6\, \lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 + 2\, \lambda_2\lambda_3$

De coordinaten der satellieten in de intermediaire baan worden bepaald door de formules

$$r_i = a_i\, \varrho_i,$$
$$w_i = \lambda_{00} + \pi_{i_0} + (c_i - \varkappa)\, \tau + E_i$$
$$= \lambda_{i_0} + n_i t + E_i,$$

waar ϱ_i en E_i de gewone elliptische waarden voor den radius-vector en de middelpuntsvergelijking zijn.

Men heeft, in astronomische eenheden:

$$log\, a_1 = 7 \cdot 450\ 13884 - 10$$
$$log\, a_2 = 7 \cdot 651\ 82910 - 10$$
$$log\, a_3 = 7 \cdot 854\ 62721 - 10$$
$$log\, a_4 = 8 \cdot 100\ 30886 - 10$$

Uit de gevonden waarden van e_i volgt:

$\varrho_1 = 1.000\ 00873$
$- \cdot 004\ 17755 \cos 4\tau \qquad E_1 = + 0^\circ \cdot 478714 \sin 4\tau$
$- 873 \cos 8\tau \qquad + 1250 \sin 8\tau$
$- 3 \cos 12\tau \qquad + 5 \sin 12\tau$

$\varrho_2 = 1 \cdot 000\ 04368$
$- \cdot 009\ 34684 \cos 2\tau \qquad E_2 = + 1^\circ.071098 \sin 2\tau$
$- 4368 \cos 4\tau \qquad + 6258 \sin 4\tau$
$- 36 \cos 6\tau \qquad + 50 \sin 6\tau$

$\varrho_3 = 1 \cdot 000\ 00018$
$- 59610 \cos \tau \qquad E_3 = + 0^\circ \cdot 068308 \sin \tau$
$- 18 \cos 2\tau \qquad + 25 \sin 2\tau$

$\varrho_4 = 1$
$- \cdot 000\ 00010 \cos c_4\tau \qquad E_4 = + 0^\circ.000012 \sin c_4\tau$

De ongelijkheden in lengte zijn hier in graden uitgedrukt.

De hoek τ wordt geteld van af de oppositie van II en III op 1899, Juni 28, $11^u\ 47^m\ 35^s$ midd. tijd van Greenwich. (Zie „Schets", blz. 1384, noot).

Scheikunde. — De Heer JAEGER doet, mede namens den Heer J. J. WOLDENDORP, een mededeeling: „*Onderzoekingen over* PASTEUR'S *Beginsel betreffende het Verband tusschen Molekulaire en Kristallografische Dissymetrie. IX. Over het Kalium-Chroom-Malonaat en zijne Splitsing in Optische Antipoden*".

§ 1. In aansluiting bij de met succes uitgevoerde splitsing van het racemische *Kalium-Rhodium-Malonaat* in zijne beide optische antipoden [1]), werden pogingen gedaan, om ook de complexe malonaten van de overige driewaardige metalen dezer reeks te verkrijgen, en deze in hunne optisch-actieve componenten te splitsen. Deze bemoeïingen waren tot dusverre vruchteloos in het geval van het overeenkomstige *kobalti-zout*, en wel uit hoofde van de buitengewoon geringe stabiliteit van het *kalium-kobalti-malonaat*, hetwelk zich in oplossing, zelfs in het donker, snel door hydrolyse ontleedt en tot *kobalto*-zout gereduceerd wordt.

Daarentegen bleek het wèl mogelijk, om het *kalium-chroom-malonaat* in zijne optische antipoden te splitsen. Weliswaar worden deze proefnemingen buitengemeen bemoeilijkt door de omstandigheid, dat de optisch actieve componenten in oplossing zeer snel autoracemiseeren, alsook door de groote oplosbaarheid en andere minder gunstige eigenschappen dezer *chroom*-verbinding, zoodat de resultaten dan ook niet die scherpte bezitten, welke men in de tot dusverre onderzochte gevallen steeds kon bereiken. Nochtans kan omtrent deze proeven hier het volgende medegedeeld worden.

§ 2. Het voor deze proefnemingen noodige racemische zout, werd op de volgende wijze verkregen. Eene oplossing van 15 gram *kaliumbichromaat* en 35 gram zuiver *malonzuur* werd op het waterbad verwarmd: de vloeistof begint zich dan na korten tijd onder koolzuur-ontwikkeling donkerder te kleuren. Als de reactie afgeloopen en de koolzuurontwikkeling ten einde is, wordt de oplossing geneutraliseerd met behulp van 15 gram *koolzure kali*, zoodat zij tenslotte zwak alkalisch reageert. Eene geringe overmaat van alkali is gewenscht, aangezien zich uit zure oplossingen moeilijk kristallen vormen; zulke zure oplossingen leveren namelijk bij concentreeren

---

[1]) F. M. JAEGER en W. THOMAS, deze Verslagen **27**. 93. (1918).

slechts eene strooperige massa. Zelfs ondanks de zooeven genoemde voorzorgen zetten zich in het algemeen slechts onvolkomen ontwikkelde kristallen met gebogen vlakken en afgeronde ribben af, die nauwkeurige meting niet toelaten. Door zeer langzame verdamping van de waterige oplossingen van het zuivere zout werden tenslotte toch nog enkele beter gevormde, donker gekleurde prismatische kristallen, of parallelogramvormige plaatjes verkregen. Volgens analyse bevatten zij drie molekulen kristalwater.

§ 3. Het racemische *kalium-chromi-malonaat*: $K_3\{Cr(C_3H_2O_4)_3\} +$ $+ 3H_2O$ is triklien-pinakoïdaal, evenals het overeenkomstige *ferri*-zout, waarmede het echter, ondanks enkele analogieën in hoekwaarden, *niet* isomorf is, — zooals trouwens reeds het afwijkende watergehalte (het *ferri*-zout heeft $4H_2O$) laat verwachten.

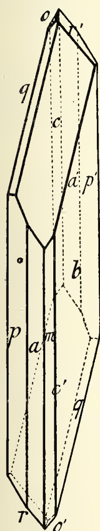


Fig. 1.
Racemisch Kalium-Chroom-Malonaat.

De assenverhouding is:

$$a : b : c = 2{,}4578 : 1 : 0{,}9907.$$

$A = 111^\circ\ 18'$. $\alpha = 134^\circ\ 52'$.
$B = 121^\circ\ 16'$. $\beta = 139^\circ\ 37'$.
$C = 67^\circ\ 53'$. $\gamma = 44^\circ\ 48'$.

Waargenomen vormen: $b = \{010\}$, overwegend, vrij sterk glanzend, doch veelal gekromd en veelvoudige reflexen leverend; $a = \{100\}$, sterk glanzend, doch veel smaller dan b; $p = \{5\bar{1}0\}$, breeder dan a, en meestal met gekromde vlakken; $m = \{110\}$, smal, doch goed spiegelend; $c = \{001\}$, ongeveer even breed als p, en zeer glanzend; $q = \{0\bar{1}1\}$, veel smaller dan c, doch goede spiegelbeelden leverend; $r = \{\bar{1}01\}$, slechts ondergeschikt en smal, slecht ontwikkeld, maar scherpe reflexen gevend; $o = \{\bar{3}\,\bar{5}\,3\}$, goed ontwikkeld, soms afwezig, en steeds glanzend. De kristallen hebben den vorm van dikke plaatjes volgens twee parallele vlakken van b, of wel van korte prisma's, met verlenging in de richting van de c-as. (Fig. 1).

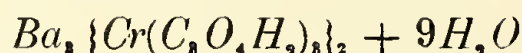
Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$b : c = (010) : (001) =$ *	68°42′	—
$c : a = (001) : (100) =$ *	58 44	—
$b : m = (010) : (110) =$ *	26 21	—
$m : a = (110) : (100) =$ *	85 46	—
$c : q = (001) : (0\bar{1}\bar{1}) =$ *	51 45	—

Hoekwaarden:	*Gemeten:*	*Berekend:*
$a:r = (100):(10\bar{1}) =$	97 26	97° 34′
$r:c = (10\bar{1}):(00\bar{1}) =$	23 50	23 42
$a:p = (100):(5\bar{1}0) =$	48 25	48 17
$p:b = (5\bar{1}0):(010) =$	19 38	19 36
$b:o = (010):(35\bar{3}) =$	34 57	34 34

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

De kristallen zijn duidelijk dichroïtisch; paars en groen, doch dit dichroïsme is op {010} niet merkbaar. De uitdoovingsrichting op b maakt met de c-as een hoek van 23°, en deelt den scherpen hoek tusschen de ribben $m:b$ en $c:b$ ongeveer midden door. In convergent licht ziet men éene optische as uittreden onder kleinen hoek met de normaal op {010}; enorme dispersie, met den assenhoek voor rood grooter dan die voor groen.

§ 4. Het kaliumzout werd in oplossing met behulp van de berekende hoeveelheid *bariumchloride* omgezet in het overeenkomstige *barium*zout, aan hetwelk volgens de analyse de formule:



$$Ba_3 \{Cr(C_3O_4H_2)_3\}_2 + 9H_2O$$

toekomt; het *Ba*-gehalte is 31.19 %, het watergehalte 12,46 %. De kleur van de *barium*-verbinding is licht violet, met grijzen weerschijn.

De splitsing van het zout in zijne optische antipoden geschiedde in dit geval met behulp van het *strychnine*-zout. Daartoe werd het zooeven genoemde *barium*-zout eerst door de berekende hoeveelheid 1 N. zwavelzuur omgezet in eene oplossing van het vrije, complexe *chroom-malonzuur*: $H_3\{Cr(C_3O_4H_2)_3\}$.

Te dien einde werden 10 gram van het *barium*zout met 35 ccm. N. H_2SO_4 gekookt, na een half uur het $BaSO_4$ afgefiltreerd, en de oplossing verdund op 80 ccm.; aan deze oplossing werden bij kookhitte 13 gram zuiver *strychnine* toegevoegd, de vloeistof snel gefiltreerd in een met ijs en keukenzout gekoelde kristalliseerschaal, en vervolgens aan zich zelf overgelaten.

Het in glinsterende, grijs-violette plaatjes uitgekristalliseerde zout werd afgezogen, en door wasschen met aether snel gedroogd.

De *strychnine*-bepaling, alsook de water-bepaling, maken het waarschijnlijk, dat de aldus verkregene verbinding een *zuur* zout is van de samenstelling: $(C_{21}H_{22}N_2O_2)_2\ H\{Cr(C_3O_4H_2)_3\} + 3H_2O$; het is, zooals blijken zal, een derivaat van het *links*draaiende *chroom-malonzuur*-ion.

Met behulp van oplossingen, die resp. 0,2515 gram (A), 0,7515 gram (B), en 0,1791 gram (C) *strychnine*-zout in 100 ccm. oplossing bevatten, werden voor eene reeks golflengten de specifieke en mole-

kulaire draaïingen bepaald; de buislengte was in elk geval 20 c.m. Later werden deze proeven nogmaals met verschillende andere praeparaten herhaald, en met oplossingen, die resp. 0,2805 gram (D), 0,3830 gram (E), en 0,2225 gram (F) van het *strychnine*-zout in 100 ccm. der vloeistof bevatten. De volgende waarde voor het molekulaire draaïngsvermogen $[M]$ werd in deze gevallen gevonden:

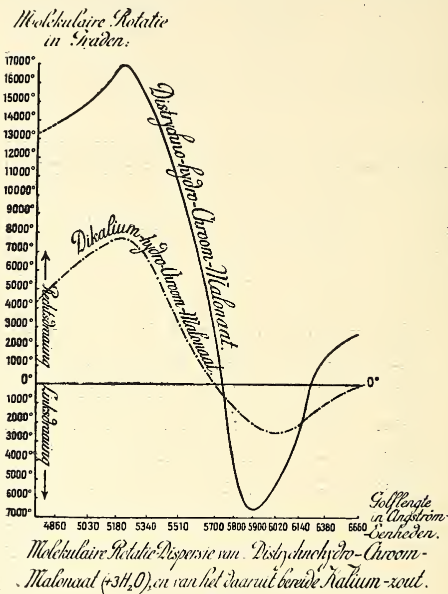
MOLEKULAIRE ROTATIE-DISPERSIE VAN HET LINKSCHE $STR_2 H \{Cr (C_3O_4 H_2)_3\} + 3 H_2 O$.

Golflengte in Angström-Eenheden:	*Waargenomen Molekulaire Rotatie's:*						*Waarschijnlijkste Waarden voor [M]:*
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	
4860	+ 12465°	+ 14170°	+ 13589°	+ 9827°	—	+ 10203°	+ 14000°
5030	14217	14889	14194	10213	12280	11664	+ 14890
5180	16763	15971	16005	12334	13545	14497	+ 16760
5340	13754	15032	14591	10405	12421	11176	+ 15000
5510	10960	—	8981	6166	—	6071	+ 10500
5700	430	—	2718	1927	—	1944	+ 1900
5800	—	—	—	—	—	— 3886	— 3900
5900	—	—	— 2508	— 6552	—	— 6802	— 6600
6020	—	—	—	— 4817	—	4859	— 4850
6140	— 3009	—	— 2718	3083	—	2430	— 2400
6380	+ 1504	+ 3453	+ 4229	+ 2119	+ 2229	+ 2186	+ 1800
6660	2364	4028	2178	2698	2722	2676	+ 2700

Het karakter der dispersie-kromme is in fig. 2 met behulp der in de laatste kolom vermelde, meest waarschijnlijke middelwaarden voor $[M]$ gegeven; de betrekkelijk aanzienlijke afwijkingen tusschen de verschillende waarnemingsreeksen moeten grootendeels op rekening gesteld worden van de alreeds ingetreden, gedeeltelijke racemisatie der oplossingen. Echter geven de metingen toch een globalen indruk van het algemeene karakter der dispersie.

Het algeheele verloop der dispersiekromme van het strychnine-zout herinnert volmaakt aan dat van de overeenkomstige lijnen bij de *kalium*zouten van het *chroom-*, en van het *kobalti-oxaalzuur*; dat karakter is trouwens tevens analoog aan dat van de kromme voor

het vrije *kalium-chroom-malonaat* (zie beneden). De autoracemisatie der oplossingen is niet te verhinderen; om haar ietwat te vertragen



Molekulaire Rotatie-Dispersie van: Distrychnohydro-Chroom-Malonaat ($+3H_2O$), en van het daaruit bereide Kalium-zout.

Fig. 2.

werd in enkele gevallen gebruik gemaakt van oplossingen in 50 % aceton. De absorptie-banden dezer oplossingen liggen ongeveer in de nabijheid van 5910 A. E. en van 4570 A. E.

Bij pogingen, om het *strychnine*-zout door omkristalliseeren te zuiveren, bleek het zóo snel te racemiseeren, dat het tenslotte slechts draaïngen vertoonde, aequivalent aan de hoeveelheid van het daarin bevatte *strychnine*; het daaruit vrijgemaakte *kalium*zout bleek eveneens geheel en al inactief te zijn. Het is dus wel uitgesloten, om langs dezen weg betere resultaten te verkrijgen.

§ 5. Uit het linksdraaiende *strychnine*-zout werd nu getracht het optisch-actieve *kalium*zout te winnen, door het in een mortiertje met zijn tienvoudig gewicht aan *joodkalium* samen te wrijven, zeer weinig koud water toe te voegen, het *strychnine-jodide* snel af te zuigen, en de gefiltreerde vloeistof met alkohol van 96 % te praecipiteeren.

Daarbij slaat het *kalium*-zout echter niet neer in den vorm van kleine kristalletjes, maar in dien van kleine bolletjes eener strooperige, donkergekleurde vloeistof. Zeer waarschijnlijk is dit weder een *zuur* zout, dat moeilijk en althans pas na langeren tijd vast wordt, en dat zich dus ook niet terstond door filtratie van de moederloog laat scheiden. Het is dan ook slechts mogelijk, om van deze zelfstandigheid de specifieke draaïng bij benadering te bepalen, terwijl het ook niet wel mogelijk is, om er eene vertrouwbare analyse van uit te voeren. In een aceton-water-mengsel werden de volgende waarden voor de specifieke rotatie $[\alpha]$ gevonden:

Golflengte in Angström-Eenheden:	*Waargenomen draaïng:*	*Specifieke Rotatie [α]:*	*Berekende Molekulaire Rotatie [M], voor een zout: $K_2H\{Cr(C_3O_4H_2)_3\}$:*
4860	+ 0°.48	+ 123°.1	+ 5385°
5030	0.61	156.4	6840
5180	0.69	176.9	7740
5340	0.60	153.8	6720
5510	0.29	74.36	3250
5700	+ 0.09 (?)	+ 23.08 (?)	+ 1030 (?)
6140	— 0.21	— 53.85	— 2360
6380	0.09	23.08	1030
6660	0.00	—	—

De waarden voor $[M]$ in de vierde kolom zijn berekend bij de onderstelling, dat men hier met een *kalium-hydro-chroom-malonaat* te doen heeft van de samenstelling: $K_2H\{Cr(C_3O_4H_2)_3\}$. Aangezien het zout zeker nog kristalwater bevat, zoo moeten deze waarden alle wel een 15 °/₀ grooter zijn, doch dit kan thans niet nader geverifieerd worden. (Zie ter vergelijking met het corresp. *strychnine*-zout, eveneens fig. 2).

Alle pogingen, om ook den rechtschen component in handen te krijgen, mislukten; zelfs de door Werner [1]) bij het overeenkomstige complexe *chromi-oxalaat* met succes gevolgde methode, nl. om uit *alkoholische* oplossingen het *strychnine*-zout van de andere antipode te winnen, — leverde hier nimmer iets anders dan een zout, hetwelk slechts het draaïingsvermogen van het daarin aanwezige *strychnine*

[1]) A. Werner, Ber. d. d. Chem. Ges. **45**. 3063, 3064. (1912).

vertoonde, en waaruit door KJ enkel een volkomen inactief kaliumzout gewonnen kon worden. Onder deze omstandigheden treedt dus blijkbaar òf geene splitsing, òf, waarschijnlijker, eene zeer snelle autoracemisatie in.

Proefnemingen met analoog-gebouwde zouten van het *wijnsteenzuur* leverden tot dusverre, wegens de bezwaren bij de splitsing ondervonden als gevolg van de bijzondere oplosbaarheidsverschijnselen, geen positief resultaat.

Laboratorium voor Anorganische en
Fysische Chemie der Rijks-Universiteit.

Groningen, Maart 1919.

Scheikunde. — De Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van den Correspondent Dr. A. W. K. DE JONG te Buitenzorg, over: *„De trimorphie van het allokaneelzuur".*

Zooals een vorige maal werd medegedeeld, is het ontstaan van éénzelfde dubbelzuur van normaal en allokaneelzuur naast de verschillende vormen van het allokaneelzuur in strijd met de opvatting van chemische isomerie voor de allokaneelzuurvormen.

STOBBE, de krachtigste verdediger van deze voorstelling, heeft met SCHÖNBURG [1]) een uitvoerig onderzoek ingesteld, dat volgens hen duidelijk heeft aangetoond, dat de allokaneelzuren chemisch isomeer zijn. Hun eerste reeks proeven [2]) met de bij 68° en 42° smeltende modificaties gaf aanleiding tot de volgende conclusie: „Aus den in diesem Abschnitte beschriebenen 70 Einzelversuchen geht hervor, dass die stabile 68° - Säure und die metastabile 42° - Säure bei Abwesenheit von Keimen unverändert umzukrystallisieren sind; die erstere aber mit Sicherheit nur dann, wenn bei dem Lösungsakte und bei den späteren Vorgängen die Temperatur ihres Schmelzpunktes bzw. des durch das Lösungsmittel erniedrigten Schmelzpunktes nicht erreicht wird, wenn also ein Schmelzen der 68° - Säurekrystalle vermieden wird. Tritt dieses ein, so kann 42° - Säure als Krystallisationsprodukt auftreten. Hiernach bewahren also die beiden Säuren in ihren Lösungen bei genau bekannten Bedingungen ihre Individualität. Die Lösungen beider Säuren sind trotz der gleichen Lichtabsorption und trotz der gleichen Leitfähigkeit doch verschieden. Die Allozimtsäure (68°) und die Isozimtsäure (42°) sind zwei chemisch isomere Verbindungen". Op blz. 233 van genoemde verhandeling vindt men deze conclusie ook tot het bij 58° smeltend zuur uitgebreid.

Het scheen me niet onmogelijk, dat de genoemde onderzoekers de slachtoffers van de kernen waren geworden, welke, zooals maar al te goed bekend is, bij deze zuurvormen zulk een op den voorgrond tredende rol spelen. Vooral was dit mogelijk, omdat uit hun verhandeling duidelijk blijkt, dat zij zich geen goede voorstelling van de kernen hebben gemaakt. Zij spreken wel van „beim Ein-

[1]) Ann. 402, 187.
[2]) l. c. 199.

füllen der Lösung etwa an den Wandungen entstandenen Keime" [1]), maar zij wijden geen voldoende aandacht aan de kernen, die in de oplossing kunnen voorkomen, noch aan de maar al te goed bekende luchtkernen.

Voordat medegedeeld wordt op welke wijze de proeven van STOBBE en SCHÖNBURG herhaald werden, is het wenschelijk de overwegingen aan te geven die aan de gevolgde wijze van werken ten grondslag liggen.

Onder kernen zijn molecule-complexen te verstaan, die van den vasten toestand bij het oplossen overblijven en die zich ook in de vloeistof bij het begin van de kristallisatie kunnen vormen.

Afhankelijk nu van het oplosmiddel zullen in de oplossing kunnen voorkomen kernen en enkelmoleculen of kernen, dubbelmoleculen en enkelmoleculen.

Maakt men een oplossing van een van de vormen van het allokaneelzuur, dan zal, afhankelijk van de temperatuur en van de concentratie, een volledige of een onvolledige dissociatie in enkelmoleculen ontstaan en wel zoodanig, dat hoe hooger de temperatuur en hoe kleiner de concentratie is, des te vollediger het uiteenvallen in enkelmoleculen zal wezen. Men zal dus 2 soorten van oplossingen kunnen maken, n.l. zulke die geheel bestaan uit enkelmoleculen en oplossingen, die, behalve deze, ook nog kernen bevatten; bij oplosmiddelen die de vorming van dubbelmoleculen toelaten zal men ook nog een derde soort van oplossingen kunnen maken, die alleen enkelmoleculen en dubbelmoleculen bevatten, terwijl de oplossing die kernen bevat, ook tevens dubbel en enkelmoleculen zal bezitten.

Terwijl zich in de oplossingen evenwichten instellen tusschen de verschillende soorten van moleculen, waarvoor natuurlijk tijd noodig zal zijn en wel des te meer naarmate de moleculen sterker aan elkander verbonden zijn, de concentratie van de oplossing grooter en de temperatuur lager is, zullen zich boven de oplossingen ook evenwichten vormen tusschen de kernen, de dubbelmoleculen en de enkelmoleculen, welke evenwichten weer in verband staan met de samenstelling van de oplossing.

Nu is uit de onderzoekingen voldoende bekend, dat de luchtkernen van de allokaneelzuurvormen een lang leven hebben, waaruit reeds van zelf volgt dat het evenwicht in de lucht slechts zeer langzaam de veranderingen in de oplossing volgt. Het gevolg hiervan zal zijn, dat de lucht dikwijls nog kernen bevat, terwijl de oplossing reeds alleen uit enkelmoleculen bestaat.

---

[1]) l. c. 198.

Bij de proeven zal men daarom vooral die gevaarlijke luchtkernen moeten uitsluiten en tevens aan de oplossingen gelegenheid moeten geven om den evenwichtstoestand te bereiken.

In verband met deze overwegingen werden de proeven van STOBBE en SCHÖNBURG op de volgende wijze herhaald.

De oplossingen werden korter of langer tijd voor de distillatie bereid en bleven gedurende dien tijd in het donker staan. Gedurende deze periode werden zij een paar maal in een andere kolf overgeschonken, waarbij de luchtkernen werden uitgeschakeld door de oplossingen eerst in een kleine kolf te brengen, deze tot aan den rand te vullen, de lucht er boven weg te blazen en daarna de oplossing in de nieuwe kolf over te gieten.

Vóór het gebruik werden de kernen, die zich nog in de lucht boven de oplossing zouden kunnen bevinden, verwijderd, door buiten het laboratorium een klein maatglaasje tot aan den rand met de oplossing te vullen en de lucht er boven weg te blazen. Hierna werd de oplossing uit het maatglaasje door middel van een trechterbuis in een distillatiekolfje van 50 à 100 cM^3 gebracht, dat door een kurk, waardoor een glazen buis ging, die tot het midden van den bol van de kolf reikte, gesloten werd.

In de glazen buis bevond zich een wattenpropje, terwijl er van buiten een grootere wattenprop aan verbonden was, die in den hals van het kolfje paste en zich nu boven den aanzet bevond. De kolf en de glazen buis met de wattenproppen waren te voren enkele uren in een luchtwaterbad verhit en er werd bij het in elkander zetten voor gezorgd, dat de vingers geen inwendige deelen aanraakten.

Om toevallige infecties zooveel mogelijk uit te sluiten, werd nog een met het oplosmiddel verzadigde luchtstroom in een snel tempo gedurende ± 5 minuten door de kolf heen geleid. Deze stroom kwam door de buis in, waardoor de mogelijk aanwezige luchtkernen door den aanzet konden verwijderd worden. Hierna werd de kurk iets opgelicht en de groote wattenprop door middel van een uitgegloeide koperdraad beneden den aanzet van het kolfje gebracht, waarna het weer met de kurk gesloten werd.

Daar STOBBE en SCHÖNBURG gevonden meenen te hebben, dat het smelten van het 68° en 58° zuur, hetgeen in petroleumaether en water bij 50° en 40—42° plaats heeft, vermeden moet worden, omdat hierdoor 42° zuur gevormd zou worden, was het noodzakelijk het oplosmiddel bij 35° of lager te verwijderen. Bij deze temperatuur werd door hen geen omzetting van de twee hooger smeltende vormen in het 42° zuur gevonden.

Bij geringe concentratie van de oplossing had de distillatie meestal in het gedeeltelijk luchtledige plaats, terwijl bij hooger gehalte het oplosmiddel door een drogen luchtstroom bij de gewone temperatuur 25—30°, verwijderd werd. Na de distillatie en het verwijderen van de rest van het oplosmiddel door een drogen luchtstroom werd de kolf gesloten en in ijs geplaatst, waardoor na korter of langer tijd kristallisatie intrad.

De bereiding van het allokaneelzuur door belichten van een waterige natrium- of kaliumcinnamaat oplossing (ongeveer 1°/₀ zuur bevattend), werd eenigszins gewijzigd, waardoor een snellere omzetting verkregen werd, en tevens op gemakkelijke wijze het niet veranderde kaneelzuur op nieuw benut kon worden.

Er werden platte blikken bakken gebruikt waarin de oplossing in de ochtenduren belicht werd, terwijl het verdampte water dagelijks werd aangevuld. Na ongeveer 8—14 dagen belichten werden de oplossingen verwerkt.

Om het allokaneelzuur af te zonderen werd de oplossing tot ongeveer $^1/_{10}$ van het volume uitgedampt en koud met zwavelzuur aangezuurd. Na afkoeling werd het normaal kaneelzuur afgezogen, uitgewasschen en dadelijk na drogen (smelt het hierbij op het waterbad dan bevat het nog allokaneelzuur, dat door warme benzine er aan onttrokken kan worden) weder gebruikt voor de bereiding van een nieuwe oplossing.

Het filtraat werd met loog geneutraliseerd en de oplossing hierna uitgedampt tot begin van kristallisatie. Na afkoelen werd er zwavelzuur toegevoegd, waardoor het allokaneelzuur zich als olie afzonderde. Men neemt haar in benzine op en laat de benzineoplossing rustig kristalliseeren, waarbij zij zoo noodig met het 68° of het 58° zuur wordt ingeënt.

Deze vormen kristalliseeren in groote kristallen uit, die reeds op het oog en ook door hun smeltpunt gemakkelijk van de ruiten van het dubbelzuur van normaal en allokaneelzuur, dat slechts in geringe hoeveelheid optreedt, te onderscheiden zijn. Men krijgt op deze wijze in het begin bijna volkomen kleurlooze kristallen, die na eenmaal omkristalliseeren uit laagkokende benzine volkomen zuiver zijn; bij langer werken op de aangegeven wijze, verkrijgt men lichtgeel gekleurde kristallen die door beenzwart in alcoholische oplossing ontkleurd kunnen worden.

De waterige oplossing kan daarna nog met aether uitgeschud worden, en levert zoodoende nog een kleine hoeveelheid allokaneelzuur van geringere zuiverheid,

Het veranderen van het 68° zuur in het 58° zuur kan gemakkelijk

geschieden door de kristallen met wat water een kwart uur te koken waarna de kolf met een wattenprop gesloten wordt en nog even wordt doorgekookt. Na afkoelen zet zich het allozuur in oliedruppels af, die in ijs in het 42° zuur overgaan. Ent men die oplossing met de oliedruppels in met een spoor van het 58° zuur, dan krijgt men bij rustig staan mooie naalden van dit zuur.

Het onderzoek gaf het volgend resultaat.

Petroleumaetheroplossingen van het 58° en het 68° zuur, die bij 25° verzadigd waren (ongeveer 0.26 gr. en 0.17 gr. in 5 cM^3 bevattend) en gedurende 8 dagen in het donker bleven staan bij 25—30°, *zonder dat er kristallen in de oplossing waren*, gaven na het verwijderen van het oplosmiddel bij de gewone temperatuur, door middel van een luchtstroom, een rest, die in ijs in het 42° zuur overging.

Oplossingen van geringere concentratie van een van deze twee zuurvormen leverden na 8 dagen in het donker gestaan te hebben, steeds het 42° zuur. Het gevormde 42° zuur bleef, zoolang de observatie duurde, ongeveer een maand, onveranderd.

Distilleerde men echter dadelijk na de bereiding het oplosmiddel af, dan gelukte het zelfs niet een oplossing, die maar 0,05 gr. van een van de twee zuurvormen in 5 c.M^3 bevatte in het 42° zuur om te zetten.

Petroleumaetheroplossingen, die gedurende 8 dagen voor de distillatie *met de kristallen van een van de twee hooger smeltende vormen in contact bleven*, gaven reeds bij of na het verdampen van het oplosmiddel kristallen van den vorm waarvan was uitgegaan.

Aan LIEBERMANN en TRUCKSÄSS [1]) gelukte het door de benzineoplossing te filtreeren en vervolgens te verhitten in een waterbad van 35° meermalen de kernen van de hooger smeltende zuren uit te schakelen.

Van 10 proeven waarbij 68° zuur gebruikt werd, gelukte de omzetting in het 42° zuur in 6 gevallen en van 4 met 58° zuur gaven 2 ditzelfde resultaat.

Waar het op deze wijze wellicht mogelijk was een snellere verwijdering van de kernen te verkrijgen dan door het totaal dissocieeren bij gewone temperatuur plaats heeft, werden ook in deze richting enkele proeven genomen. Dezelfde wijze van werken als bij de vorige proeven werd toegepast, zoodat de luchtkernen werden uitgeschakeld. Het verhitten op 35° had echter niet plaats. Gevonden werd dat, wanneer even te voren bereide bij de gewone tem-

---

[1]) Ber. 43, 411.

peratuur bijna verzadigde oplossingen door watten, gewoon filtreerpapier of wel door een quantitatief filter gefiltreerd werden, zij steeds de oorspronkelijke zuren terggaven; werden de oplossingen, ook die nog kristallen bezaten, na 24 uur staan gefiltreerd, dan werd dikwijls, ofschoon niet altijd, een rest verkregen, die tot het 42° zuur kristalliseerde. De oorzaak hiervan kan in een verandering in de grootte en ook van het aantal kernen gelegen zijn, of wel in beide oorzaken samen.

De omzetting van de kernen van het 58° en 68° zuur in de bij 25° verzadigde aethylaether- en benzoloplossingen zonder kristallen, gelukte zelfs niet na 14 dagen in het donker staan. De oorzaak hiervan moet zeer waarschijnlijk aan de groote concentratie, die deze oplossingen bezitten, geweten worden. Bij 25° lossen toch ongeveer 4.4 gr. 58° zuur in 1.6 gr. aethylaether op, ongeveer 4.6 gr. 58° zuur in 2.3 gr. benzol, ongeveer 6.6 gr. 68° zuur in 3.2 gr. aethylaether en ongeveer 4 gr. 68° zuur in 3 gr. benzol.

Een aetheroplossing, die 2 gr. 68° zuur, tot 5 c.M^3 gebracht, bevatte en een oplossing met 2.1 gr. van dit zuur in 3.6 gr. benzol gaven na 8 dagen in 't donker staan een rest, die tot 42° zuur kristalliseerde. Een oplossing, die 2 gr. 58° zuur in 1.6 gr. aether bevatte en een benzoloplossing met 1.8 gr. van dit zuur in 2.5 gr. van het oplosmiddel gaven na 2 maanden in 't donker staan een rest die tot 42° zuur kristalliseerde.

Door filtratie van bij 25° verzadigde aethylaether- en benzoloplossingen door middel van watten of fiiltreerpapier gelukte het niet deze kernvrij te maken, ook niet als de oplossingen reeds meer dan 10 dagen zonder kristallen gestaan hadden.

Uit het voorgaande blijkt, dat de overgang van het 58° en het 68° zuur in het 42° zuur in oplossing onafhankelijk van het smelten van deze vormen kan plaats hebben en dat zij bij 25—30° oplossingen kunnen geven, die afgezien van de verschillende concentraties identiek zijn, wanneer men maar zorgt, dat de kernen gelegenheid krijgen om zich om te zetten en de luchtkernen worden uitgeschakeld.

Wanneer echter de concentratie van de oplossing groot is, zooals bij aether- en benzoloplossingen mogelijk kan wezen, dan gelukte het niet de kernen te dissocieeren of door filtratie te verwijderen. In dit geval bestaat er zeer waarschijnlijk een evenwicht tusschen de kernen en de andere moleculen.

Een van de voornaamste argumenten van Stobbe en Schönburg voor chemische isomerie van deze zuurvormen vervalt hierdoor, terwijl het gevondene geheel in overeenstemming is met het trimorph zijn van de allokaneelzuren.

In verband met hetgeen STOBBE en SCHÖNBURG medegedeeld hebben aangaande de omzetting van het 42° en het 58° zuur in het 68° zuur bij —14° (ijs en keukenzout), was het van belang na te gaan of deze zelfde verandering ook in oplossing plaats had.

Verschillende oplosmiddelen werden gebruikt; de belangrijkste resultaten werden met water verkregen, waarom deze het eerst mogen worden medegedeeld.

Uitgegaan werd van het 68° zuur dat door koken met water vrij van 68° zuur kernen werd gemaakt; de oplossing werd zoover ingedampt, dat zij bij gewone temperatuur het zuur als olie afzette. Deze oplossing geeft bij afkoelen bij 0° kristallen van het 42° zuur. Door de aanwezigheid van een kleine hoeveelheid vloeibaar zuur kunnen ongewenschte infecties dadelijk herkend worden.

Kleine hoeveelheden van deze oplossing werden in de kolfjes met de wattenproppen gebracht en na het vullen en het doorvoeren van lucht had nog een opkoken van de oplossing plaats.

Na afkoelen werden de kolven in het koud makend mengsel geplaatst. De temperatuur van dit mengsel was bij een deel van de proeven ongeveer —10°, bij een ander deel ongeveer —16°. Na 24 uur waren deze temperaturen 0° en —5° (het mengsel bevond zich in een hooikist).

Het afkoelen werd zoolang voortgezet totdat er omzetting had plaats gehad, hetgeen aan de sterkere kristallisatie en ook aan den vorm van de kristalletjes gemakkelijk te zien is.

Nadat het ijs gesmolten was, werd de kolf geopend, de buis met de wattenproppen er uit genomen en de oplossing voorzichtig uitgegoten, zoodat de kristallen zooveel mogelijk in de kolf bleven. Hierna werd de kolf weer op de gebruikelijke wijze gesloten en de enkele druppels water door een drogen luchtstroom bij gewone temperatuur verwijderd, waarna het smeltpunt bepaald werd.

Gevonden werd, dat, wanneer de begintemperatuur van het bad —10° was steeds het 58° zuur gevormd werd, terwijl wanneer deze —16° was ongeveer evenveel malen het 58° zuur als het 68° zuur optraden (nl. 5 à 58° tegen 7 à 68°). Blijkbaar is er een temperatuurtraject waarin het 58° zuur gevormd wordt, terwijl bij lagere temperatuur het 68° zuur ontstaat.

De omzetting bij —10° kan soms eerst na enkele dagen intreden, die bij —16° heeft reeds na enkele uren plaats. Hierdoor is tevens een gemakkelijk middel gevonden om zich deze zuurvormen te verschaffen.

De proeven met een laag kokende benzine-oplossing werden als volgt genomen. Er werd uitgegaan van een verdunde benzine-oplossing

van het 68° zuur, die bij gewone temperatuur vrij van kernen was gemaakt.

Deze oplossing werd in de kolfjes verdeeld, een snelle luchtstroom doorgevoerd en daarna werd, nadat de wattenprop onder den aanzet geplaatst was, een groot deel van het oplosmiddel door distillatie verwijderd. Hierna had het afkoelen plaats.

Gevonden werd, dat zoowel als de begintemperatuur —10° was als wanneer zij —16° was, enkele malen het 58° zuur ontstond, maar dat het meest het 68° zuur gevormd werd.

Benzoloplossingen op overeenkomstige wijze bereid gaven bij —10° alleen bij uitzondering een omzetting te zien, waarbij dan het 68° zuur optrad; bij —16° ontstond steeds na 24 uur het 68° zuur.

Verder werden nog aan kristallen van het 42°, het 58° en het 68° zuur in de kolfjes met de wattenproppen enkele druppels van de oplosmiddelen gevoegd, zoodat er nog kristallen overbleven. Het oplosmiddel werd door het wattenpropje in de glazen buis in de kolf gebracht, waarbij het buiten de kurk stekende deel van de glazen buis eerst verhit werd om infectie te voorkomen. Gevonden werd dat het 58° en het 68° zuur niet veranderd werden, het 42° zuur echter wel, waarbij dezelfde omzettingen als met de oplossingen werden gevonden.

Daar door STOBBE en SCHÖNBURG[1]) werd medegedeeld, dat het 42° zuur en ook het 58° zuur in vasten toestand bij afkoelen in ijs en keukenzout in het 68° zuur overgaan en de door mij verkregen resultaten aanleiding gaven om aan de juistheid van het door genoemde onderzoekers medegedeelde te twijfelen, werden ook de vaste stoffen in de kolfjes met wattenproppen, na vooraf zorgvuldig gedroogd te zijn, (bij het 42° zuur werd de kolf op 80°—90° verhit) gedurende 6 dagen in ijs en keukenzout gekoeld. Het bleek dat geen van de 3 zuurvormen door het koelen veranderde.

Daar STOBBE en SCHÖNBURG steeds met capillairen hebben gewerkt, werd nog een hoeveelheid van de gedroogde zuren uit de kolfjes in capillairen verdeeld. Ook deze vertoonden na 6 dagen koelen geen smeltpuntsveranderingen.

De vaste stoffen worden dus bij deze wijze van koelen niet omgezet. Is het 42° zuur echter vochtig dan kan omzetting plaats hebben; hieraan zijn zeer waarschijnlijk de door genoemde onderzoekers medegedeelde omzettingen van dit zuur te wijten.

De omzetting van het 58° in het 68° zuur bij koelen door hen medegedeeld, is niet te begrijpen of men zou moeten aannemen, dat

[1]) l.c. 218, 236.

zij voor het koelen eigenlijk maar 10 buisjes gebruikt hebben, die na bepaalde tijden op hun smeltpunt onderzocht werden. In dat geval is de kans toch niet uitgesloten, dat het 42° zuur zich vormt door het smelten, daar dit in capillairen gemakkelijker plaats heeft dan men uit de opgaven van genoemde onderzoekers (blz. 239) zou opmaken. Uit het 42° zuur in vochtigen toestand zou dan het 68° zuur gevormd zijn.

Verder zou uit het onderzoek zijn af te leiden, dat er een groot verschil bestaat tusschen dubbelmoleculen en kernen. De omzettingen toch, welke werden medegedeeld, hebben alleen plaats in oplossingen van voldoende concentratie, terwijl zelfs een chloroform oplossing die 35.4% (gewichts) allokaneelzuur bevatte en waarin dus zeker dubbelmoleculen waren geen omzetting na 6 dagen koelen vertoonde. Het wil me voorkomen, dat dit hierdoor te verklaren is, dat alleen oplossingen, die kernen bevatten, veranderd kunnen worden en dat er maar één soort dubbelmoleculen bestaat.

De voorstelling van VAN DER WAALS, dat dubbelmoleculen slechts bestaan in een tijdelijke nadering van de enkelmoleculen zou hierdoor aan waarschijnlijkheid winnen.

Het verder onderzoek moet hierin nog helderheid brengen.

In de kernen heeft men dus een bepaalde plaatsing van de moleculen; het zijn de kleinste deeltjes van den vasten toestand; de eenvoudigste kern zal uit 2 moleculen kunnen bestaan. Een binding van die moleculen door de carboxylgroepen is niet noodig om het bestaan van de verschillende isomeren te verklaren, daar zooals door mij werd gevonden ook het cumarine, dat geen carboxylgroep in het molecule heeft, een metastabielen vorm bezit. Veel meer schijnt het me toe, dat in de dubbelbinding de oorzaak van het optreden van verschillende isomeren moet gezocht worden. Hierop hoop ik binnenkort terug te komen.

Een volgend argument voor de isomerie van het 42° en 68° zuur zien de genoemde onderzoekers in het bestaan van „Lösungsgemische" van deze zuren (blz. 200). Dat hierbij de kernen van de oplossing een rol gespeeld hebben is uit het voorgaande duidelijk. Deze proeven hebben STOBBE en SCHÖNBURG echter op den verkeerden weg gebracht. Waar zij meenden gevonden te hebben dat „In jedem Einzelfalle als Verdampfungsrückstand 68°-Säure erhalten wird nach einem Gesamtzusatz von 2.9—4.1 Proz. 68°-Säure, d. h. waren weniger als 2.9 Proz. 68°-Säure zur 42°-Säurelosung zugesetzt, so schmolz der Verdampfungsrückstand bei 42°; betrug der Zusatz mehr als 4.1 Proz. 68°-Säure, so zeigte der Verdampfungsrückstand den Schmelzp. 68°", zoo komen zij er toe de distillatieresten als mengsels

van 42° en 68° zuur te beschouwen. „Wenn, wie oben gezeigt worden, die Lösung der 68°-Säure verschieden von der Lösung der 42°-Säure ist, und wenn nach Zusatz von wenig 68°-Säurelösung zur 42°-Säurelösung ein bei 42° schmelzender Verdampfungsrückstand erhalten wird, so kann dieser nicht reine 42°-Säure (fest) sein. Es muss vielmehr ein Gemisch der beiden isomeren Säure sein", heet het op blz. 204. Aangenomen wordt dan, dat er vaste oplossingen van deze vormen bestaan en dat de kristallen mengkristallen van 42° en 68° zuur zijn. Dat deze hypothese allen grond mist is uit het voorgaande wel duidelijk.

Ook is zij theoretisch, van het door de genoemde onderzoekers ingenomen standpunt, niet vol te houden. Men zou toch, wanneer het 68° en het 42° zuur *chemisch* verschillend zijn en *dus ook het infectievermogen van het* 68° *zuur in 't molecule aanwezig moet zijn,* niet kunnen verklaren, dat een kern van het 68° zuur of een spoor van deze stof in staat is in korten tijd een groote hoeveelheid 42° zuur om te zetten, terwijl, wanneer die moleculen van het 68° zuur regelmatig tusschen die van het 42° zuur verdeeld waren, zooals dit bij mengkristallen het geval moet zijn, geen omzetting zou plaats hebben, voordat 2.9 °/₀ 68° zuur aanwezig waren.

Ook smeltproeven hebben genoemde onderzoekers er toe gebracht het bestaan van vaste oplossingen of mengkristallen aan te nemen. Op blz. 213 schrijven zij: „Ein Teil der eben besprochenen, bei 42° schmelzenden Erstarrungsprodukte bleibt jahrelang unverändert, ein anderer Teil verwandelt sich bei Zimmertemperatur, zuweilen schon nach Minuten oder Stunden ohne erkennbare Ursache in 68°-Säure. Diese erstarrten Schmelzen sind also untereinander nicht gleich; sie sind ebenso wie die aus den Lösungsgemischen erhaltenen Verdampfungsrückstände, feste Lösungen oder Mischkrystalle mit wechselnden Anteilen 68°-Säure und 42°-Säure" [1]). Dat deze omzettingen door een of meer luchtkernen, die nog niet gesplitst waren, veroorzaakt kunnen zijn, is niet geheel onwaarschijnlijk, waar toch geen zorg aan het verwijderen van deze kernen besteed werd. Ook zal het overblijven van een enkele kern in de smelt tot een dergelijk verschijnsel aanleiding kunnen geven.

Bij het smelten van de allokaneelzuurvormen kan men van het

---

[1]) De gedachte van STOBBE (blz. 231), dat een vaste oplossing hetzelfde is als kernen in een smelt is zeker lang niet altijd juist. Kernen toch zijn moleculecomplexen en de verdeeling van de moleculen van de kernen in de verschillende deelen van de smelt met kernen behoeft niet regelmatig te zijn, terwijl men bij een vaste oplossing of mengkristallen juist een zeer gelijkmatige verdeeling van de moleculen door elkander heeft.

standpunt van trimorphie verwachten, dat de dissociatie in enkelmoleculen des te vollediger zal zijn naarmate de tijdsduur van verhitten grooter en de temperatuur hooger is. Dit hebben de genoemde onderzoekers dan ook voor het 58° zuur (blz. 239) en het 68° zuur (blz. 211) gevonden, waarbij slechts 5—7 m.gr. in elk capillair buisje gebracht werden. Proeven met 10—50 m.gr. van het 68° zuur in grootere capillairen gaven tot resultaat dat zelfs een verhitten gedurende 25 minuten op 70° niet in staat was ook maar een enkele maal een blijvende omzetting in het 42° zuur te bewerken, terwijl bij gebruik van 5—7 m.gr. van dit zuur er 4 van 10 proeven een omzetting gaven na 10 minuten verhitten. Ditzelfde werd reeds door andere onderzoekers medegedeeld, n.l. dat grootere hoeveelheden moeilijker worden omgezet dan kleine.

Het voorkomen van kernen kan dit zeer wel verklaren. Stel toch dat men bijvoorbeeld de dissociatie van het 68° zuur zoover brengt dat er in 20 mgr. stof nog 2 kernen zijn en dat men nu in staat is de stof in 4 gelijke deelen te verdeelen, dan zouden in 2 deelen hoogstens elk 1 kern voorkomen en in 2 deelen geen kern; men krijgt dus dat bij gebruik van 5 mgr. stof 50% in 42 zuur omgezet wordt bij de gebruikte temperatuur en verhittingsduur. Had men de verdeeling echter niet aangebracht dan zouden de 20 mgr. waarin 2 kernen zijn, dadelijk of na enkele uren in 68° zuur overgegaan zijn[1]). Nu is het gemakkelijk in te zien, dat wanneer de kans van totale omzetting voor 5 m.gr. 50% is, deze voor 10 mgr. 25%, 20 mgr. 12.5%, 40 mgr. 6.25% enz. is, m. a. w. de kans voor een totale omzetting bij die temperatuur en verhittingsduur wordt bij gebruik van grootere hoeveelheden steeds kleiner, juist wat men gevonden heeft.

Stobbe en Schönburg hebben voor elke proef maar 10 buisjes verhit, zoodat de door hen verkregen getallen zeker niet als gemiddelden te gebruiken zijn. Bij 70° verhitten van het 68° zuur gedurende 10 min. vinden zij bijvoorbeeld bij gebruik van 5—7 mgr. stof 4 buisjes omgezet van de 10 (in het geval, dat een deel bij 42° en een ander deel bij 68° smolt is geen totale omzetting verkregen) terwijl bij 100° er ook maar 4 van de 10 een omzetting in 42° zuur vertoonden. Bij 70° zal dus het gemiddelde allicht heel wat lager zijn geweest. Neemt men aan, dat het 40% bij 70° voor 10 minuten verhitten was, dan nog zou de kans om een totale

---

[1]) Hierin ligt ook de oorzaak van het door Stobbe en Schönburg waargenomen verschijnsel, dat in de capillairen sommige gedeelten bij 42° en andere bij 68° of 58° smolten.

omzetting van 0.05 gr. in 10 min. te doen plaats hebben slechts 5°/₀ zijn, dus gemiddeld zou 1 van de 20 proeven gelukken.

Om na te gaan of de luchtkernen wellicht voor een deel voor de moeilijke omzetting aansprakelijk waren, werden hoeveelheden van het 68° zuur in *U* buizen gesmolten. Deze *U* buizen bezaten aan de eene zijde een wattenprop; door dit been werd een snelle op 70° gebrachte droge luchtstroom gedurende het verhitten van de *U* buis in het waterbad van 70°, geleid om de luchtkernen door het andere been te verwijderen.

Na het verhitten werd het andere been der *U* buis met een wattenprop gesloten. Op deze wijze gelukte het me evenmin als STOBBE en SCHÖNBURG, 0.05 gr. 68° zuur blijvend in 42° zuur door 20 min. verhitten op 70° om te zetten.

Bij dit onderzoek deed het zich dikwijls voor, dat de smelt eerst tot 42° zuur kristalliseerde en daarna na enkele uren in het 68° zuur werd omgezet, hetzelfde dat door de genoemde onderzoekers werd gevonden. Dit verschijnsel is dus niet aan de luchtkernen, maar aan de vloeistofkernen te wijten.

Waar voor een blijvende omzetting in het 42° zuur een volkomen afwezigheid van kernen van het 68° zuur noodzakelijk is, is het te begrijpen, dat een enkele kern van dit zuur, die bij het smelten overblijft, niet in staat behoeft te wezen om de geheele smelt dadelijk om te zetten maar dat dit na verloop van eenige uren eerst kan plaats hebben. Bovendien kunnen de kernen in grootte verschillen en zal de werking van de kleinste, die wellicht slechts uit 2 moleculen allokaneelzuur opgebouwd zijn, allicht heel wat minder sterk en snel zijn, dan van de grootere die uit meerdere moleculen bestaan.

Uit het voorgaande is duidelijk gebleken, dat de door STOBBE en SCHÖNBURG gebezigde argumenten, waaruit chemische isomerie voor de allokaneelzuren zou volgen, niet steekhoudend zijn, terwijl de resultaten van het onderzoek zich geheel laten verklaren door de aanname van trimorphie voor deze zuren.

Kort overzicht van de verkregen resultaten.

1. Een bepaalde werkwijze werd toegepast, waardoor het mogelijk is infecties te voorkomen, de luchtkernen uit te sluiten en de vloeistofkernen geheel te dissocieeren.

2. Op deze wijze gelukte het aan te toonen, dat verdunde oplossingen van het 58° en het 68° zuur bij distillatie van het oplosmiddel bij gewone temperatuur een rest kunnen geven, die in het 42° zuur overgaat.

3. Wanneer de concentratie van de oplossingen van het 58° en het 68° zuur hoog zijn, zooals bij gebruik van aether en benzol kan voorkomen, dan gelukte het niet deze zuren in het 42° zuur bij gewone temperatuur over te voeren.

4. De oplossingen kunnen bij afkoelen in ijs en keukenzout veranderd worden. Op deze wijze geeft een waterige, geen kernen van het 58° of het 68° zuur bevattende oplossing bij —10° het 58° zuur en bij —16° het 58° of het 68° zuur.

5. In vasten toestand bleken de zuurvormen in ijs en keukenzout na 6 dagen koelen niet veranderd te zijn.

6. De argumenten door STOBBE en SCHÖNBURG aangevoerd voor chemische isomerie, zijn gebleken niet steekhoudend te zijn. Alle verkregen resultaten zijn volkomen verklaarbaar uit een oogpunt van trimorphie van de allokaneelzuren.

Buitenzorg, Januari 1919.

Wiskunde. — De Heer BROUWER biedt een mededeeling aan van den Heer Dr. H. B. A. BOCKWINKEL: „*Over het teorema van* MAC LAURIN *in de funksionaalrekening*".

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

In de derde mededeling van mijn verhandeling „Enige opmerkingen over de volledige transmutatie"[1]) heb ik een beperkte geldigheid van het teorema van MAC LAURIN voor de funksionaalrekening kunnen aantonen, en wel voor een *normale* additieve transmutatie. Hieronder verstond ik een transmutatie T met de volgende eigenschappen:

1°. Er is een funksioneel veld $F(T)$ waarvan de funksies u behoren tot[2]) eenzelfde sirkel (σ), voor welke funksies de transmutatie T oplevert funksies die behoren tot eenzelfde sirkel (α), konsentries met (σ).

2°. Van het funksionele veld maken alle rationele gehele funksies deel uit.

3. De transmutatie T is kontinu in het genoemde tweetal van toegevoegde velden $F(T)$ en (α)[3]).

Uit eigenschap 2° volgt dat aan iedere zodanige transmutatie T, voorlopig formeel, een andere P beantwoordt die wordt voorgesteld door de reeks

$$Pu = a_0 u + \frac{a_1 u'}{1!} + \frac{a_2 u''}{2!} + \ldots + \frac{a_m u^{(m)}}{m!} + \ldots, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin de grootheden $u^{(m)}$ de afgeleiden van het operatieobjekt u zijn, en de grootheden a_m funksies van de numerieke veranderlike x, die met behulp van de formule

$$a_m = \xi_m - m_1 x \xi_{m-1} + \ldots + (-1)^m x^m \xi_0 \,{}^{4)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

kunnen worden afgeleid uit de getransmuteerden

$$\xi_k = T(x^k) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

1) Deze Verslagen, XXV, 1916 en 1917, aan te halen als l. c.

2) Een funksie *behoort* tot een sirkel als hij daarbinnen en op de omtrek er van regulier is. De notatie (σ) betekent een sirkel met straal σ.

3) Zie voor het kontinuiteitsbegrip l. c. II n⁰. 9—11, waar tevens de begrippen *funksioneel veld* (F. V.), *numeriek operatieveld* (N. V. O.) (hier de sirkel (α)) en *numeriek veld van de funksies* (N V. F.) (hier de sirkel (σ)) verklaard zijn.

4) Met m_k wordt de k^e binomiaalkoeffisient van m bedoeld.

van de opvolgende gehele pozitieve machten van x, welke getransmuteerden volgens de definitie *bestaan* en tot de sirkel (α) behoren. Het bovenbedoelde teorema van MAC LAURIN bestond nu daarin dat het de gelijkheid van de transmutaties T en P uitsprak, in een zeker numeriek veld (α'), onderdeel van (α) of daarmee samenvallend, *indien laatstgenoemde transmutatie volledig was in* (α') [1]).

In deze uitspraak is iets onbevredigends. Vergelijkt men hem met het teorema van TAYLOR voor de funksieteorie, dan merkt men een verschil. Bij het laatstgenoemde wordt beweerd: „als een funksie in zeker sirkelvormig gebied rondom een punt x_0 die en dïe eigenschappen heeft (nl. een *bepaald* differentiaalquotient bezit) dan kan hij in dat gebied in de reeks van TAYLOR ontwikkeld worden". Men hoeft dus aan de laatstgenoemde reeks geen bijkomstige voorwaarden op te leggen (bv. dat hij in het genoemde gebied konvergeert), anders gezegd, dergelijke voorwaarden zijn *vanzelf* vervuld. Men zou dus wensen dat ook voor de funksionaalrekening het teorema zo zou kunnen worden uitgesproken dat aan de met de beschouwde transmutatie T korresponderende reeks geen bijkomstige voorwaarde van volledigheid behoefde gesteld te worden, maar dat deze voorwaarde uit de eigenschappen van T *vanzelf* voortvloeide. Wij hebben indertijd, bij de invoering van het begrip „normale transmutatie" (l.c. III, n°. 15) gedacht dat dit niet het geval behoefde te zijn. Tans menen wij evenwel de stelling te kunnen bewijzen:

De met een n o r m a l e additieve transmutatie korresponderende reeks stelt een volledige transmutatie voor.

We beschouwen eenvoudigheidshalve een gebied rondom de oorsprong en daarin de oneindige reeks van funksies

$$1, x, x^2, \ldots x^m, \ldots \qquad (4)$$

waarmee, volgens definitie, een oneindige reeks van getransmuteerden

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_m, \ldots \qquad (5)$$

overeenstemt, die alle in een sirkelvormig gebied (α) met $x = 0$ tot middelpunt en α tot straal regulier zijn. Is ε een willekeurig klein pozitief getal, dan konvergeert de uit (4) afgeleide reeks van funksies

$$1, \frac{x}{\sigma+\varepsilon}, \frac{x^2}{(\sigma+\varepsilon)^2}, \ldots \frac{x^m}{(\sigma+\varepsilon)^m}, \ldots \qquad (6)$$

---

[1]) Een transmutatie P, die door een reeks van de vorm (1) wordt voorgesteld, heb ik *volledig in een gebied* (α) genoemd, als er een zekere sirkel (ρ), konsentries met (α), is aan te wijzen, zodanig dat *alle* funksies die tot (ρ) behoren een in (α) reguliere getransmuteerde hebben. De minimumsirkel (β) die voor (ρ) genomen kan worden heb ik het met (α) *korresponderende* gebied genoemd (l. c. I, n°. 4).

in het gebied (σ) uniform tot nul. Volgens een eenvoudig te bewijzen kontinuiteitseigenschap (l.c. II, n°. 11) zal dan de reeks van de getransmuteerden van laatstgenoemde funksies, die, op grond van de additieve eigenschap van de transmutatie, kan worden voorgesteld door

$$\xi_0, \frac{\xi_1}{\sigma+\varepsilon}, \frac{\xi_2}{(\sigma+\varepsilon)^2}, \ldots \frac{\xi_m}{(\sigma+\varepsilon)^m}, \ldots \quad (6')$$

in het gebied (α) uniform naar nul konvergeren; immers een normale transmutatie is kontinu in een gekonjugeerd tweetal velden. Voor genoegzaam grote m heeft men dus in alle punten van (α)

$$|\xi_m| < (\sigma+\varepsilon)^m \quad \ldots \quad (7)$$

Uit de betrekking (2) volgt nu gemakkelik dat voor de koeffisienten a_m van de reeks (1) een dergelijke ongelijkheid geldt, d.w.z. dat ook deze kleiner zijn dan de m^{de} macht van een van m onafhankelik getal. Geldt nl. de ongelijkheid (7) voor m grooter dan m_0, dan heeft men volgens (2), daar $|x|$ hoogstens gelijk α is,

$$|a_m| < \sum_0^{m_0} m_k \alpha^{m-k} |\xi_k| + \sum_{m_0+1}^{m} {}_k\, m_k \alpha^{m-k} (\sigma+\varepsilon)^k$$

$$< \longleftarrow\!\!\longrightarrow + \sum_0^{m} {}_k \longleftarrow\!\!\longrightarrow$$

$$< \longleftarrow\!\!\longrightarrow + (\sigma+\alpha+\varepsilon)^m$$

Het eerste deel van het rechterlid van deze ongelijkheid bestaat uit een vast, van m onafhankelik aantal termen, waarvan ieder bij genoegzaam grote m kleiner is dan $(\alpha+\varepsilon)^m$, zodat hetzelfde geldt van hun som. Het tweede deel is groter dan dit laatste bedrag, dus heeft men voor genoegzaam grote m in alle punten van het gebied (α)

$$|a_m| < (\sigma+\alpha+\varepsilon)^m \quad \ldots \quad (8)$$

en dus ook

$$\overline{\lim_{m=\infty}} |a_m|^{\frac{1}{m}} \overline{<} \sigma+\alpha \quad \ldots \quad (8')$$

De uit (8') blijkende eindigheid van de bovenste limiet in het linkerlid van deze ongelijkheid is, volgens onze beschouwingen (l.c. I, n°. 4), juist de voorwaarde waarop de transmuterende reeks (1) volledig is in het gebied (α), en wel heeft het korresponderende gebied (β) een straal β die hoogstens gelijk is aan $\sigma+2\alpha$. Voor alle funksies u die tot de sirkel $(\sigma+2\alpha)$ behoren levert de reeks P dus een getransmuteerde Pu in het gebied (α) op, en deze is volgens het door ons uitgesproken teorema van Mac Laurin gelijk

aan *Tu*. Dit teorema luidde in de door ons aangegeven vorm (l.c. III, n°. 15).

Is de reeks P, die aan een normale additieve transmutatie T beantwoordt, volledig in het sirkelvormige gebied (α) *dat het numerieke operatieveld van T vormt, dan is in dit gebied*

$$Tu = Pu$$

voor die funksies van het funksionele veld van T die tot de sirkel (β) *behoren welke, voor de reeks P, met* (α) *korrespondeert.*

Maar nu gebleken is dat de met een normale additieve transmutatie korresponderende reeks de volledigheidseigenschap *altijd* heeft, kan men voor bedoeld teorema de volgende verbeterde vorm in de plaats stellen:

Een normale additieve transmutatie kan in zijn numeriek operatieveld (α) *steeds in de reeks van* MAC LAURIN (1) *ontwikkeld worden, hetzij voor alle funksies van zijn funksioneel veld, hetzij voor een onderdeel daarvan, bestaande uit funksies die tot een sirkel* (β) $>$ (σ) *behoren, als* (σ) *het numerieke veld van de funksies is. Daarbij is* β *in ieder geval niet groter dan* $\sigma + 2\alpha$.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt eene mededeeling aan van den Heer H. P. BARENDRECHT: „*Urease en de stralings-theorie van enzymwerking*".

II.

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN).

Om een meer volmaakte constantheid van p_H te verzekeren, werd een uitgebreider reeks experimenten met 0,01°/₀ ureum eenige maanden later uitgevoerd, toen de techniek dezer onderzoekingen ook vollediger uitgewerkt was.

Op denzelfden dag werden tenminste twee seriën afgewerkt met verschillende p_H, uitgaande van hetzelfde neutrale phosphaat-extract van Soja-meel. Een anderen dag werd een van deze herhaald tegelijk met een derde, met een nieuwe p_H. Op deze wijze werd de onzekerheid over de vergelijkbaarheid der enzymconcentratie, op verschillende dagen bereid, opgeheven.

De mededeeling dezer tabellen moet hier wegens plaatsgebrek achterwege blijven De waarde van m, nu berekend volgens de formule $\frac{nc}{0{,}434} \log \frac{1}{1-y} + 0{,}01y = mt$, was in elke tabel weer binnen de grenzen, door de onvermijdelijke waarnemingsfouten gesteld, constant.

Bij voortzetting dezer onderzoekingen bij p_H in de buurt van 8 en hooger werd algemeen een kleiner worden van m geconstateerd tegen het einde van de omzetting. Dit was om verschillende redenen te verwachten.

Uit de welbekende diagrammen van SÖRENSEN over H-ionen concentraties in buffermengsels blijkt duidelijk, dat de phosphaatoplossingen slechts goede buffers vormen tot aan $p_H = 8$ ongeveer.

Zoo werd ook b.v. door schrijver dezes geconstateerd, dat, terwijl 10 c.c. van een 9,6 °/₀ phosphaatmengsel, verdund met 2 c.c. water, een 8 °/₀ phosphaatmengsel opleverde van $p_H = 8{,}11$, verdunning met 2 c.c. NH_3 $\frac{1}{50}$ N (d.i. het bedrag NH_3 gevormd door hydrolyse van 12 c.c, van een 0,01 °/₀ ureum oplossing) een $p_H = 8{,}25$ opleverde.

Bij lagere p_H is deze verandering in p_H slechts 0,01 of 0,02.

Het is duidelijk, dat dus door de toenemende alkalische reactie gedurende de hydrolyse van de 0,01 °/₀ ureum de m reeds een weinig vermindert, indien de p_H hoog is.

Daarenboven voorspelt de stralingstheorie zelf, als reeds kort aangeduid in de eerste mededeeling, een afname der activiteit van het enzym, zoodra de totale concentratie van ureum + H-ion (of nauwkeuriger: zoodra $a + nc$) zoo klein geworden is, dat niet alle straling een ureum molecuul of een H-ion bereikt, voordat zij haar kracht door verspreiding verloren heeft. In de zeer verdunde oplossingen van 0,01 °/₀ ureum en van lage H-ionen concentratie kan dit effect

TABEL 12.

	Concentratie van urease.	p_H	m, voor de eenheid van urease.
3 Mei 1918	3	5.84	0.000205
24 Mei 1918	3	6.13	0.000221
24 Mei 1918	3	6.40	0.000267
2 Maart 1917	3	6.40	0.00027
1 Maart 1917	3	6.40	0.000263
1 Maart 1917	3	6.67	0.000347
26 Febr. 1917	2	6.67	0.00036
26 Febr. 1917	2	7.0	0.000525
6 Maart 1917	1	7.0	0.00050
6 Maart 1917	1	7.21	0.00067
22 Jan. 1917	$\frac{1}{2}$	7.21	0.00067
22 Jan. 1917	$\frac{1}{2}$	7.52	0.000752
22 Jan. 1917	$\frac{1}{2}$	7.64	0.000689
12 Maart 1917	$\frac{3}{8}$	7.64	0.000717
12 Maart 1917	$\frac{1}{4}$	7.80	0.00060
9 Maart 1917	$\frac{3}{10}$	8.03	0.000467
23 Maart 1917	$\frac{6}{10}$	8.03	0.000479
23 Maart 1917	$\frac{6}{13}$	8.13	0.000405
3 April 1917	$\frac{6}{13}$	8.13	0.000431
3 April 1917	$\frac{6}{13}$	8.65	0.000245
22 Maart 1917	$\frac{3}{10}$	8.03	0.000453
22 Maart 1917	$\frac{3}{13}$	8.13	0.000388
5 April 1917	$\frac{3}{13}$	8.13	0.000416
5 April 1917	$\frac{3}{13}$	8.65	0.000243

zeker verwacht worden, vooral wanneer de ureum grootendeels gehydrolyseerd is.

Zooals in een later deel dezer studie zal aangetoond worden, kan een afname van m in deze alkalische oplossingen na verloop van eenigen tijd ook teweeggebracht worden door de omgekeerde reactie, de synthese van ureum.

Ter experimenteele toetsing der formule $\frac{nc}{0,434} \log \frac{1}{1-y} + ay = mt$ is er echter, behalve wijziging der H-ionen concentratie, nog een andere weg om de verhouding tusschen de coëfficienten van $\log \frac{1}{1-y}$ en van y te wijzigen. Indien slechts de p_H constant gehouden kan worden, kunnen wij a, de concentratie van de ureum, belangrijk doen rijzen. De verwezenlijking dezer methode zal verderop worden medegedeeld.

Om bovengenoemde redenen zijn bij hooge p_H slechts de eerste waarden van m gebruikt voor wat thans de hoofdzaak is, de vaststelling van m bij verschillende H-ionen concentratie.

Om de verkregen waarden van m te vergelijken, zijn zij alle in tabel 12 gereduceerd tot dezelfde enzym-concentratie, waarbij als eenheid gekozen is het geval dat: 1 gram Soja geëxtraheerd is met 100 c.c. water + 7,28 gr. Na_2HPO_4 2 aq + 2,32 gr. KH_2PO_4 en 50 c.c. filtraat hiervan gemengd is met 100 c.c. water + 9,6 gr. phosphaat.

5. *m als functie van* p_H.

Volgens de mathematische formuleering van de stralingstheorie, $-dx = m \frac{x}{x + nc} dt$, is de constante m alleen afhankelijk van de concentratie van de urease.

Wanneer gelijke concentraties van urease vergeleken worden of wanneer het effect gereduceerd is tot gelijke concentraties, zal m dus evenredig zijn aan de activiteit van die bepaalde urease concentratie.

Uit tabel 12 blijkt reeds, dat die activiteit m van de p_H op een bizondere wijze afhankelijk is.

In fig. 3 zijn de gemiddelde waarden van m, in willekeurige lengtemaat als ordinaten tezamen gebracht met de waarden van p_H als abscissen. De opvallend regelmatige kromme, zoo verkregen, veroorlooft door een verdere mathematische behandeling iets meer omtrent het wezen van urease te weten te komen.

MICHAELIS [1]) had reeds aangetoond, dat de activiteit van een enzym,

[1]) Die Wasserstoffionen-Konzentrati n. Verlag von JULIUS SPRINGER, 1914.

voorgesteld als een functie van p_H, in vele gevallen een kromme geeft, die eenigszins gelijkt op die van het ongedissocieerde deel van een amptoteren electrolyt. De vaagheid en onregelmatigheid van

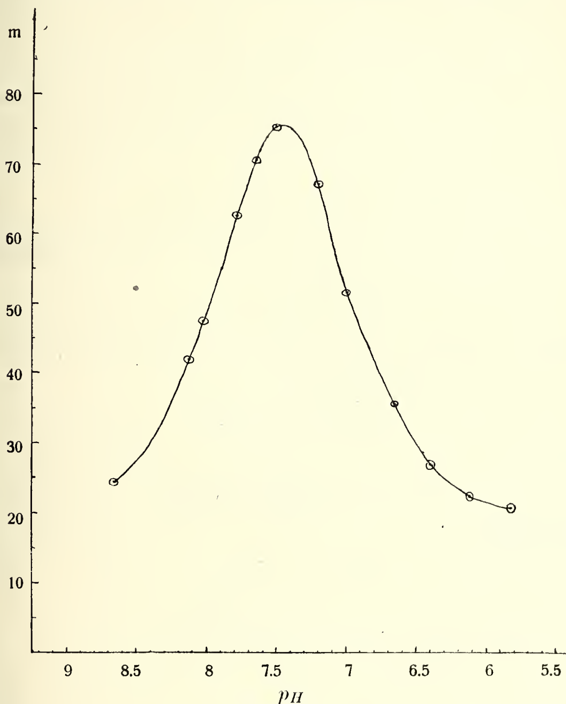


Fig. 3.

de krommen van MICHAELIS en van die van SÖRENSEN voor invertine sloten echter alle verdere vergelijking en onderzoek uit.

Er moge hier nog op gewezen worden, dat de activiteit m, als berekend volgens de stralingstheorie, geheel verschillend is van wat tot nu toe empirisch als activiteit was bepaald. Dit is onmiddellijk duidelijk uit de formule

$$m = \frac{\frac{nc}{0,434} \log \frac{1}{1-y} + ay}{t}$$

Het in een gegeven tijd t waargenomen effect y is klaarblijkelijk volstrekt niet evenredig aan m.

De bovengemelde regelmatigheid in m en de resultaten, daarmee verbonden, die verder medegedeeld zullen worden, leveren daarom een belangrijke experimenteele bevestiging van de stralingstheorie.

In het werk van MICHAELIS wordt de aandacht gevestigd op het feit, dat een voorstelling van het ongedissocieerde deel van een amphoteren electrolyt als een functie van de H-ionen concentratie, waarbij als abscissen genomen worden de waarden van p_H in plaats van de H-ionen concentratie zelf, veel karakteristiekere krommen oplevert.

Zijn „rest-krommen" worden als volgt afgeleid.

Zij (A) de totale concentratie van den amphoteren electrolyt, $(A+)$ die van het kation, $(A-)$ die van het anion, dan is de concentratie van de ongedissocieerde rest (x):

$$(x) = (A) - (A+) - (A-)$$

Volgens de wet van massa-werking hebben wij in de oplossing de twee evenwichtsvergelijkingen:

$$(A+)\,(OH) = k_b(x)$$
$$(A-)\,(H) \;= k_a(x)$$

Dus:

$$(x) = (A) - (x)\frac{k_b}{(OH)} - (x)\frac{k_a}{(H)},$$

waaruit volgt:

$$(x) = \frac{(A)}{1 + \frac{k_a}{(H)} + \frac{k_b}{(OH)}}$$

De ongedissocieerde fractie $\varrho = \frac{(x)}{(A)}$ wordt dan

$$\varrho = \frac{1}{1 + \frac{k_a}{(H)} + \frac{k_b}{(OH)}}$$

In fig. 4 zijn ter vergelijking weergegeven de krommen, door MICHAELIS geconstrueerd voor verschillende waarden van de dissociatie-constanten k_a en k_b.

De overeenstemming van ons diagram van urease-activiteit m met deze kromme is duidelijk.

Er moet echter aan herinnerd worden, dat de relatieve afmetingen van p_H en ϱ uit den aard der zaak willekeurig zijn in deze figuren.

Het is duidelijk, dat, tenminste met afnemende p_H, waar de experimenten verder voortgezet konden worden dan aan de andere

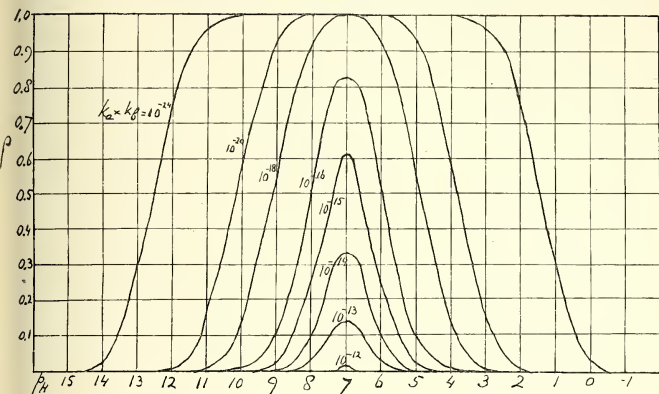


Fig. 4.

zijde, m niet tot nul nadert, maar tot een waarde van ongeveer 18.

De interpretatie van deze resultaten is derhalve deze:

Urease is een amphotere electrolyt, welks activiteit het grootst is in niet-gedissocieerden toestand. Wanneer wij als nieuwe abscissen-as de asymptoot aanbrengen, waartoe m nadert, stelt de kromme voor de overmaat in activiteit van ongedissocieerde boven gedissocieerde urease.

Dus

$$m - \beta = \frac{a}{1 + \frac{k_a}{(H)} + \frac{k_b}{(OH)}}$$

De constante a, uitdrukkende de evenredigheid van de activiteit, zooals deze bepaald is (in willekeurige eenheden) met de ongedissocieerde fractie ϱ, moest uit de experimenten berekend worden evenals de constanten k_a en k_b.

De term β, die volgens een voorloopige inspectie van de kromme ongeveer 18 schijnt te zijn, moest ten slotte ook op dezelfde wijze nauwkeurig worden vastgesteld.

Deze berekeningen vereischten de kennis van de hydroxyl-ionen concentratie (OH) zoowel als van de waterstof-ionen concentratie (H).

In water of verdunde oplossingen is deze waarde onmiddellijk gegeven door de dissociatie-vergelijking van water

$$(H)(OH) = k_w$$

Daar echter een 8 °/₀ phosphaat-oplossing niet als een verdunde oplossing beschouwd kan worden, waren afzonderlijke bepalingen van de hydroxyl-ionen concentratie onvermijdelijk.

Deze bepalingen zullen in het laatste deel dezer mededeelingen besproken worden.

De eenvoudigste methode van berekening bleek te zijn β voorloopig een bepaalde waarde te geven, bv. 18. Door dus te combineeren de vergelijkingen voor b.v. $p_H = 7{,}52$ en $p_H = 7$, kon α dadelijk geëlimineerd worden. Hetzelfde proces, toegepast op de vergelijkingen voor $p_H = 6{,}40$ en voor $p_H = 8{,}03$, leverde een tweede vergelijking, waarin alleen k_a en k_b onbekend waren. Uit deze twee vergelijkingen werden dan k_a en k_b berekend.

In tabel 13 zijn samengebracht de waarden, bepaald voor p_H en p_{OH}, de concentraties der H-ionen en OH-ionen (vermenigvuldigd met 10^8) en de waarden voor m (vermenigvuldigd met 10^5), naast elkaar de direct bepaalde en die, welke berekend zijn op den grondslag van drie verschillende waarden van β.

TABEL 13.

p_H	p_{OH}	$10^8 (H)$	$18^8 (OH)$	$10^5\ m$ bepaald.	$10^5\ m$ berekend voor: $\beta = 18$	$\beta = 17.9$	$\beta = 19$
5.84	7.94	144.5	1.15	20.5	20.6	20.5	21.6
6.13	7.65	74.13	2.24	22.1	23.—	22.9	24.—
6.40	7.38	39.81	4.17	26.7	27.2	27.1	28.2
6.67	7.11	21.38	7.76	35.4	35.—	34.7	35.7
7.0	6.78	10. –	16.6	51.3	51.3	51.3	51.3
7.21	6.57	6.17	26.92	67.—	64.8	64.9	64.—
7.52	6.26	3.02	54.95	75.2	75.2	75.2	75.2
7.64	6.14	2.29	72.44	70.3	72.4	72.2	73.7
7.80	5.98	1.59	104.7	62.3	64.—	63.6	66.9
8.03	5.75	0.93	177.8	47.3	49.—	48.7	53.—
8.13	5.65	0.74	223.9	41.7	43.4	43.1	47.3
8.65	5.13	0.22	724.4	24.4	26.—	25.9	28. –

Voor β gelijk 18 of 17,9 zijn de verschillen van m bepaald en m berekend niet grooter dan, volgens tabel 12, de verschillen in de waarden van m, bepaald bij dezelfde p_H op verschillende dagen;

derhalve niet grooter dan de onzekerheid, overgebleven in hun experimenteele bepaling.

Voor $\beta = 19$ zijn de afwijkingen duidelijk grooter.

Voor $\beta = 17{,}8$ gaf de berekening uit de boven gebruikte vier waarden van m een negatieve k_a. De minimum waarde van β bleek dus ongeveer 17,9 te zijn.

Het resultaat dezer berekeningen, wat betreft k_a, k_b en α is, samengevat, het volgende:

TABEL 14.

β	k_a	k_b	α
17.9	$10^{-8} \times 1293$	$10^{-8} \times 20880$	46356
18.—	$10^{-8} \times 132.6$	$10^{-8} \times 2170$	4828
19.—	$10^{8} \times 10.8$	$80^{-8} \times 206.5$	469.3

Er moge hier nog herinnerd worden, dat de vergelijking

$$m - \beta = \frac{\alpha}{1 + \frac{k_a}{10^{-p_H}} + \frac{k_b}{10^{-p_{OH}}}},$$

waaruit deze constanten berekend moesten worden, een exponentieele vergelijking is. Geringe veranderingen in p_H moeten daarom verwacht worden een grooten invloed te hebben.

Niettemin, aangezien de afwijkingen tusschen de experimenteele kromme en die, voorstellende de berekende waarden van m voor, b.v. $\beta = 18$, in tabel 13, binnen de grenzen van nauwkeurigheid zijn, bereikbaar met de gebruikte experimenteele methoden, kan geconcludeerd worden, dat de vergelijking voor het ongedissocieerde deel van een amphoteren electrolyt werkelijk voorstelt de activiteit van urease als een functie van p_H.

Een belangrijk gevolg hiervan is de mogelijkheid om ten minste bij benadering de dissociatie-constanten van het enzym urease te leeren kennen. Uit tabel 14 blijkt, dat k_a en k_b ongeveer $1{,}3 \times 10^{-6}$ en $2{,}2 \times 10^{-5}$ zijn of zelfs grooter.

De dissociatie-constanten van koolzuur [1]) en ammonia [2]) zijn bij 27° respectievelijk $4{,}4 \times 10^{-7}$ en $1{,}9 \times 10^{-5}$.

De nadering van deze constanten tot die van urease beantwoordt aan schrijver's opvatting [3]), dat enzymen in 't algemeen hetzelfde

1) MICHAELIS und RONA, Biochem. Zeitschr. 1914, 67, 182.

2) LUNDEN, Affinitätsmessungen an schwachen Saüren und Basen.

3) BARENDRECHT, Biochem. J. 1913, 7, 549.

molecuul of radicaal in een actieven toestand bevatten, dat door hen wordt vrijgemaakt of waarop zij inwerken.

Ammonium-carbonaat + koolzuur als buffer.

In het begin dezer studie was het den schrijver spoedig duidelijk, dat de gewoonlijk aangenomen bevinding van de versnellende werking van koolzuur niet alleen door het experiment onvoldoende bevestigd was, maar zelfs geheel onjuist kon zijn.

De werking van urease in een ureum oplossing veroorzaakt spoedig zulk een aanmerkelijke verlaging van de *H*-ionen concentratie, dat het verloop der hydrolyse sterk vertraagd wordt. De versnelling, door een koolzuurstroom in zulk een oplossing teweeggebracht, als een bewijs te beschouwen van den speciaal gunstigen invloed van koolzuur, is een onnoodige aanname, zoolang niet ten volle is rekening gehouden met het vermogen, dat koolzuur heeft, om de vermindering van H-ionen concentratie te voorkomen. En dit was niet gedaan door vorige onderzoekers.

Toch was het wel bekend, dat de natuur dikwijls gebruik maakt van bicarbonaten en koolzuur zoowel als van phosphaatmengsels als buffers om de noodzakelijke constantheid van de ware reactie in de levende cel te handhaven. De bufferwerking van bicarbonaten in bloed is in deze een voorbeeld, dat den laatsten tijd veel de aandacht getrokken heeft.

Vóór het bereiken van het gezichtspunt, dat de urease straling alleen geabsorbeerd wordt door het substraat ureum en de H-ionen, onderstelde schrijver dezes, dat de producten der enzym-werking — hier ammonia en koolzuur — ook de straling tot zekere hoogte absorbeeren en op deze wijze den gang der hydrolyse vertragen.

Terzelfder tijd werd overwogen, dat door een voortdurenden en overvloedigen koolzuurstroom te voeren door een urease oplossing, die niet te veel ureum en veel ammonium-carbonaat bevatte, de H-ionen concentratie gemakkelijk constant gehouden kon worden. Algemeen toch wordt de ware reactie van een oplossing van een bicarbonaat, verzadigd met koolzuur, niet veranderd door eenige variatie in hare samenstelling.

Het was daarom, dat in 1915 en 1916 een lange reeks van experimenten was uitgevoerd met ammonium-carbonaat en koolzuur als buffermengsel, waarvan nu in 't kort iets zal worden medegedeeld en uitgelegd aan de hand van de later (als hierboven) ontwikkelde theorie.

Het gebruikte ammonium-carbonaat was KAHLBAUM'S „Ammonium-

carbonat, zur Analyse mit Garantie-Schein". Door het oplossen van ammonium-carbonaat in water ontstaat, zooals FENTON[1]) aangetoond heeft, een evenwicht van ammonium-carbonaat en ammonium-carbamaat. FENTON's methode ter bepaling van deze twee verbindingen en van ureum in eenzelfde oplossing door natriumhypochloriet en natriumhypobromiet werd door schrijver dezes beproefd om zoo mogelijk vast te stellen, wat het primaire hydrolyse product van ureum door urease is. De snelheid, waarmede zoowel ammonium-carbonaat als ammonium-carbamaat in evenwicht komen is echter te groot. Deze pogingen werden te eerder gestaakt, daar de vraag, wat het primaire omzettingsproduct is, in deze niet veel belang heeft. De overgang van carbomaat tot carbonaat is in 't algemeen sneller dan de enzymwerking en het koolzuur verandert toch alle carbamaat zoowel als carbonaat tot bicarbonaat.

Het ammonium-carbonaat, gepoederd, beantwoordde nagenoeg aan de samenstelling NH_4HCO_3. Een oplossing van ammonium-carbonaat (= 2 % ureum) zal daarom in deze mededeeling beteekenen een concentratie van ongeveer 2 × 2,63 % ammonium-carbonaat.

De vereischte hoeveelheid Soja-meel werd gedurende ongeveer 1 uur bij 27° gedigereerd met een oplossing van ammonium-carbonaat, door welke voortdurend een stroom koolzuur geleid werd. Na mengen met wat kiezelgur werd zeer gemakkelijk een helder filtraat verkregen, dat slechts eenigszins opaliseerde, wanneer groote hoeveelheden Soja-meel gebruikt waren.

Het is duidelijk, dat de electrometrische bepaling van p_H onmogelijk is in een oplossing van ammonium-carbonaat, die met koolzuur verzadigd gehouden moet worden. De veel minder nauwkeurige colorimetrische methode moest daarom hier gebruikt worden. Door het gebruik van rosolzuur als indicator en van Tropaeolin 00 om SÖRENSEN's phosphaatoplossingen zoo goed mogelijk dezelfde tint te geven als het ammonium-carbonaat extract van Soja-meel en kiezelgur, werd de p_H van een ammonium-carbonaatoplossing (= 2 % ureum) met 1,36 gram Soja-meel per 100 c.c., waardoor bij 27° koolzuur gevoerd was, vastgesteld op ongeveer 7,0. Door toevoeging van ammonium-carbonaat (= 0,5 % ureum) en weder doorvoering van koolzuur werd geen wijziging van de p_H geconstateerd.

Zooals blijken zal is in deze experimenten, waar $\dfrac{\frac{a}{nc}}{0,434}$ zooveel grooter is dan hierboven in de phosphaat-mengsels, dat de krommen

[1]) Proc. Roy. Soc. 1886. 39. 386.

alle tot rechte lijnen naderen, geen groote nauwkeurigheid in de p_H vereischt.

Als type van de talrijke proeven mogen hier de volgende vermeld worden.

In een kolf met ronde bodem van $^3/_4$ Liter inhoud, geplaatst in een waterbad van 27° werden 15,125 gram ammonium-carbonaat, opgelost in 250 c.c. water, gebracht en 3 gram Soja-meel. Een paar druppels octyl-alcohol werden toegevoegd om het schuimen te verhinderen.

Het koolzuur uit een stalen cylinder werd eerst gevoerd door een nauwe koperen buis van ongeveer 150 c.m. lengte, en dan door twee waschflesschen, die evenals de koperen buis ook in het bad van 27° geplaatst waren. De stroom koolzuur, op deze wijze op de vereischte temperatuur gebracht en verzadigd met waterdamp, werd dan een uur lang door het mengsel in de kolf geblazen, waarna een snelle filtratie met 2 gram kiezelgur door een vouwfilter dadelijk een helder filtraat gaf.

175 c.c. van deze vloeistof werden gebracht in een dergelijke rondbodem kolf, gesloten door een caoutchouc stop, waardoor twee glasbuizen, een waarvan tot den bodem reikte en het koolzuur toeliet, terwijl de tweede, korte, verbonden was met een buis, gevuld met 10 c.c. H_2SO_4 $\frac{1}{5}$ N ten einde de ammonia te kunnen bepalen, die mocht zijn overgeblazen.

Na verzadiging met koolzuur werd de stroom stop gezet, de controle-buis met H_2SO_4 verwisseld voor een andere, de stop van de kolf een oogenblik opgetild en 25 c.c. oplossing, bevattende 1 gram ureum er in gebracht. Deze oplossing was te voren op 27° gebracht. Na hersluiting van de kolf en weer openen van den koolzuurstroom verliep de reactie dus bij constante temperatuur en constante p_H en kon de voortgang ervan van tijd tot tijd gemeten worden door den koolzuurstroom een oogenblik te onderbreken, een monster van 5 c.c. uit de kolf te nemen met een pipet en dit snel te laten uitloopen in 25 c.c. H_2SO_4 $\frac{1}{5}$ N. Na verdunning met wat water werd dit zuur dan gekookt om het koolzuur uit te drijven en getitreerd met NaOH $\frac{1}{10}$ N en lacmoid (of later met alizarin sulphonzure natron) als indicator. Door de phosphaten en eiwitten van het Soja extract was deze titratie niet zeer scherp — een onzekerheid van een of twee druppels NaOH $\frac{1}{10}$ N — maar toch voldoende nauwkeurig.

De ammoniak in de oorspronkelijke 175 c.c. vloeistof werd evenzoo bepaald evenals de geringe hoeveelheden door de CO_2 in de controle-buizen overgevoerd.

De resultaten zijn vereenigd in tabel 15 en fig. 5, waarin ter vergelijking ook de rechte lijn en de logarithmische lijn $log \frac{1}{1-y} = kt$,

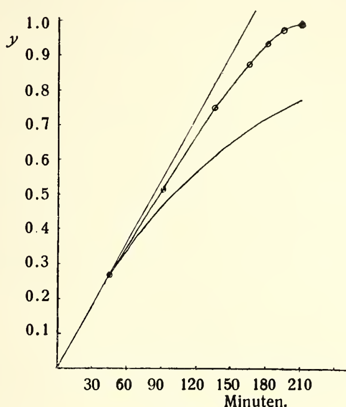


Fig. 5.

beide door den oorsprong en het eerste voor y bepaalde punt getrokken, zijn geteekend.

TABEL 15.
3 gram Soja per 286 c.c.
ammonium-carbonaat (= 4 % ureum)

0.5 % ureum $\quad p_H = 7$, dus $\frac{nc}{0.434} = 0.1$

t (minuten)	y	$m = \frac{0,1 \, log \frac{1}{1-y} + 0,5y}{t}$	$k = \frac{log \frac{1}{1-y}}{t}$
45	0.269	0.0033	0.0030
90	0.514	0.0032	0.0035
135	0.746	0.0032	0.0044
165	0.869	0.0032	0.0054
180	0.931	0.0032	0.0064
195	0.97	0.0033	0.0078
210	0.984	0.0032	0.0085

Op vele wijzen herhaald gaven deze experimenten steeds een dergelijke uitkomst. B.v.

3 Febr. 1916. 3 gram Soja-meel geëxtraheerd met 200 c.c. ammonium-carbonaatoplossing.

Een rij reageerbuizen, elk met 10 c.c. filtraat en een druppel octyl-alcohol in het bad van 27°. Elke buis verbonden met een wijde buis (over den rand van het bad), bevattende 25 c.c. H_2SO_4 $\frac{2}{5}$N en wat water. Dus koolzuurstroom eerst door reageerbuis en dan door wijde buis. Uit een kolf in 'tzelfde bad 1 c.c. van een 2,75 % ureumoplossing toegevoegd aan elke reageerbuis. Reactie gestopt zonder buizen te openen of verbindingen los te maken door 25 c.c. verzadigde kalium-carbonaat oplossing in de reageerbuis te laten loopen en de ammonia over te blazen gedurende een geheelen nacht. Volgende dag getitreerd dadelijk in de wijde buis met NaOH$\frac{1}{10}$N en alizarin sulphonzure natron als indicator. Twee reageerbuizen met 10 c.c. extract, zonder ureum, op dezelfde wijze behandeld.

Resultaten in:

TABEL 16.

3 gram Soja-meel per 200 c.c.
ammonium-carbonaat (= 2 % ureum)

0.25 % ureum — $p_H = 7$

t (minuten)	*y*	$m = \frac{0,1 \log \frac{1}{1-y} + 0,25\,y}{t}$
40	0.495	0.0038
60	0.685	0.0037
70	0.805	0.0039
80	0.876	0.0039
90	0.936	0.0039
95	0.945	0.0038
100	0.968	0.0039
105	0.974	0.0038
110	0.985	0.0039

Deze resultaten toonen duidelijk, dat de formule $\frac{nc}{0,434} log \frac{1}{1-y} + ay = mt$ even goed de loop der reactie voorstelt in ureumoplossingen van concentraties veel grooter dan die in de boven behandelde phosphaat-mengsels. De nagenoeg rechte lijn, gewoonlijk gevonden bij de hydrolyse van ureum door urease, wanneer a niet klein is of in elk geval groot is in vergelijking met $\frac{nc}{0,434}$, is even

goed in overeenstemming met de stralingstheorie als de logarithmische kromme, de gewone lijn van de reactie der eerste orde, voorspeld door dezelfde theorie voor verdunde ureum oplossingen, wanneer c betrekkelijk groot is.

Aanvangssnelheid van urease-werking in ureum oplossingen van verschillende concentratie.

Wanneer phosphaten als buffers gebruikt worden, is het, als boven gemeld, onmogelijk het verloop der reactie te bestudeeren in ureum oplossingen, welker concentratie ongeveer 0,02 % te boven gaat. Indien wij echter onder gelijke condities dezelfde hoeveelheid enzym op ureum oplossingen van verschillende concentraties slechts zoover laten inwerken, dat niet meer dan 0,02 % ureum concentratie gehydrolyseerd wordt, dan kunnen de phosphaatmengsels een constante p_H handhaven in deze beginperioden van de omzetting.

De experimenten volgens dit plan waren alle op de volgende wijze ingericht.

Een kolf van 250 c.c. werd tot de streep gevuld met een oplossing van een mengsel van Na_2HPO_4 2aq en KH_2PO_4, zoo berekend, dat de phosphaat concentratie gedurende de reactie 8 % zou zijn.

Een kleine hoeveelheid Soja-meel werd met deze oplossing gemengd en de kolf gedurende 1 uur in het bad van 27° gelaten. Na toevoeging van kiezelgur (hetzelfde gewicht als dat van het Soja-meel) werd de oplossing gemakkelijk en snel door een vouwfilter gefiltreerd. Van het volkomen heldere filtraat werden hoeveelheden van 10 c.c. in reageerbuizen gebracht (als boven) en in hetzelfde bad geplaatst, waarin een serie kolven met ureum oplossingen op 27° gebracht werden. Daar 2 c.c. van deze ureum oplossingen toegevoegd zouden worden aan 10 c.c. van het enzym extract, hadden al die ureum oplossingen 6 maal de vereischte eindconcentratie. De drie hoogste concentraties van 4 %, 6 % en 8 % werden verkregen door een oplossing van 4,8 gram ureum in 10 c.c. te maken en daarvan 1 c.c. met 1 c.c. water te brengen in de 4 % buis, 1,5 c.c. met 0,5 c.c. water in de 6 % buis en 2 c.c. in de 8 % buis.

Na een vastgestelden reactie-tijd, gewoonlijk 2 uren, werd de gevormde NH_3 bepaald door de reageerbuizen met wijdere buizen te verbinden, waarin 10 c.c. H_2SO_4 $\frac{1}{50}$ N en wat water gebracht was, 25 c.c. verzadigde kaliumcarbonaat oplossing en een druppel octylalcohol toe te voegen en een stroom lucht twee uur lang door te voeren.

De p_H werd met den electrometer bepaald in 10 c.c. phosphaat-enzym-oplossing + 2 c.c. water bij 27°.

De gebruikte hoeveelheid Soja-meel was steeds 0,2 gram. Alleen bij de laagste p_H moest meer gebruikt en een andere reactietijd gekozen worden. De onderstaande resultaten zijn dan op 0,2 gr. Soja in 120 minuten omgerekend. Zie tabellen 17 en 18.

TABEL 17.

c.c. $NH_3 \frac{1}{50} N$, gevormd in 120 minuten in c.c.

Concentratie ureum a	p_H = 5.83	p_H = 6.68	p_H = 6.81	p_H = 6.89	p_H = 7.14	p_H = 7.47	p_H = 7.83	p_H = 8.10
0.03	0.068	0.58	0.95	1.2	1.65	3.2	3.2	2.9
0.05		0.9	1.4	1.7	2.25	3.45	3.75	3.2
0.08	0.164	1.3	1.9	2.3	2.7	4.05	3.55	3.2
0.1	0.21	1.6	2.15	2.5	3.—	4.15	4.1	3.4
0.2	0.375	2.3		3.4	3.55	4.65	4.3	3.7
0.5	0.85	3.3	3.9	4.3	4.1	5.—	4.5	3.8
1.—	1.5	3.9	4.5	4.65	4.3	5.05	4.25	3.9
2.—	2.75	4.45	4.9	5.2	4.5	5.15	4.75	4.1
4.—	3.2	4.8	5.15	5.4	4.45	5.25	4.6	3.9
6.—	4.15	4.85	5.2	5.3	4.45	4.85	4.35	3.65
8.—	4.65	4.8	5.—	5.15	4.25	4.6	4.—	3.25

De gevolgtrekkingen, uit deze resultaten te maken, zijn de volgende:

Het bedrag van de omzetting, geleverd onder gelijke condities van temperatuur en p_H door een gelijke hoeveelheid urease in ureum oplossingen van verschillende concentraties wordt nooit werkelijk constant, zelfs niet in sterk geconcentreerde oplossingen.

Hoe hooger de zuurgraad (de ware reactie) van de oplossingen, hoe meer dat bedrag toeneemt met toenemende concentratie.

Deze feiten zijn in overeenstemming met onze fundamenteele formule:

$$- dx = m \frac{x}{x + nc} dt$$

Voor de aanvangssnelheid, als x nog gelijk is aan a, geeft deze:

$$- \frac{dx}{dt} = m \frac{a}{a + nc}$$

TABEL 18.

$$m = \frac{\frac{nc}{0,434} \log \frac{1}{1-y} + ay}{t} \quad \text{of:} \quad m = -\frac{dx}{dt}\,\frac{x+nc}{x}\Big]^{x=a}$$

Kortheidshalve zijn de waarden van m met 1000 vermenigvuldigd.

Concentratie ureum a	$p_H =$ 5.83	$p_H =$ 6.68	$p_H =$ 6.81	$p_H =$ 6.89	$p_H =$ 7.14	$p_H =$ 7.47	$p_H =$ 7.83	$p_H =$ 8.10
0.03	0.068	0.103	0.135	0.153	0.140	0.23	0.174	0.139
0.05		0.114	0.142	0.157	0.160	0.19	0.181	0.144
0.08	0.066	0.128	0.150	0.168	0.160	0.20	0.161	0.140
0.1	0.067	0.136	0.153	0.166	0 167	0.20	0.184	0.147
0.2	0.066	0.143		0.181	0.172	0.21	0.185	0.157
0.5	0.08	0.165	0.184	0.199	0.184	0.21	0.189	0.159
1.—	0.102	0.178	0.194	0.199	0.182	0.21	0.177	0.163
2.—	0.152	0.185	0.208	0.220	0.190	0.22	0.198	0.171
4.—	0.154	0.205	0.218	0.226	0.186	0.22	0.192	0.163
6.—	0.19	0.205	0.219	0.221	0.186	0.20	0.181	0.152
8.—	0.20	0.203	0.209	0.214	0.177	0.19	0.167	0.135

Indien nc groot is, vergeleken met a, is de aanvangssnelheid klein; een grootere a geeft een grootere snelheid. Anderzijds, als nc klein is, is $\frac{a}{a+nc}$ zelfs voor lage ureum concentraties niet klein en zal spoediger tot een constante waarde naderen.

De waarden van m in de tabel 18 zijn, wanneer y een eenigszins aanmerkelijke waarde had, berekend uit de geïntegreerde vergelijking; anders uit de differentiaal vergelijking voor de aanvangssnelheid, zoodra de ureum concentratie hoog genoeg was om beide vergelijkingen hetzelfde resultaat te doen geven.

Het niet constant zijn van m zal nu blijken juist een nieuwen experimenteelen steun te geven aan de stralingstheorie.

Immers, bij het doorzien van tabel 17 zal een merkwaardig verschijnsel worden opgemerkt.

Bij lage p_H nemen de cijfers steeds toe van 0,03°/₀ tot 8°/₀ ureum concentratie.

Bij hoogere p_H is er eerst een toename en dan, in de meest geconcentreerde ureum oplossingen een afname.

Dit is juist, wat de theorie ons doet verwachten.

Daar een enzym deeltje (of molecuul) het centrum is van een sfeer van actie en in dit geval die actie een alkalische stof voortbrengt, zal de H-ionen concentratie rondom het enzym-molecuul verlaagd worden en laag gehouden worden door de enzymwerking zelf. Dit proces zal verwaarloosbaar zijn in verdunde oplossingen, maar in geconcentreerde, waar de sfeer van actie tot een klein volume beperkt is, zal een gevoelige plaatselijke vermindering van de H-ionen concentratie verwacht mogen worden.

Wanneer herinnerd wordt aan de afhankelijkheid van de urease-activiteit m van p_H (zie fig. 3), zal het duidelijk zijn, dat in oplossingen van lage p_H een vermindering der H-ionen concentratie rondom de enzymmoleculen, dat is een vermindering van c (of toename van p_H) een toename van m beteekent. Vandaar dat door twee oorzaken hier in hooge ureum concentraties meer omzetting gevonden wordt. Immers, behalve de toename van $\frac{a}{a+nc}$ is er ook nog een toename van m, omdat de p_H, hoewel constant voor zoover als de oplossing in zijn geheel gemeten kan worden, is toegenomen in de kleine sfeer rondom het enzym, waarin de werking zich afspeelt.

Indien p_H niet zeer laag is, kan de productie van een alkalische stof rondom het enzymmolekuul de p_H doen toenemen boven het optimum in deze phosphaatoplossingen. Vandaar dat in geconcentreerde ureumoplossingen van een p_H dicht bij of boven dat optimum de p_H in de werkingssfeer licht zoover verhoogd kan worden, dat m verminderd wordt.

(Wordt vervolgd.)

Scheikunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt namens de Heeren A. SMITS, G. L. C. LA BASTIDE en J. A. VAN DEN ANDEL een mededeeling aan: „*Over het verschijnsel na anodische polarisatie*". I.

(Mede aangeboden door den Heer S. HOOGEWERFF).

Inleiding.

Wanneer de exp. electrische potentiaal van ijzer gemeten wordt *gedurende* de anodische polarisatie, neemt men waar, dat deze potentiaal minder negatief wordt naarmate de stroomdichtheid toeneemt. Voert men dit experiment uit in oplossingen, die geen of weinig halogeen-ionen bevatten, dan neemt dit verschijnsel boven een bepaalde stroomdichtheid sterk toe en het ijzer gaat dan daarbij van den actieven in den passieven toestand over. Hoewel dit overgaan van den actieven in den passieven toestand niet bij alle metalen wordt waargenomen, alle vertoonen, terwijl zij anode zijn, een potentiaal, die min of meer in de positieve richting is verschoven. Dit verschijnsel der anodische polarisatie is, evenals dat der kathodische polarisatie door de nieuwere beschouwingen omtrent de electromotorische evenwichten op eenvoudige wijze verklaard [1]).

Een nieuw verschijnsel deed zich echter voor, toen SMITS en LOBRY DE BRUYN, ruim twee jaar geleden, bij de anodische polarisatie van ijzer gebruik maakten van een roteerenden commutator volgens LE BLANC [2]).

Deze commutator is zoo geconstrueerd, dat de potentiaal-sprong niet gemeten wordt tijdens den stroomdoorgang, maar onmiddellijk *na* verbreking van den stroom. Bij deze methode van werken werd het merkwaardige verschijnsel ontdekt, dat wanneer de stroomdichtheid niet zóó groot was, dat het ijzer passief werd, het ijzer niet een minder negatieven, doch een *sterker negatieven* potentiaal vertoonde, hetgeen dus zeggen wilde, dat het ijzer *na* anodische polarisatie een verandering van den potentiaal vertoonde in een richting tegengesteld aan die, welke tijdens den stroomdoorgang is waar te nemen.

Aanvankelijk werd gemeend, dat dit verschijnsel aan de een of andere fout in de opstelling moest worden toegeschreven, doch al

[1]) Zeitschr. f. phys. Chem. **92**, 1 (1916).
[2]) Zeitschr. f. phys. Chem. **5**, 469 (1890).

spoedig bleek, dat dit niet het geval was en dat hetzelfde verschijnsel, doch eenigszins gewijzigd, zich ook voordeed bij nikkel, en zooals Dr. ATEN later vond ook bij chroom.[1])

Wanneer zonder den genoemden commutator werd gewerkt, en het verloop van den potentiaal van het ijzer onmiddellijk *na* anodische polarisatie met den tijd werd nagegaan, bleek dat de potentiaal na een minimum te hebben doorloopen, weer snel tot de aanvangswaarde steeg.

Daar de nadere bestudeering van dit verschijnsel het onderzoek van SMITS en LOBRY DE BRUYN op een zijweg zou hebben gevoerd, werd deze studie tot later uitgesteld en dit is de reden, waarom eerst thans tot de publicatie van dit verschijnsel wordt overgegaan.

Registreering van het verschijnsel.

Om het verschijnsel vast te leggen hebben wij ons bediend van de fotografische registreermethode, bij gebruikmaking van den galvanometer van MOLL. De potentiaal van een ijzer-electrode I werd gemeten t.o.v. een andere hulp-ijzerelectrode II, terwijl als kathode een platina blikje diende. De electrode was een $^1/_2$ normaaloplossing van ferro-sulfaat. De ijzer-electrode I, die een oppervlak van ongeveer 25 m.m^2 bezat, werd gedurende korten tijd tot anode gemaakt, terwijl de stroomdichtheid zoo gekozen werd, dat het ijzer bij langeren stroomdoorgang passief geworden zou zijn. *Onmiddellijk* na deze anodische polarisatie werd de galvanometer geschakeld in den keten ijzer I-electrolyt-ijzer II, zoodat het verloop van den potentiaal, dat ijzer I *na* de anodische polarisatie vertoonde, nauwkeurig kon worden geregistreerd.

Op de film werd nu opgenomen, ten eerste de potentiaal van ijzer I t.o.v. ijzer II vóór de proef, ten tweede de kromme, die het verloop van het verschijnsel aangeeft, ten derde de nul-lijn, ten vierde een lijn, die overeenkomt met een bepaald potentiaal-verschil, en ten slotte tijd-lijnen door een signaal-inrichting gegeven.

Zoo werden bij onze proeven met ijzer in $^1/_2$ N ferro-sulfaat-opl. de volgende fotografische opnamen verkregen.

De lijn DE geeft den potentiaal van ijzer I t.o.v. ijzer II vóór de anodische polarisatie aan. De andere twee horizontale lijnen, die zich over de geheele figuur voortzetten, zijn de nul-lijn en de lijn voor —90 milli Volt. De kromme A B C geeft het verschijnsel weer, dat men waarneemt *na* anodische polarisatie van ijzer I met een stroomdichtheid van ± 0,360 Amp/cm.^{2}.

[1]) Versl. Kon. Akad. v. Wet. **26**, 1187 (1918).

De ijzerelectrode I is na deze anodische polarisatie aanvankelijk in edele richting verstoord, doch deze verstoring wordt met groote

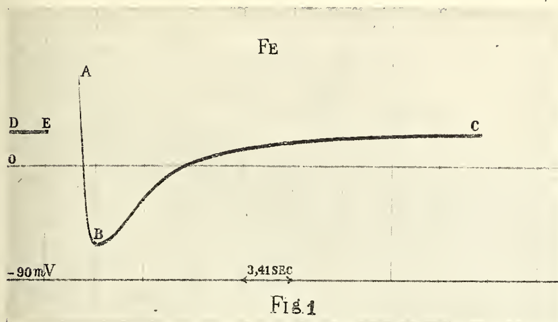


Fig.1

snelheid opgeheven en de potentiaal daalt tot een waarde, die ongeveer 90 milli Volt negatiever is dan de potentiaal vóór de anodische polarisatie. Het ijzer behoudt slechts korten tijd dezen negatieven potentiaal, en stijgt eerst met toenemende en daarna met afnemende snelheid tot de waarde, die vóór de anodische polarisatie werd waargenomen.

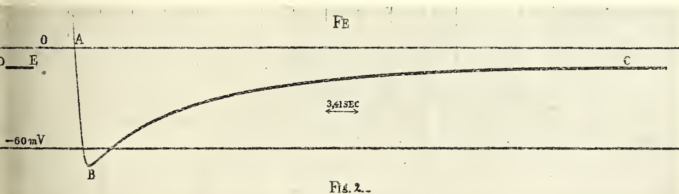


Fig. 2.

In Fig. 2 is het verschijnsel gefotografeerd, dat waargenomen werd, wanneer in plaats van een oplossing van ferro-sulfaat, een oplossing van $^1/_{10}$ N. Ferro-chloride werd gebruikt. Er zij hier met een enkel woord aan herinnerd, dat de concentratie-vergrooting in de grenslaag door de korte anodische oplossing een geringe verandering van den potentiaal in positieve richting tengevolge heeft. Om na te gaan in hoeverre het gevonden verschijnsel iets bijzonders is, dat door de *anodische* polarisatie bij ijzer wordt veroorzaakt, is ook het verloop

van den potentiaal van het ijzer gefotografeerd *na kathodische* polarisatie. Deze foto is met Fig. 3 aangeduid; wij zien, dat het ijzer na kathodische polarisatie met een stroomdichtheid van ± 0,360 Amp/cm.² nog vrij sterk in onedele richting is verstoord, de poten-



Fig. 3.

tiaal van het ijzer was n.l. bij dit experiment aanvankelijk ongeveer 80 milli Volt. negatiever dan voor de kathodische polarisatie, welk potentiaal-verschil echter na een minuut weer bijna geheel was verdwenen. Wij willen er hier op wijzen, dat een klein gedeelte van den potentiaal in negatieve richting het gevolg is van de concentratie-afname in de grenslaag bij de kathodische afzetting van het metaal.

Daar zooals reeds werd vermeld vroeger gebleken was, dat nikkel, hoewel veel trager, hetzelfde verschijnsel vertoonde als ijzer, zijn met nikkel dezelfde proeven genomen als met ijzer en wel met het volgende resultaat.

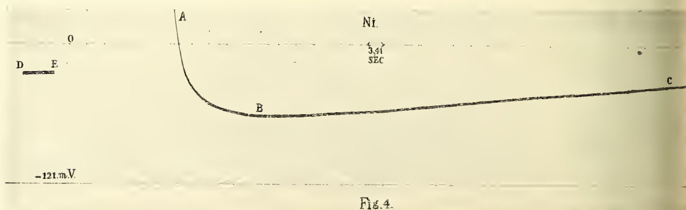


Fig. 4.

Fig. 4 geeft het verloop van de nikkel-electrode met een oppervlak van 80 m.M.² in een oplossing van $^1/_{10}$ N. $NiSO_4$, *na anodische* polarisatie met een stroomdichtheid van ± 0,075 Amp./cm.², waaruit blijkt, dat hier hetzelfde verschijnsel optreedt als bij ijzer; de potentiaal van het metaal wordt na anodische polarisatie negatiever en keert na een minimumwaarde bereikt te hebben weer langzaam tot de oorspronkelijke waarde van vóór de anodische

polarisatie terug. Het verschijnsel is hetzelfde als bij ijzer, doch het verloopt hier met veel geringere snelheid.

In Fig. 5 is het resultaat van de opname van het potentiaalverloop bij nikkel, *na* kathodische polarisatie met dezelfde stroomdichtheid.

Het nikkel is aanvankelijk vrij sterk in onedele richting verstoord, de potentiaal is ongeveer 240 m. V. negatiever dan vóór de katodische polarisatie, doch wordt met afnemende snelheid steeds minder

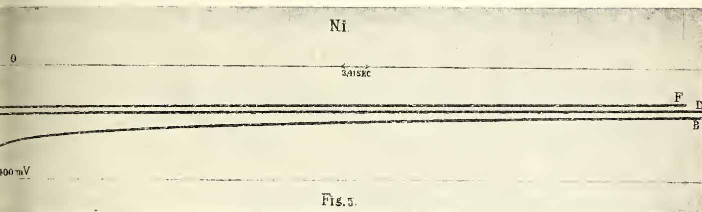


Fig. 5.

negatief, om eerst na bijna 5 minuten weer den potentiaal van vóór de katodische polarisatie aan te nemen. Daar het geheele verloop zoo veel tijd in beslag nam, hebben wij de trommel met den film eenige omwentelingen laten uitvoeren, zoodat de opeenvolgende stukken boven elkaar op de foto zijn gekomen.

Het is van belang hier op te merken dat RAHTERT [1]), die ook proeven in deze richting heeft genomen, bij nikkel *na* anodische polarisatie een negatieveren potentiaal vond in overeenstemming met ons, doch na kathodische polarisatie een veel positieveren potentiaal. Dit is in strijd met hetgeen door ons gevonden is en moet waarschijnlijk aan een fout in de opstelling bij het onderzoek van RAHTERT worden toegeschreven. Want vroeger werd door SMITS en LOBRY DE BRUYN, en thans door ons, steeds het verschijnsel gevonden, dat hier in Fig. 5 is gefotografeerd.

Daar het van belang was ook nog een paar andere metalen in onze beschouwingen op te nemen, hebben wij ook nog zilver en koper onderzocht, gedompeld in een zilver-nitraat resp. kopersulfaat-oplossing met het volgende resultaat.

Op de foto, fig. 6, is het potentiaalverloop van een zilver-electrode met een oppervlak van 42 mm² in een 0,1 N $AgNO^3$-oplossing na anodische polarisatie met een stroomdichtheid van 0,333 Amp./cm.² opgenomen, waaruit blijkt, dat hier het gewone verloop optreedt. Het zilver heeft ook na anodische polarisatie aanvankelijk een positieve-

[1]) Zeitschr. f. phys. Chem. **86**, 567 (1914).

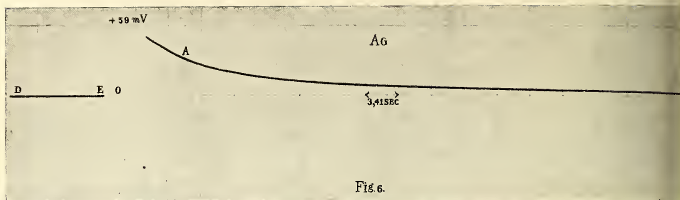


Fig. 6.

ren potentiaal, die met voortdurend geringere snelheid kleiner wordt.

Na kathodische polarisatie met dezelfde stroomdichtheid vindt men eveneens aanvankelijk een te negatieven potentiaal, die voortdurend minder negatief wordt, zooals de foto Fig. 7 laat zien.

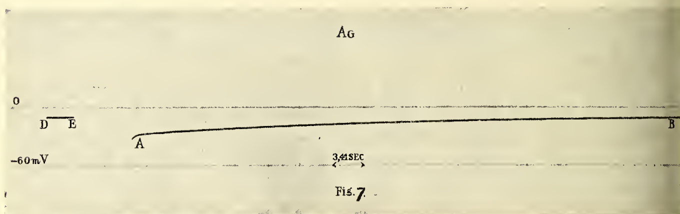


Fig. 7.

Ten slotte is ook een koper-electrode met een oppervlak van 9 m.m^2 in 0,1 N $CuSO_4$-oplossing onderzocht, en daarbij is hetzelfde gevonden als bij zilver in 0,1 N $AgNO_3$, zooals uit de foto's Fig. 8 en Fig. 9 blijkt. De stroomdichtheid bedroeg hier 0,666 Amp/cm$_2$.

Tot heden is dus een bijzonder gedrag alleen gevonden bij ijzer, nikkel en chroom, metalen dus, die ionen van verschillende waardigheid leveren en het was daarom gewenscht na te gaan of het verschijnsel zou blijven bestaan, wanneer de concentratie-verbonding

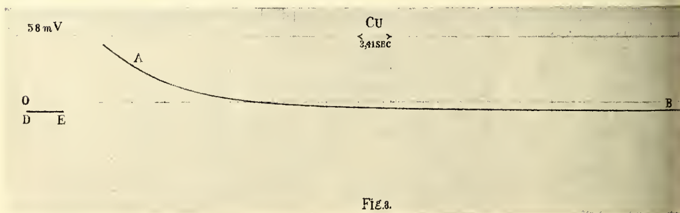


Fig. 8.

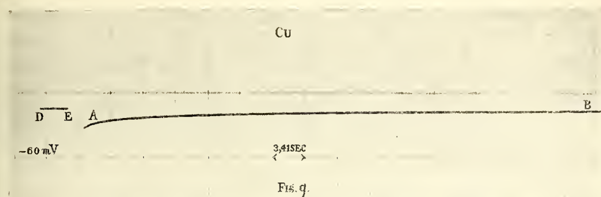


Fig. 9.

tusschen de verschillende ionen in den electrolyt overal zoo is, dat het metaal, in innerlijken evenwichtstoestand met dezen electrolyt kan koëxisteeren. Dit werd nu bij ijzer nagegaan door een oplossing van Ferro-chloride langen tijd achtereen in het vat, waarin de definitieve proef zou worden genomen, te koken met ijzer-poeder, terwijl zuivere waterstof werd overgeleid. De zoo verkregen oplossing was 0,6 N.

Het resultaat met deze oplossing verkregen was in hooge mate overtuigend. Zooals Fig. 10 laat zien was er na anodische polarisatie niets van een minimum te bespeuren, en het ijzer gedroeg zich, qualitatief althans, als zilver en koper.

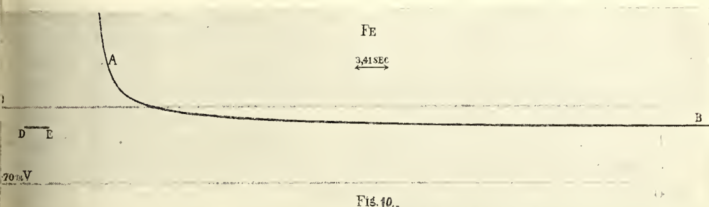


Fig. 10.

Het vermoeden ligt nu voor de hand, dat ook bij nikkel en chroom het verschijnsel op een dergelijke wijze tot verdwijning kan worden gebracht, waaromtrent thans proeven worden genomen.

Laboratorium voor Algem. en Anorg.
Chemie der Universiteit.

Amsterdam, 27 Maart 1919.

Scheikunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt namens den Heer A. SMITS een mededeeling aan: *„Over het verschijnsel van anodische polarisatie"*. II.

(Mede aangeboden door den Heer S. HOOGEWERFF).

1. In deze mededeeling zal het eigenaardige verschijnsel besproken worden, dat in de hiervoorgaande eerste mededeeling met bovenstaanden titel is vermeld. Zooals daar reeds is gezegd, heb ik het beschreven verschijnsel ruim twee jaar geleden voor het eerst met den Heer LOBRY DE BRUYN bij ijzer en nikkel waargenomen, doch de publicatie bleef achterwege, omdat ik het noodig oordeelde het verschijnsel eerst uitvoeriger te bestudeeren.

Later is hetzelfde door den Heer ATEN [1]) bij chroom gevonden, doch hoogstwaarschijnlijk niet juist door hem geïnterpreteerd.

Verklaring van het verschijnsel.

2. Uit de vorige mededeeling is gebleken, dat „het verschijnsel" bij ijzer optrad, wanneer dit anodisch werd gepolariseerd in een oplossing van ferro-sulfaat of ferro-chloride, die wel versch waren bereid, doch niet van te voren met ijzerpoeder waren verhit.

Wij hebben er reeds vroeger op gewezen, dat ijzer in den innerlijken evenwichtstoestand alleen kan koëxisteeren met een oplossing, die practisch geen ferri-ionen bezat. Verder is het bekend, dat een oplossing, waarin ferri-ionen voorkomen, ijzer duidelijk verstoort en sterker, naarmate de ferri-ionen-concentratie grooter is. Het is ons, zooals wij reeds vroeger mededeelden zelfs gelukt ijzer passief te maken door het eenvoudig in een geconcentreerde oplossing van ferri-nitraat te dompelen.

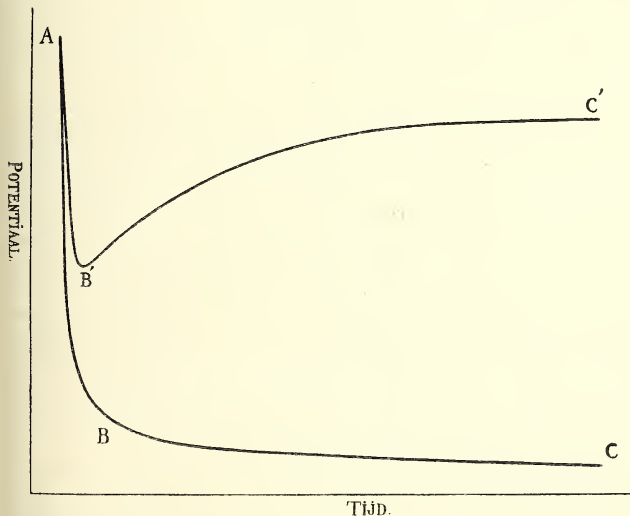
In een oplossing, die ferri-ionen bevat is de potentiaal van het ijzer dus minder negatief dan in een oplossing, die met unair ijzer koëxisteert, welke oplossing practisch vrij van ferri-ionen is. Het ijzer vertoonde dus in de oplossing, waarmede „het verschijnsel" verkregen werd niet den innerlijken evenwichtspotentiaal, maar deze was minder negatief.

Wanneer nu ijzer in een dergelijke vloeistof anodisch tot oplossing

[1]) Versl. Kon. Akad. v. Wet. **26**, 1187 (1918).

wordt gebracht zal de electrolyt in de omgeving van het ijzer een verandering ondergaan, daar ijzer, zoolang het niet passief is, zeker practisch uitsluitend als ferro-ion in oplossing gaat. Het ijzer wordt tijdens dit anodisch oplossen verstoord, zooals blijkt uit den minder negatieven potentiaal van het ijzer tijdens den stroomdoorgang, en tegelijk wordt het ijzer omgeven door een vloeistoflaagje, dat armer aan ferri-ionen is dan het overige gedeelte van de oplossing. Na verbreking van den stroom transformeert het ijzer-oppervlak zich met vrij groote snelheid in de richting van het innerlijk evenwicht, en daar het omgeven is door een oplossing, die minder ferri-ionen bevat dan de oplossing buiten de grenslaag, zal de potentiaal van het ijzer thans negatiever zijn dan vóór de anodische polarisatie. Deze toestand kan echter slechts zéér korten tijd duren, want de ferri-ionen diffundeeren van buiten in de grenslaag, tengevolge waarvan de potentiaal weer minder negatief moet worden en zal stijgen tot de oorspronkelijke waarde.

Voor het goede begrip is het nuttig de hieronder staande teekening te beschouwen.



De lijn A B C stelt voor het verloop van den potentiaal van ijzer na anodische polarisatie, wanneer het gedompeld is in de oplossing van een ferro-zout, die practisch vrij is van ferri-ionen. Het ijzer is

onmiddellijk na de anodische polarisatie vrij sterk verstoord, doch deze verstoring neemt aanvankelijk met groote snelheid en later langzamer af. De kromme A B′ C′ geeft ook het verloop van den potentiaal van ijzer na anodische polarisatie aan, maar nu nadat aan de vorige oplossing een kleine hoeveelheid van een ferri-zout is toegevoegd. De potentiaal daalt aanvankelijk ook snel, en wel beneden de eindwaarde. Was de vloeistof in de grenslaag geheel vrij van ferri-ionen geweest en gebleven, dan zou de potentiaal de kromme A B C zijn gevolgd, maar thans bevindt het ijzer zich wel is waar in een vloeistoflaag, die armer is aan ferri-ionen dan de vloeistof buiten de grenslaag, maar door de aanwezige ferri-ionen kan het ijzer zich niet in innerlijk evenwicht stellen en de potentiaal kan dus niet zoo'n groote negatieve waarde bereiken als wanneer de ferri-ionen, zooals bij de eerste proef aanwezig waren.

Buitendien diffundeeren voortdurend meer ferri-ionen in de grenslaag, waardoor de verstoring van het ijzer weer toeneemt en de potentiaal weer minder negatief wordt. Plaatst men in gedachte Fig. 10 onder Fig. 2 van de vorige publicatie, dan krijgt men de zooeven aangegeven schematische teekening.

Zoo moet het verschijnsel bij ijzer worden verklaard en hoogstwaarschijnlijk zal het bij nikkel en chroom op dezelfde wijze verklaard moeten worden

Dat het minimum bij ijzer eerder optreedt en meer uitgesproken is, moet toegeschreven worden aan de groote snelheid waarmede ijzer, zoolang het nog niet passief is, zich van een verstoring tracht te herstellen. Nikkel is in een $NiSO_4$-oplossing veel trager dan in een $NiCl_2$-oplossing, en dat uit zich ook weer in dit verschijnsel.[1])

3. Wanneer nu bij het voortgezet onderzoek, zooals te verwachten is, blijkt, dat het genoemde verschijnsel ook bij nikkel en chroom tot verdwijnen kan worden gebracht door de electrolyten van te voren met de metalen in poedervorm langen tijd, onder overvoeren van waterstof, te verhitten, dan is het zeker, dat de tot heden gebruikte oplossingen van nikkelsulfaat en chromosulfaat nog een tweede ionensoort bevatten, en wel in een concentratie, verschillend van die, welke heerscht in de vloeistof, die koëxisteert met het metaal, dat in innerlijk evenwicht verkeert.

Bij nikkel staan wij dan voor de interessante vraag, wat hier het tweede nikkel-ion is.

Zoo zal dan vermoedelijk blijken, dat het gevonden verschijnsel een uitnemend middel aan de hand doet om uit te maken, of een

[1]) In een volgende mededeeling zal dit duidelijk aan den dag komen.

oplossing al dan niet verschillende ionensoorten van een zelfde element bevat.

Ten slotte wil ik er de aandacht op vestigen, dat het zéér goed mogelijk is, dat als het ware het spiegelbeeld van het gevonden verschijnsel zich kan voordoen na kathodische polarisatie; tot heden is dit echter nog niet door ons gevonden. De door RATHERT gepubliceerde uitkomsten zouden deze mogelijkheid bij nikkel bewijzen, doch naar onze meening zijn deze uitkomsten niet juist.

Laboratorium voor Algem. en Anorg.
Chemie der Universiteit.

Amsterdam, 27 Maart 1919.

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt een mededeeling aan van den Heer D. COSTER: *„Het gebruik van het audion in de draadlooze telegrafie"*.

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

In de jongste successen op het gebied van de draadlooze telegrafie heeft het drie-electrodenrelais of audion wel de belangrijkste rol gespeeld. Het audion bestaat uit een vacuumbuisje, waarin drie electroden ingesmolten zijn: een gloeidraadkathode k, een meestal plaatvormige anode a en een derde tusschen de beide vorige geplaatste hulpelectrode h, bestaande uit eenige parallelle en onderling verbonden metaaldraadjes en daarom rooster of tralie genoemd. De eigenschappen van het audion worden bepaald door de audionkarakteristieken, die het verband tusschen de stroomen i_a en i_h eenerzijds en de spanningen e en v anderzijds aangeven. (Zie fig. 1). De stroom i_h is meestal zeer klein t. o. v. i_a en kan in veel beschouwingen verwaarloosd worden. Een eenvoudig schema ter bepaling der karakteristieken geeft fig. 1, waarin eenvoudigheidshalve de meetinstrumenten niet zijn aangegeven. Fig. 2 geeft i_a als functie van e, respectievelijk voor verschillende waarden van v. Door paral-

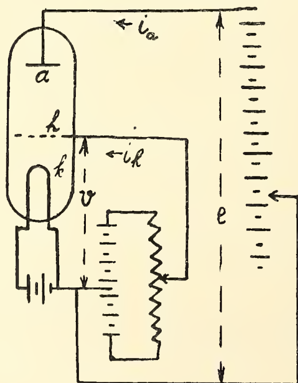


Fig. 1.

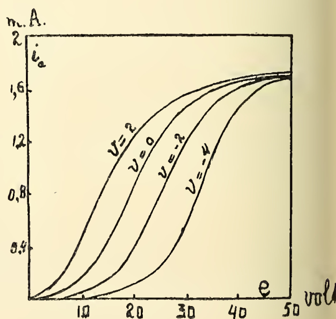


Fig. 2.

lelle verschniving zijn de verschillende karakteristieken uit elkaar af te leiden. Fig. 3 geeft i_a als functie van v bij konstante e. Deze karakteristieken zijn gelijksoortig met die van fig. 2; doorgaans evenwel zijn zij steiler. Fig. 2 en 3 geven het essentieele der audionskarakteristieken; de verschillende uitvoeringsvormen vertoonen meer of minder belangrijke afwijkingen.

Fig. 3.

Ofschoon de aard der gebruikte gasresten en de graad hunner verdunning een belangrijke rol spelen in de bepaling der individueele eigenschappen van het audion, schijnen zij niet van essentieele beteekenis te zijn. Het is in alle geval aan LANGMUIR[1]) gelukt een normaal functioneerend drie-electrodenrelais te construeeren, door hem pliotron genoemd, waarin elk spoor van gasresten schijnt te ontbreken. We kunnen ons dus bij de volgende bespreking gevoegelijk op het standpunt stellen, dat de geleiding binnen het audion uitsluitend door de uit de kathode tredende „gloeielectronen" of „thermoionen" geschiedt.

Voor het aantal N per tijdseenheid uit een gloeidraad in het vacuum uittredende electronen vond RICHARDSON de bekende formule:

$$N = aT^{\lambda} e^{-\frac{b}{T}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

hierin is T de abs. temperatuur van den gloeidraad, a en b zijn konstanten, λ is een grootheid, die weinig van de eenheid verschilt. De uittredende electronen kan men opvangen op een tegenover de kathode geplaatste anode; N bepaalt men dan door stroommeting. Bij konstante T neemt de stroom aanvankelijk bij grooter wordend potentiaalverschil toe. Eerst de maximale stroom, „de verzadigingsstroom" volgt in zijn afhankelijkheid van de temperatuur de formule van RICHARDSON.

Voor dit aanvankelijk toenemen van den stroom met de aangelegde spanning gaf LANGMUIR[2]) zijn theorie der „ruimteladingen". De in het veld tusschen de kathode en anode aanwezige electronen verkleinen het potentiaalverval in de nabijheid der kathode. Is de

[1]) LANGMUIR: General Electr. Rev. (1915) p. 327.
HUND: Jahrb. f. Drahtl. Tel. (1916) 10 p. 521.

[2]) Phys. Rev. (1913) p. 457.

gradiënt aan de kathode 0 zoo kunnen een gedeelte der uitgetreden electronen weer op de kathode terugvallen. Deze theorie voerde LANGMUIR tot de formule[1]):

$$i = CV^{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hierin is i de stroom, zoolang hij beneden den verzadigingsstroom blijft, V is de aangelegde spanning, C een konstante, die van den vorm en afstand der electroden afhangt. In de omgeving van den verzadigingsstroom gekomen, gaat i over in een konstante waarde.

Dit verband tusschen thermoionenstroom en aangelegde spanning vindt men terug in de audionkarakteristieken van fig. 2 en 3. Een complicatie geeft hier het optreden van de derde electrode: het rooster, waarover we het volgende kunnen opmerken. Het audion wordt doorgaans gebruikt bij zóó groote anodespanningen, dat de verzadigingsstroom zou optreden, indien er geen rooster aanwezig was. De taak van het rooster is, den door de kathode uitgezonden electronenstroom in meer of mindere mate te remmen. De potentiaal van het rooster wordt dan ook steeds lager gekozen dan de potentiaal, dien men ter plaatse zou hebben bij ontbreken van het rooster. Doorgaans is de roosterpotentiaal weinig verschillend van den gemiddelden kathodepotential, in vele gevallen blijft hij zelfs daar beneden. Van de electronen, die het vlak bereiken, dat men zich door het rooster denken kan, zullen dus verreweg de meeste tusschen de roosterdraden door naar de anode gaan en slechts weinige de roosterdraden treffen. Het in vele gevallen geringe oppervlak der roosterdraden werkt ook hiertoe mee. De roosterstroom i_h (zie fig. 1) is dus in den normalen bedrijfstoestand klein t. o. v. den anodestroom i_a. De anodestroom zelf hangt niet alleen af van den anodepotentiaal e, maar ook van den roosterpotentiaal v. Het is wel plausibel om als ,,drijvende kracht'' voor i_a den gemiddelden potentiaal te nemen, dien men heeft in het vlak door het rooter. Duiden we dezen aan door φ, dan is zoolang de anodestroom zijn maximale waarde nog niet bereikt heeft, φ een lineaire functie van e en v

$$\varphi = \alpha e + \beta v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Voor den anodestroom krijgen we dus aanvankelijk een verloop als aangegeven door

$$i_a = C(\alpha e + \beta v)^{\frac{3}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

---

[1]) Een analoge formule was al vroeger gegeven door CHILD voor het transport van pos. ionen. Zie Phys. Rev. (1911) p. 492.

Een overeenkomstige empirische formule wordt door LANGMUIR[1]) gegeven voor zijn pliotron.

In de draadlooze telegrafie wordt het audion gebruikt als gelijkrichter en versterker. Aan de hand van de karakteristieken van fig. 3 zijn deze functies licht na te gaan. Wordt de oogenblikkelijke bedrijfstoestand van het audion door het punt B van één dezer karakteristieken aangegeven, zoo ziet men dat met kleine fluctuaties van den roosterpotentiaal relatief groote veranderingen in den anodestroom gepaard gaan. Dank zij het lineair verloop van de karakteristiek in de omgeving van B, zijn deze stroomvariaties evenredig met de variaties van den roosterpotentiaal. Van groot belang hierbij is nog, dat het rooster zelf weinig stroom opneemt, „het reageert op spanningen," er zijn dus zeer kleine energieën noodig om de potentiaalveranderingen van het rooster te bewerken. In de punten A en C werkt het audion tevens als gelijkrichter: bij *gelijke* potentiaalveranderingen in positieven en negatieven zin behooren *ongelijke* stroomvariaties.

In de laatste jaren heeft men gevonden, dat het audion nog een derde functie kan verrichten. Door geschikte schakeling kan men een electrisch instabiel systeem vormen, dat aanleiding geeft tot wisselstroomen van bepaalde frequentie, evenals dit het geval is met de zoogenaamde zingende booglamp. Het is verder gebleken dat de „instabiele" schakelingen de versterkende werking nog in hooge mate vergrooten: z.g. terugkoppeling. Voor een goed begrip van het gebruik van het audion in de draadlooze telegrafie is het van het hoogste belang zijn generatieve werking te verstaan.

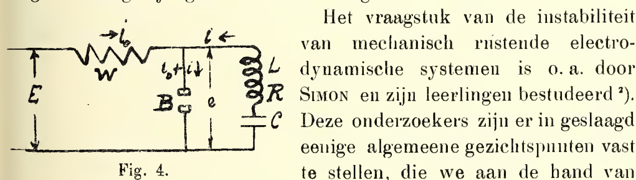


Fig. 4.

Het vraagstuk van de instabiliteit van mechanisch rustende electrodynamische systemen is o. a. door SIMON en zijn leerlingen bestudeerd[2]). Deze onderzoekers zijn er in geslaagd eenige algemeene gezichtspunten vast te stellen, die we aan de hand van een eenvoudig schema (zie fig. 4) licht na kunnen gaan.

E is een konstante electrom. kracht. W is een weerstand, die zoo groot is, dat de (variabele) weerstand van den lichtboog B steeds hiertegen te verwaarloozen is, L is een zelfinductie, waarvan de weerstand R bedraagt, C is een capaciteit. Van wege de veronder-

[1]) Zie HUND: Jahrbuch f. Dr. Tel. (1916) 10 p. 521.

[2]) Phys. Zeitschr. (1902) III p. 282.

„ „ (1903) IV p. 366 en p. 737.

Zie ook Jahrb. f. Dr. Tel. (1918) 1 p. 16.

stelling omtrent W kan de stroom i_0 als konstant beschouwd worden. We nemen aan, dat de lichtboogspanning e slechts een functie is van den lichtboogstroom $i_0 + i_1$, die voor kleine waarden van i_1 lineair verloopt. We krijgen dus voor dit probleem lineaire diff. vergelijkingen, waarvan de algemeene oplossing bestaat uit de som van een „gelijkstroom"- en een „wisselstroom-oplossing", die onafhankelijk van elkaar te beschouwen zijn. Zoo is de spanning e voor te stellen door een konstante spanning e_0, vermeerderd met een wisselspanning e_1, voor den stroom hebben we de splitsing al gemaakt in i_0 en i_1.

Voor den trillingsketen bestaande uit lichtboog, zelfinductie en capaciteit is:

$$e + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + \int\frac{i_1 dt}{C} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waaruit door differentiatie naar t:

$$L\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(R + \frac{\partial e}{\partial i_1}\right)\frac{di_1}{dt} + i_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Uit (6) volgt dat blijvende wisselstroomen alleen mogelijk zijn, indien:

$$\frac{\partial e}{\partial i_1} = -R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Met een stroomtoename dient dus een spanningsverlaging gepaard te gaan en omgekeerd m. a. w. voorwaarde voor het ontstaan van wisselstroomen is een „dalende" lichtboogkarakteristiek. Voor den wisselstroom gedraagt de lichtboog zich als een „negatieve weerstand"; de grootheid $-e_1$ is dus op te vatten als de electromotorische kracht voor den wisselstroom.

Passen we dit toe op het audion, dan zien we uit de karakteristieken van fig. 2 dat voor *konstanten* roosterpotentiaal, het audion een *stijgende* karakteristiek heeft, dus *stabiel* is. Alleen door het rooster aan den trillingsketen te koppelen is het eventueel mogelijk het systeem *labiel* te maken.

De anodestroom i [1]) is een functie van den anodepotentiaal e en den roosterpotentiaal v

$$i = f(e,v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Nemen we ook hier een lineair verband aan tusschen stroom en spanningen, dan bestaat de algemeene oplossing der differentiaalvergelijkingen voor dit systeem uit de som van een „gelijkstroomoplossing" i_0, e_0, v_0 en een wisselstroomoplossing i_1, e_1, v_1. De grootheid $-e_1$ is ook hier weer als de electromotorische kracht voor den wisselstroom op te vatten.

[1]) Gemakshalve laten we den index a hier voortaan vallen.

Nu volgt uit (8):

$$i_1 = \frac{\partial f}{\partial e} e_1 + \frac{\partial f}{\partial v} v_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Stel $\frac{\partial f}{\partial e} = \frac{1}{r}$ en $\frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial f}{\partial e}} = \lambda$, dan is:

$$-e_1 = \lambda v_1 - r i_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Uit (10) zien we nu in verband met bovenstaande beschouwingen, dat, wanneer we ons bevinden op het juiste punt der karakteristiek (b.v. B in fig. 3) en het rooster onderhevig is aan spanningsfluctuaties v_1, we het audion kunnen opvatten als een wisselstroombron met een electromotorische kracht λv_1 en een inwendigen weerstand r. De spanningsfluctuaties van het rooster kunnen door een van buiten aangrijpende electromotorische kracht veroorzaakt worden. Maar ook kunnen we ze te voorschijn roepen door het rooster op geschikte wijze met de anodeketen te koppelen, waardoor een eenmaal ontstane trilling zichzelf onderhoudt. Beide methoden vinden in de draadlooze telegrafie een veelvuldige toepassing. De tweede methode zal hier voornamelijk een punt van bespreking uitmaken. Hierbij zal de in de wisselstroomtheorie gebruikelijke „methode der complexe weerstanden" worden toegepast; waarover eerst het volgende:

Stel er is een willekeurig electrisch systeem bestaande uit zelfinducties, capaciteiten en weerstanden, waarin ergens een periodieke electromotorische kracht $E\cos pt$ aangrijpt. De stroomen, die in dit systeem optreden, voldoen aan een stel lineaire differentiaalvergelijkingen [1]) van den vorm

$$\Sigma\, R_h i_h + L_h \frac{di_h}{dt} + \int \frac{i_h\, dt}{C_h} = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ E\cos pt \end{matrix} \right. \quad \ldots \quad (11)$$

Het Σ-teeken heeft hier betrekking op alle stroomen, die optreden in een gesloten kringloop, die we in het systeem kunnen beschrijven. De oplossing van (11) bestaat uit de algemeene oplossing van een stel *homogene* lineaire vergelijkingen, die uit (11) ontstaan, door $E\cos pt = 0$ te stellen en een particuliere oplossing.

Het eerste deel der oplossing geeft de (gedempte) eigen trillingen van het systeem; het tweede deel de gedwongen trilling, die voor het continuë bedrijf alleen van belang is. Ter opsporing van de particuliere oplossing kan men gebruik maken van de complexe notatie. Voor $E\cos pt$ zet men $E e^{jpt}$, waarin $j = \sqrt{-1}$, en zoekt

[1]) Tevens aan algebraïsche vergelijkingen van den vorm $\Sigma\, i_k = 0$.

voor i_h een oplossing van den vorm $A_h e^{jpt}$, hierin is A_h complex en geeft zoowel amplitude als phase van i_h aan. In plaats van (11) ontstaat nu een stel lineaire algebraïsche vergelijkingen van den vorm:

$$\Sigma \left\{ R_h + j\left(p L_h - \frac{1}{pC_h}\right)\right\} A_h = \left\langle {0 \atop E} \right. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Vergelijkingen (12) zijn geheel analoog aan de vergelijkingen van KIRCHHOFF voor een gelijkstroomsysteem; alleen treden hier complexe weerstanden op van den vorm $Z_h = R_h + j\left(pL_h - \frac{1}{pC_h}\right)$. We kunnen hier dus dezelfde kunstgrepen toepassen als bij gelijkstroomproblemen. Zoo zijn twee parallelgeschakelde wisselstroomweerstanden Z_1 en Z_2 te vervangen door één enkelen substitutieweerstand van de grootte $\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$. Komen ook *wederzijdsche* inducties M_r in het systeem voor, dan is de linkerzijde van vergelijking (12) nog te vermeerderen met termen van den vorm $jpM_r A_r$. De methode der complexe weerstanden is ook dan nog te gebruiken, de analogie met gelijkstroomproblemen gaat dan evenwel niet meer geheel op.

Passen we nu het bovenstaande toe op het audion. De anode is door een systeem van zelfinducties, capaciteiten en weerstanden met de kathode verbonden, het rooster is met deze keten òf door een directe verbinding gekoppeld òf door middel van één of meer wederzijdsche inducties. Verder zijn er twee batterijen in het systeem aanwezig, die zorg dragen, dat de gemiddelden der spanningen e en v zoodanig zijn, dat we op het juiste punt der karakteristiek (bijv. B in fig. 3) opereeren. Voor wisselstroomen gedragen de batterijen zich als gewone weerstanden. Aangezien we ons *alleen* om wisselstroomen en -spanningen bekommeren, zullen we de indices bij deze grootheden (zie vergelijking (10)) gemakshalve voortaan weglaten.

We krijgen nu voor het audion eenzelfde stel vergelijkingen als (11), $E \cos pt$ is nu λv, als v de wisselpotentiaal van het rooster is. We kunnen deze weer reduceeren tot een stel vergelijkingen (12). De roosterpotentiaal is evenwel op zijn beurt weer een functie van de stroomen in de anodeketen. We dienen dus (12) aan te vullen met één vergelijking van den vorm

$$E = \lambda \, \Sigma \, B_r A_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

waarin de B_r's in het algemeen complexe factoren zijn.

Is het nu mogelijk voor een gegeven schakeling een stel A's te vinden, die voldoen aan (12) en (13) voor een *reëele* waarde van p, dan heeft deze schakeling een generatieve werking. Voor en na zijn

vele dergelijke schakelingen in een bijkans verwarrende menigte aangegeven, meestal neergelegd in patentbeschrijvingen. Een overzicht geven o.a. ARMSTRONG[1]) en ECCLES[2]).

We kunnen voor de „generatieve" audionschakelingen nu in verband met het bovenstaande de volgende algemeene regels geven:

A. Heeft men eenmaal een schakeling, die wisselstroomen geeft van een bepaalde frequentie, zoo kan men hieruit andere afleiden die stroomen geven van dezelfde frequentie, wanneer men de optredende wisselstroomweerstanden Z vervangt door andere, die voor deze frequentie aequivalent zijn. Zoo kan men twee parallel geschakelde wisselstroomweerstanden Z_1 en Z_2 vervangen door één enkelen ter grootte $\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

B. Ook kan men nieuwe schakelingen vinden door alle optredende wisselstroomweerstanden te vervangen door hun toegevoegde complexen. Immers in dit geval voldoen aan vergelijkingen (12) en (13) een stel aan de vorige toegevoegde complexe A's eveneens voor een reëele waarde van p. Voor het geval, dat in de keten geen wederzijdsche inducties aanwezig zijn, kan men zulks bereiken door overal zelfinducties L_h door capaciteiten C''_h te vervangen en omgekeerd, daarbij zorgdragende dat $L_h C''_h = L'_h C_h = p^2$. Komen er ook wederzijdsche inducties voor, dan is dit niet meer op deze eenvoudige wijze te bereiken[3]). Tevens dient in dit geval bij deze substitutie de wederzijdsche inductie van teeken te veranderen. Dit bereikt men door òf primair òf secundair de klemmen om te schakelen.

Aan de hand van bovenstaande algemeene regels kunnen we nu over de „generatieve" schakelingen het volgende opmerken.

Er zijn twee typen van schakelingen:

I. die met *directe* koppeling. Hierbij is het rooster onmiddellijk met een punt van de trillingsketen verbonden.

II. die met *indirecte* koppeling. Hierbij is het rooster door één of meer wederzijdsche inducties met de anodeketen gekoppeld.

I. *Directe koppeling.*

Het algemeene type van deze schakelingen, waartoe zij ingevolge A alle te herleiden zijn, wordt aangegeven door fig. 5. $z_1 = z'_1 + z_1''$

---

[1]) Zie Jahrb. f. Dr. Tel. (1918) 12, p. 241.

[2]) Electrician Juli 1916, p. 573, Aug. 1916, p. 595.
Zie ook: Yearbook of Wireless Tel. (1917) p. 674.

[3]) Zie noot bij de Eng. vertaling.

en z_2 [1]) zijn wisselstroomweerstanden, r en λ hebben hier dezelfde beteekenis als in (10).

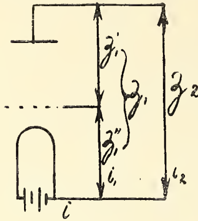


Fig. 5.

12) en (13) worden hier:

$$\left(r + \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}\right) i = \lambda v \quad . \quad . \quad (14)$$

$$v = - z_1'' i_1 = - \frac{z_1'' z_2}{z_1 + z_2} i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Combinatie van (14) en (15) geeft:

$$r + \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} + \lambda \frac{z_1'' z_2}{z_1 + z_2} = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Schrijven we verder $z_1 = x_1 + j y_1$ enz., waarin $j = \sqrt{-1}$ en stellen we het reëele en het imaginaire deel van (16) respectievelijk gelijk 0, zoo ontstaan:

$$x_2 \{ x_1' + (1 + \lambda) x_1'' \} + r (x_1 + x_2) - y_2 \{ y_1' + (1 + \lambda) y_1'' \} = 0 \quad (17)$$

$$y_2 \{ x_1' + (1 + \lambda) x_1'' \} + r (y_1' + y_2) + x_2 \{ y_1' + (1 + \lambda) y_1'' \} = 0 \quad (18)$$

De y's en eventueel ook de x's bevatten de frequentie p. Elimineeren we deze uit (17) en (18) zoo ontstaat een betrekking tusschen de konstanten van den stroomkring

$$\psi (r, R_1 L_1 C_1 \ldots) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

waaraan voldaan moet worden, opdat er blijvende wisselstroomen mogelijk zijn. Een der vergelijkingen (17) en (18) kan tevens ter bepaling der frequentie dienen. (19) geeft een *noodzakelijke* voorwaarde, zij is ook *voldoende*, indien (17) of (18) minstens één reëelen wortel p bevat.

Voor reëele p zijn x_1, x_2 enz. essentieel positief als hebbende het karakter van Ohmsche weerstanden; r en λ zijn positieve audionskonstanten; y_1, y_2 ... zijn òf positief (met karakter van zelfinductie) òf negatief (capaciteit). Uit (17) en (18 nu blijkt, dat schakeling I slechts op twee principieel verschillende manieren kan uitgevoerd worden. Uit (17) volgt, dat y_2 en $y'_1 + (1+\lambda) y''_1$ hetzelfde teeken dienen te hebben, uit (18), dat $y_1 = y'_1 + y''_1$ en y_2 verschillend van teeken moeten zijn.

1e manier.

y_2 en y''_1 positief; y'_1 negatief, terwijl:

$$y_1'' + y_2 < - y_1' < (1 + \lambda) y_1'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Deze schakeling wordt in zijn eenvoudigsten vorm voorgesteld door fig. 6.

(20) wordt nu:

[1]) In de fig. door gothische letters aangegeven.

$$p(L_1 + L_2) < \frac{1}{pC_1} < (1 + \lambda)\, pL_1$$

waaruit onder meer volgt:

$$L_2 < \lambda\, L_1.$$

Voor (17) en (18) krijgen we:

$$R_1\, R_2\, (1 + \lambda) + (R_1 + R_2) + \frac{L_2}{C_1} - (1 + \lambda)\, p^2\, L_1\, L_2 = 0$$

$$p\, L_2\, R_1\, (1 + \lambda) + r \left\{ p\,(L_1 + L_2) - \frac{1}{pC_1} \right\} + R_2 \left\{ -\frac{1}{pC_1} + (1 + \lambda) pL_1 \right\} = 0.$$

waaruit men door eliminatie van p de tamelijk gecompliceerde „trillingsvoorwaarde" kan afleiden.

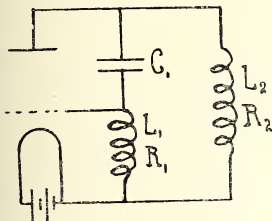


Fig. 6.

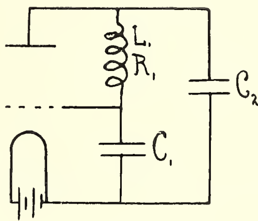


Fig. 7.

2e manier.

Deze ontstaat door substitutie B uit de voorgaande, y_2 en y''_1 zijn hier negatief en y_1' positief, terwijl:

$$-(y_1'' + y_2) < y_1' < -(1 + \lambda)\, y_1''$$

Fig. 7 geeft den eenvoudigsten vorm aan.

De vergelijkingen (17) en (18) leveren hier respectievelijk op:

$$p^2 = \frac{1 + \lambda}{L_1\, C_1 + r\, R_1\, C_1\, C_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$p^2 = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{R}{rC_2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Schakelingen, welke op die van fig. 7 neerkomen worden veelvoudig toegepast. Zij zijn o.a. door VALLAURI theoretisch behandeld[1]). Ook schakelingen van het type van fig. 6 vinden een enkele maal toepassing[2]).

II. *Indirecte koppeling.*

Het eenvoudigste te behandelen is het geval, waarin de rooster-

[1]) Jahrb. f. Dr. Tel. (1918) 12 p. 381.

[2]) Zie bijv. ARMSTRONG l c. fig 13. De capaciteit door ons C_1 genoemd in fig. 6 ontbreekt. De anode en het rooster, die aan hetzelfde einde van het audion zijn ingesmolten en van fittings voorzien, bezitten evenwel voldoende capaciteit t. o. v elkaar.

keten stroomloos is. Het gereduceerde type van deze schakeling geeft fig. 8.

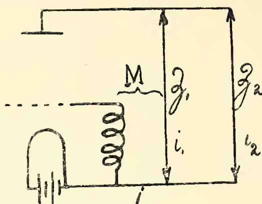


Fig. 8.

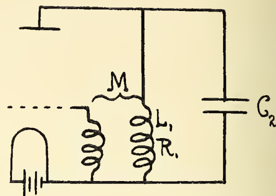


Fig. 9.

Hier is:

$$\lambda v = \left(r + \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}\right) i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$v = -j p M i_1 = -j p M \frac{z_2}{z_1 + z_2} i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Uit (23) en (24) wordt gevonden:

$$\lambda p M y_2 = r (x_1 + x_2) + x_1 x_2 - y_1 y_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$-\lambda p M x_2 = r (y_1 + y_2) + x_1 y_2 + x_2 y_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Aan deze vergelijkingen kan slechts voldaan worden op twee manieren, welke weer door middel van substitutie B uit elkaar zijn af te leiden.

1e. y_1 pos., y_2 neg., M neg.

2e. y_1 neg.. y_2 pos., M pos.

Zij worden respectievelijk weergegeven door fig. 9 en 10.

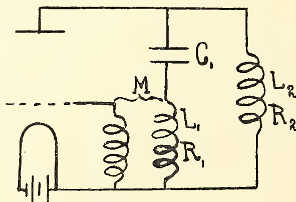


Fig. 10.

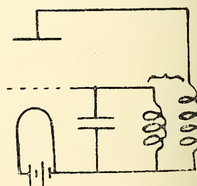


Fig. 11.

Ook van de schakeling van fig. 9 wordt veelvuldig gebruik gemaakt. Zij werd theoretisch door Vallauri[1]) grondig behandeld. Die van fig. 10 schijnt tot nog toe niet gebruikt te zijn; door Armstrong wordt zij ook niet vermeld.

[1]) l.c.

In het geval de indirecte koppeling wordt toegepast en ook in de roosterketen een stroom vloeit, is de willekeur zoo groot, dat het moeilijk schijnt hier eenige algemeene regels behoudens de substitutieregels A en B vast te stellen. Toch voert voor elk bijzonder geval een rekening als boven snel tot het doel en zij is overzichtelijker dan de oplossing van een stel simultane differentiaalvergelijkingen.

Een eenvoudig voorbeeld van deze schakeling geeft fig. 11. Schakelingen als deze komen veel voor.

Dezelfde schakelingen, die het audion doen genereeren, zijn ook uitermate geschikt om een goede *versterkende* werking te geven. Of een audion als generator dienst doet hangt ten slotte af van de wortels van een algebraïsche vergelijking van den n^{den} graad:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} \ldots + a_n = 0. \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

Deze vergelijking is ontstaan uit een homogene lineaire diff. vergel. van de n^{de} orde:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n = 0, \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

door een oplossing te probeeren van den vorm $x = Ae^{pt}$. De a's zijn functies van de wisselstroomweerstanden, x stelt een stroom of spanning voor.

Is minstens één wortel $p = p_0$ zuiver imaginair, zoo zijn er vrije ongedempte trillingen mogelijk. Waar het audion dienst doet in een ontvanginrichting voor draadlooze telegrafie, ondervindt de roosterpotentiaal buitendien een gedwongen trilling van wege de koppeling met de antenne. In plaats van (29) krijgen we nu een vergelijking mèt tweede lid, in complexe schrijfwijze [1]):

$$a_0' \frac{d^n x}{dt^n} + a_1' \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \ldots + a'_n = E e^{p't}. \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

waarin p' zuiver imaginair is.

De particuliere oplossing, die de gedwongen trilling geeft, vinden we door te stellen $x = A'e^{p't}$. Ter bepaling van de amplitude $|A'|$ krijgen we:

$$|A'| = \frac{E}{|a_0' p'_n + \ldots a'_n|} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

Is nu p' gelijk aan een (imaginairen) wortel p_0 van (27), dan kunnen we door de konstanten a'_0 enz. slechts weinig verschil-

[1]) De a's zonder accenten reserveeren we voor het speciale geval, dat deze grootheden zoodanig gekozen zijn, dat (27) een zuiver imaginairen wortel $p = p_0$ bevat.

lend te kiezen van a_0 enz. in (27), den noemer van het rechterlid van (31) zoo klein maken, als we willen.

Een grens wordt slechts hierdoor gesteld, dat de eigen trillingen bepaald door

$$a'_0 p'^n + \dots . a'_n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

voldoend gedempt moeten zijn, dus de wortels van (32) een voldoend groot negatief reëel gedeelte dienen te bezitten. Door een koppeling als van fig. 12 wordt dus bereikt, dat het systeem voor de gedwongen trilling een zeer kleine „wrijving" heeft.

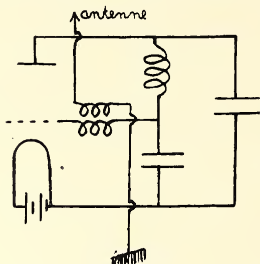


Fig. 12.

Het audion leent zich bij uitstek tot het ontvangen van ongedempte golven. Volgens het heterodyne-principe worden alsdan in het ontvangstation locale trillingen opgewekt, die met de ontvangen trillingen aanleiding geven tot zwevingen van hoorbare frequentie, welke op de gewone wijze door gelijkrichter en telefoon kunnen worden aangetoond. Het audion wordt nu zóó afgestemd, dat de frequentie der eigen trilling weinig van die der gedwongen trilling verschilt. Het is dan wel duidelijk dat het systeem voor deze laatste weinig „wrijving" heeft.

In bovenstaande beschouwingen is door ons aangenomen dat het verband tusschen stroom en spanningen lineair is. Uit de fig. 2 en 3 blijkt evenwel dat dit slechts voor een beperkt gebied der karakteristieken geldt. De stroomamplitude kan niet boven een bepaalde waarde stijgen. Dit maakt, dat we feitelijk niet dienen te vragen naar de zuiver imaginaire wortels van (27), maar naar de wortels met positief reëel deel. Door een onderzoek als boven leeren we slechts de punten kennen waar het reëel deel der wortels p van negatief positief wordt. Het komt mij voor dat dit in de meeste gevallen ter opsporing der verschillende schakelingsmogelijkheden voldoende is.

In een Amerikaansch patent van Nov. 1917 (n°. 102,503) wordt het gebruik van het audion als generator beschreven, waarbij juist quadratische termen in het stroomspanningsverband den doorslag schijnen te geven. Uit patentbeschrijvingen alleen is moeilijk een conclusie te trekken en voorzoover mij bekend is tot nog toe in de literatuur geen bespreking van een dergelijke schakeling voorhanden.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan van den Heer J. A. SCHOUTEN: *„Over reeksontwikkelingen van ko- en kontravariante grootheden van hoogeren graad bij de lineaire homogene groep."*

(Mede aangeboden door den Heer LORENTZ).

Notaties [1]). Een kovariante affinor van den graad p kan geschreven worden als algemeen product van p ideale grondelementen [2]):

$$\overset{p}{\mathbf{u}} = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{1,\ldots,n} \overset{p}{u}_{\lambda_1\ldots\lambda_p} \mathbf{e}_{\lambda_1}\ldots\mathbf{e}_{\lambda_p} = \mathbf{u}_1\ldots\mathbf{u}_p, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

een alterneerende of symmetrische als macht van één ideaal grondelement:

$$\left.\begin{aligned} {}_p\mathbf{v} &= \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{1,\ldots,n} {}_p v_{\overline{\lambda_1\ldots\lambda_p}} \mathbf{e}_{\lambda_1}\frown\ldots\mathbf{e}_{\lambda_p} = \mathbf{v}^p \quad , \quad p \leqq n \\ {}^p\mathbf{w} &= \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{1,\ldots,n} {}^p w_{\overline{\lambda_1\ldots\lambda_p}} \mathbf{e}_{\lambda_1}\smile\ldots\mathbf{e}_{\lambda_p} = \mathbf{w}^p . \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (2)$$

De $p!$ *isomeren* van $\overset{p}{\mathbf{u}}$, d. z. de $p!$ producten der ideale factoren in alle mogelijke volgorden, zijn reale rationale kovarianten van $\overset{p}{\mathbf{u}}$. Ieder isomeer ontstaat uit $\overset{p}{\mathbf{u}}$ door een bepaalde der $p!$ permutaties P_λ der ideale factoren. Onder een *doordringend algemeen product* $\overset{d}{\circ}$ van eenige affinoren $\overset{p}{\mathbf{u}}, \overset{q}{\mathbf{v}}, \ldots$ verstaan we eenig isomeer van het algemeene product $\overset{p}{\mathbf{u}}\,\overset{q}{\mathbf{v}}\ldots$. Een affinor, waarbij tusschen de verschillende isomeren geen lineaire betrekkingen bestaan, heet *niet bijzonder*.

Isomerenklassen [2]). Het is bekend, dat de p faktoren van een isomeer op éene en slechts éene wijze in groepen van $s_1, s_2, \ldots$ faktoren verdeeld kunnen worden, zoo dat de verwisseling in elke groep een cyclische is. De groepen noemen we de *permutatiegebieden* en het getalkomplex $s_1, s_2, \ldots$ gerangschikt van hoog naar laag en met weglating van alle getallen 1 het *permutatiegetal*. Voor a evengroote

[1]) Men zie verder „Die direkte Analysis der neueren Relativitätstheorie." Verh. der Kon. Akad. v. Wet. Dl. XII. N⁰. 6, blz. 7–11.

[2]) Het eerst onder den naam van „symbolische Vektoren" ingevoerd door E. WAELSCH, „Ueber mehrfache Vektoren und ihre Produkte, sowie deren Anwendung in der Elastizitätstheorie." Mon. f. Math. und Ph. 17 (06) 241—280.

gebieden s_β wordt daarbij geschreven $\alpha \,.\, s_\beta$. Een permutatiegetal is *hooger* dan een ander, wanneer zijn eerste gebied grooter is, of, bij gelijkheid, wanneer het tweede gebied grooter is, enz. Alle permutaties met hetzelfde permutatiegetal vormen naar FROBENIUS een permutatieklasse, en we noemen derhalve de som van alle isomeren met hetzelfde permutatiegetal gedeeld door $p!$ de *isomerenklasse* met dat getal. Het aantal klassen is dus gelijk aan het aantal geheele positieve oplossingen k van de vergelijking

$$x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 + \ldots \qquad = p \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

De klassen worden gerangschikt van laag naar hoog en geschreven

$$K_1 \overset{p}{\mathbf{u}} = \frac{1}{p!} \overset{p}{\mathbf{u}} \quad , \quad K_2 \overset{p}{\mathbf{u}} \quad , \quad \ldots \qquad \ldots \quad , K_k \overset{p}{\mathbf{u}}$$

Het permutatiegetal kan desgewenscht als index links toegevoegd worden, bijv. voor $p = 6$:

$${}_0K_1 \;,\; {}_2K_2 \;,\; {}_{2,2}K_3 \;,\; {}_{3.2}K_4 \;,\; {}_3K_5 \;,\; {}_{3,2}K_6 \;,\; {}_{2.3}K_7 \;,\; {}_4K_8 \;,\; {}_{4,2}K_9 \;,\; {}_5K_{10} \;,\; {}_6K_{11}.$$

Een klasse heet even of oneven al naarmate zij uit even of oneven permutaties is samengesteld.

Alternaties of mengingen. De affinor, die uit $\overset{p}{\mathbf{u}}$ ontstaat door bepaalde groepen van $s_1, \ldots, s_t$ factoren *ter plaatse* te vervangen door de ideale factoren van hun alterneerend of symmetrisch produkt heet een *eenvoudige alternatie* resp. *menging* van $\overset{p}{\mathbf{u}}$ met het permutatiegetal $s_1, \ldots, s_t$ en wordt geschreven

$$\underset{s_1,\ldots,s_t}{\overset{(\lambda)}{A}} \overset{p}{\mathbf{u}} \qquad \text{resp.} \qquad {}^{s_1,\ldots,s_t}\overset{(\lambda)}{M} \overset{p}{\mathbf{u}}$$

De index λ (rechtsboven) geeft desgewenscht de keuze der *permutatiegebieden* aan. De affinor heet *plaatselijk* en wel in deze gebieden *alterneerend* resp. *symmetrisch*, in het algemeen *plaatselijk permuteerbaar*.

De som van alle eenvoudige alternaties resp. mengingen met hetzelfde permutatiegetal gedeeld door hun aantal heet de *algemeene alternatie* resp. *menging* met dat getal. De algemeene alternaties en mengingen worden gerangschikt van laag naar hoog en geschreven

$$\bar{A}_1 \overset{p}{\mathbf{u}} = \overset{p}{\mathbf{u}} \quad , \quad \bar{A}_2 \overset{p}{\mathbf{u}}, \ldots \qquad \ldots, \bar{A}_k \overset{p}{\mathbf{u}}$$

$$\bar{M}_1 \overset{p}{\mathbf{u}} = \overset{p}{\mathbf{u}} \quad , \quad \bar{M}_2 \overset{p}{\mathbf{u}}, \ldots \qquad \ldots, \bar{M}_k \overset{p}{\mathbf{u}},$$

eventueel onder bijvoeging van het permutatiegetal als index links, bijv. voor $p = 6$:

$${}_0\bar{A}_1 \;,\; {}_2\bar{A}_2 \;,\; {}_{2,2}\bar{A}_3 \;,\; {}_{3.2}\bar{A}_4 \;,\; {}_3\bar{A}_5 \;,\; {}_{3,2}\bar{A}_6 \;,\; {}_{2.3}\bar{A}_7 \;,\; {}_4\bar{A}_8 \;,\; {}_{4,2}\bar{A}_9 \;,\; {}_5\bar{A}_{10} \;,\; {}_6\bar{A}_{11}$$

$${}^0\bar{M}_1 \;,\; {}^2\bar{M}_2 \;,\; {}^{2,2}\bar{M}_3 \;,\; {}^{3.2}\bar{M}_4 \;,\; {}^3\bar{M}_5 \;,\; {}^{3,5}\bar{M}_6 \;,\; {}^{2.3}\bar{M}_7 \;,\; {}^4\bar{M}_8 \;,\; {}^{4,2}\bar{M}_9 \;,\; {}^5\bar{M}_{10} \;,\; {}^6\bar{M}_{11}.$$

Is het permutatiegetal van $\overline{A}_i$ $s_1, \ldots, s_t$, dan bevat $\overline{A}_i$

$$a_i = \binom{p}{s_1}\binom{p-s_1}{s_2}\cdots \qquad \cdots\binom{p-s_1-\ldots-s_{t-1}}{s_t} \qquad (4)$$

eenvoudige alternaties A_i. Hetzelfde geldt voor mengingen. Voor een niet bijzonderen affinor zijn alle klassen en evenzoo alle eenv. en alg. alternaties resp. mengingen lineair onafhankelijk.

Worden ${}_{s_1,\ldots,s_t}A$ en ${}^{s_1',\ldots,s'_{t'}}M$ na elkaar op een niet bijzonderen affinor toegepast, dan ontstaat dan en alleen dan nul wanneer een gebied s met een der gebieden s' meer dan een faktor gemeen heeft. Het hoogste permutatiegetal $s_1', \ldots, s'_{t'}$, waarvoor

$$\underset{s_1,\ldots,s_t}{A}\;{}^{s_1',\ldots,s'_{t'}}\overset{p}{M\mathbf{u}}$$

niet *steeds* nul is, heet aan $s_1, \ldots, s_t$ *toegevoegd*. Daaruit volgt dat

$$s_1',\ldots,s'_{t'} = (t+p-s_1-\ldots-s_t)\,,\,(s_t-1)\,.\,t\,,\,(s_{t-1}-s_t)\,.\,(t-1),\ldots,(s_1-s_2)\,.\,2. \quad (5)$$

Deze betrekking is een wederkeerige. Worden de permutatiegebieden van een alternatie of menging genummerd, zoo dat een grooter gebied altijd een lager nummer heeft dan een kleiner, dan is het mogelijk, dat voor *alle* waarden van ε de ε-de factoren van elk der gebieden in de volgorde dezer nummering staan. De alternatie of menging heet dan *geordend*. Bij een geordende alternatie behoort blijkbaar één en slechts één geordende menging met toegevoegd permutatiegetal zoodanig dat deze beide operatoren elkaar niet annuleeren. Deze beide heeten *toegevoegd*.

Een alg. alternatie en een alg. menging met toegevoegd permutatiegetal heeten *toegevoegd*. Iedere alg. alternatie of menging wordt door alle eenv. en alg. mengingen resp. alternaties met hooger permutatiegetal dan zijn toegevoegde geanulleerd. De volgorde der aan $\overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_{k-1}$ toegevoegde algemeene mengingen is voor $p > 5$ *niet* dezelfde als $\overline{M}_{k-1}, \ldots, \overline{M}_2$, voor $p = 6$, bijv.:

$${}_2\overline{A}_2\;,\;{}_{2,2}\overline{A}_3\;,\;{}_{3.2}\overline{A}_4\;,\;{}_3\overline{A}_5\;,\;{}_{3,2}\overline{A}_6\;,\;{}_{2.3}\overline{A}_7\;,\;{}_4\overline{A}_8\;,{}_{4,2}\overline{A}_9\;,\;{}_5\overline{A}_{10}$$

$${}^5\overline{M}_{10}\;,\;{}^{4,2}\overline{M}_9\;,\;{}^{2.3}\overline{M}_7\;,\;{}^4\overline{M}_8\;,\;{}^{3,2}\overline{M}_6\;,\;{}^{3.2}\overline{M}_4\;,\;{}^3\overline{M}_5\;,\;{}^{2,2}\overline{M}_3\;,\;{}^2\overline{M}_2$$

Worden in ${}_{s_1,\ldots,s_t}\overset{p}{A\mathbf{u}}$ of ${}^{s_1,\ldots,s_t}\overset{p}{M\mathbf{u}}$ de *niet* veranderde factoren vervangen door de ideale factoren van hun symmetrisch resp. alternerend product, dan ontstaat een *gemengde alternatie* resp. *gealterneerde menging* met hetzelfde permutatiegetal, geschreven:

$${}_{s_1,\ldots,s_t}\overset{m}{A}\overset{p}{\mathbf{u}} \qquad \text{resp.} \qquad {}^{s_1,\ldots,s_t}\overset{a}{M}\overset{p}{\mathbf{u}}.$$

Uit de operatoren $\overset{m}{A}$ en $\overset{a}{M}$ kunnen op dezelfde wijze als boven

algemeene gemengde alternaties $\overset{m}{\overline{A}}$ en gealterneerde mengingen $\overset{a}{\overline{M}}$ gevormd worden. Ten aanzien van de volgorde $1, \ldots, k$, de onafhankelijkheid en het geordend zijn gelden voor deze operatoren dezelfde regels als voor $\overline{A}$, A, M en $\overline{M}$.

Annulleeren een A_i en een M_j met toegevoegd permutatiegetal elkaar niet, dan worden de onveranderde factoren van M_j door A_i gealterneerd en die van A_i door M_j gemengd, zoodat:

$$A_i\, M_j = \overset{m}{A_i}\, M_j = A_i\, \overset{a}{M_j} = \overset{m}{A_i}\, \overset{a}{M_j} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

en evenzoo:

$$\overline{A}_i\, \overline{M}_j = \overset{m}{\overline{A}_i}\, \overline{M}_j = \overline{A}_i\, \overset{a}{\overline{M}_j} = \overset{m}{\overline{A}_i}\, \overset{a}{\overline{M}_j} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Ontwikkeling der algemeene alternaties en mengingen naar klassen.

Stelling I. Een algemeene alternatie resp. menging van een niet bijzonderen affinor kan op éēne en slechts éēne wijze als veelvoudensom aller klassen met hetzelfde of met een lager permutatiegetal geschreven worden. Voor een menging zijn de koefficienten van alle klassen positief, voor een alternatie die der even klassen positief, de andere negatief. Hun absolute waarden zijn voor hetzelfde permutatiegetal gelijk:

$$\left.\begin{aligned} \overline{A}_i &= \sum_j^{1,\ldots,i} \delta_j\, a_{ij}\, K_j \\ \overline{M}_i &= \sum_j^{1,\ldots,i} a_{ij}\, K_j \end{aligned} \qquad \delta_j = \begin{cases} +1 & \text{voor } K_j \text{ even} \\ -1 & ,, \quad ,, \text{ oneven.} \end{cases} \right\} \quad (8)$$

Het zeer eenvoudige bewijs worde achterwege gelaten. Ter bepaling der koefficienten a_{ij} moet worden nagegaan op hoeveel wijzen het mogelijk is de t permutatiegebieden $s_1, \ldots, s_t$ van een A_i of M_i zoo te kiezen, dat ieder der t' gebieden $s_1', \ldots, s'_t$ van een permutatie van een bepaalde K_j geheel in een dier gebieden valt. Is dit aantal m_{ij}, dan is

$$a_{ij} = \frac{m_{ij}\, p!}{s_1! \ldots s_t! \binom{s_1}{p} \binom{p-s_1}{s_2} \ldots \binom{p-s_1-s_{t-1}}{s_t}} = \frac{m_{ij}\, p!}{s_1! \ldots s_t!\, a_i} \quad . \quad . \quad (9)$$

Voor $p = 6$ is bijvoorbeeld: (zie volgende pagina).

Daar alle $\overline{A}$, alle $\overline{M}$ en alle K lineair onafhankelijk zijn, geldt omgekeerd:

$$\left.\begin{aligned} \delta_i K_i &= \sum_j^{1,\ldots,i} \beta_{ij}\, \overline{A}_j \\ K_i &= \sum_j^{1,\ldots,i} \beta_{ij}\, \overline{M}_j \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

	$\frac{p!}{s_1!\,s_2!\,s_3!\binom{p}{s_1}\binom{p-s_1}{s_2}\binom{p-s_1-s_2}{s_3}}$	K_{11}	m	K_{10}	m	K_9	m	K_8	m	k_7	m	K_6	m	K_5	m	K_4	m	K_3	m	K_2	m	K_1	m
$6\bar{A}_{11}$ resp. $6\bar{M}_{11}$	1	∓ 1	1	1	1	1	1	∓ 1	1	1	1	∓ 1	1	1	1	∓ 1	1	1	1	∓ 1	1	1	1
$5\bar{A}_{10}$ „ . $5\bar{M}_{10}$	1			1	1		0	∓ 2	2		0	∓ 1	1	3	3		0	2	2	∓ 4	4	6	6
$4{,}2\bar{A}_9$ „ $4{,}2\bar{M}_9$	1					1	1	∓ 1	1		0	∓ 1	1	3	3	∓ 3	3	3	3	∓ 7	7	15	15
$4\bar{A}_8$ „ $4\bar{M}_8$	2							∓ 2	1		0		0	6	3		0	2	1	∓ 12	6	30	15
$2.3\bar{A}_7$ „ $2.3\bar{M}_7$	1									2	2	∓ 2	2	2	2		0	4	4	∓ 8	8	20	20
$3{,}2\bar{A}_6$ „ $3{,}2\bar{M}_6$	1											∓ 1	1	3	3		0	4	4	∓ 16	16	60	60
$3\bar{A}_5$ „ $3\bar{M}_5$	6													6	1		0		0	∓ 24	4	120	20
$3.2\bar{A}_4$ „ $3.2\bar{M}_4$	1															∓ 6	6	6	6	∓ 18	18	90	90
$2{,}2\bar{A}_3$ „ $2{,}2\bar{M}_3$	2																	4	2	∓ 24	12	180	90
$2\bar{A}_2$ „ $2\bar{M}_2$	24																			∓ 24	1	360	30

Ontwikkeling van een affinor naar alternaties of mengingen.

In het bijzonder geldt dus voor de som aller klassen $\overline{M}_k$ en voor $\overline{A}_k$

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}_k &= -\sum_i^{1,\dots,k} \gamma_{ki}\, \overline{A}_i \\ \overline{A}_k &= -\sum_i^{1,\dots,k} \gamma_{ki}\, \overline{M}_i\end{aligned}\right\} \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (12)$$

Toepassing van $\overline{M}_k$ op de bovenste vergelijking leert, dat $\gamma_{kk} = 1$ is, en daar $\overline{A}_1 = \overline{M}_1 =$ de identische operator I, volgt, wanneer wij $\overline{M}_k$ en $\overline{A}_k$ opvatten als nulde alg. alternatie $\overline{A}_0$ resp. nulde alg. menging $\overline{M}_0$:

$$I = \sum_i^{0,2,\dots,k} \gamma_{ki}\, \overline{A}_i = \sum_i^{0,2,\dots,k} \gamma_{ki}\, \overline{M}_i \; . \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (13)$$

Op dezelfde wijze toont men aan:

$$I = \sum_i^{0,2,\dots,k} \gamma'_{ki}\, \overset{m}{\overline{A}}_i = \sum_i^{0,2,\dots,k} \gamma'_{ki}\, \overset{a}{\overline{M}}_i \; . \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (14)$$

Voor een permutatiegetal s is in deze ontwikkelingen

$$\gamma_{ki} = \gamma'_{ki} = (-1)^{s-1}(p - s + 1) \; . \;.\;.\;.\;. \quad (15)$$

en voor een permutatiegetal $\alpha . 2$:

$$\gamma'_{ki} = \frac{\binom{p}{2\alpha}\binom{2\alpha}{\alpha}}{\binom{p-\alpha+1}{\alpha}} \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (16)$$

Wij hebben dus de stelling verkregen:

Hoofdstelling A. Iedere niet bijzondere affinor kan op éene en slechts éene wijze naar alg. alternaties, naar alg. gemengde alternaties, naar alg. mengingen en naar alg. gealterneerde mengingen met de indices 0,2,3,...,k *worden ontwikkeld.*

Uit de tabel (10) volgt bijv. voor $p = 6$:

$$\left.\begin{aligned}\overset{6}{\mathfrak{u}} &= ({}_6\overline{A}_{11} - 2\,{}_5\overline{A}_{10} - 2\,{}_{4,2}\overline{A}_9 + 3\,{}_4\overline{A}_8 - {}_{2.3}\overline{A}_7 + 6\,{}_{3,2}\overline{A}_6 - 4\,{}_3\overline{A}_5 + {}_{3.2}\overline{A}_4 - \\ &\qquad - 6\,{}_{2,2}\overline{A}_3 + 5\,{}_2\overline{A}_2 + \overline{A}_0)\,\overset{6}{\mathfrak{u}} \\ \overset{6}{\mathfrak{u}} &= ({}^6\overline{M}_{11} - 2\,{}^5\overline{M}_{10} - 2\,{}^{4,2}\overline{M}_9 + 3\,{}^4\overline{M}_8 - {}^{2.3}\overline{M}_7 + 6\,{}^{3,2}\overline{M}_6 - 4\,{}^3\overline{M}_5 + {}^{3.2}\overline{M}_4 - \\ &\qquad - 6\,{}^{2.2}\overline{M}_3 + 5\,{}^2\overline{M}_2 + \overline{M}_0)\,\overset{6}{\mathfrak{u}}\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

terwijl door splitsing der gewone alternaties en mengingen in gemengde resp. gealterneerde kan worden berekend:

$$\left.\begin{aligned}\overset{6}{\mathfrak{u}} &= ({}_{6}\bar{A}_{11} - 2\,{}_{5}\bar{A}_{10} + 6\,{}_{4,2}\bar{A}_{9} + 3\,{}_{4}\overset{m}{\bar{A}}_{8} - 5\,{}_{2.3}\bar{A}_{7} + 4\,{}_{3,2}\bar{A}_{6} - 4\,{}_{3}\overset{m}{\bar{A}}_{5} + \\ &\qquad + 5\,{}_{3.2}\bar{A}_{4} + 9\,{}_{2,2}\overset{m}{\bar{A}}_{3} + 5\,{}_{2}\overset{m}{\bar{A}}_{2} + \bar{A}_{0})\,\overset{6}{\mathfrak{u}} \\ \overset{6}{\mathfrak{u}} &= ({}^{6}\bar{M}_{11} - 2\,{}^{5}\bar{M}_{10} + 6\,{}^{4,2}\bar{M}_{9} + 3\,{}^{4}\overset{a}{\bar{M}}_{8} - 5\,{}^{2.3}\bar{M}_{7} + 4\,{}^{3,2}\bar{M}_{6} - 4\,{}^{3}\overset{a}{\bar{M}}_{5} + \\ &\qquad + 5\,{}^{3.2}\bar{M}_{4} + 9\,{}^{2,2}\overset{a}{\bar{M}}_{3} + 5\,{}^{2}\overset{a}{\bar{M}}_{2} + \bar{M}_{0})\,\overset{6}{\mathfrak{n}}\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Alle ontwikkelingen blijven voor bijzondere affinoren gelden, zij zijn dan echter niet meer de eenige mogelijke.

Het getalstelsel der klassenoperatoren.

FROBENIUS heeft aangetoond, dat de operatoren K onderling en met iedere permutatie P_j commutatief zijn, en een getalstelsel met k eenheden vormen, dat geen nilpotente getallen bevat, d.w.z. getallen waarvan de een of andere macht nul is. Als k onafhankelijke eenheden kunnen bijv. gekozen worden $K_1, \ldots, K_k$ of $\bar{A}_0, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_k$ of $\bar{M}_0, \bar{M}_2, \ldots, \bar{M}_k$, die dus ook alle onderling en met iederen operator P, A of M commutatief zijn. De theorie der hoogere komplexe getalstelsels leert, dat ieder stelsel van dit soort k onafhankelijke getallen I_i, $i = 1, \ldots, k$ bevat, de *idempotente hoofdeenheden*, die aan de vergelijkingen voldoen

$$I_i\, I_j = \begin{cases} I_i \text{ voor } i = j \\ 0 \text{ voor } i \neq j \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

De som der operatoren I_i, die we *elementaire operatoren* zullen noemen is de identische operator I. Worden deze eenheden uitgedrukt in de klasseoperatoren K:

$$I_i = \sum_{j}^{1,\ldots,k} \mu_{ij} K_j \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

en is

$$K_i\, K_j = \alpha_{ijl}\, K_l, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

dan is:

$$\mu_{ml} = \sum_{i,j}^{1,\ldots,k} \mu_{mi}\, \mu_{mj}\, \alpha_{ijl}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

waaruit blijkt dat de koefficienten μ correspondeeren met de door FROBENIUS gedefinieerde groepkarakters χ der symmetrische groep. Algemeen is

$$\mu_{ml} = \chi_0^{(m)}\, \chi_{l-1}^{(m)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

waaruit in het bijzonder volgt voor μ_{m1}:

$$\mu_{m1} = \chi_0^{(m)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Uit de door Frobenius aangegeven tabellen voor de groepkarakters vinden we dus direct de vergelijkingen, die de I in de K uitdrukken, bijv. voor $p=6$:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}	
${}^{11}_{1}I_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
${}^{1}_{11}I_2$	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	1	−1	
${}^{10}_{2}I_3$	25	15	5	−5	10	0	−5	5	−5	0	−5	
${}^{2}_{10}I_4$	25	−15	5	5	10	0	−5	−5	−5	0	5	
${}^{4}_{7}I_5$	25	−5	5	15	−5	−5	10	5	−5	0	0	
${}^{7}_{4}I_6$	25	5	5	−15	−5	5	10	−5	−5	0	0	(25)
${}^{9}_{3}I_7$	81	27	9	27	0	0	0	−9	9	−9	0	
${}^{3}_{9}I_8$	81	−27	9	−27	0	0	0	9	9	−9	0	
${}^{8}_{5}I_9$	100	20	−20	−20	10	−10	10	0	0	0	10	
${}^{5}_{8}I_{10}$	100	−20	−20	20	10	10	10	0	0	0	−10	
${}^{6}_{6}I_{11}$ *)	256	0	0	0	−32	0	−32	0	0	16	0	

*) De linker indices der I's worden hieronder verklaard.

Daarmede is dan een ontwikkeling gevonden die voor *iederen* affinor eenduidig is. Inderdaad kan er ook voor een bijzonderen affinor geen lineaire betrekking bestaan tusschen de I zonder dat iedere koefficient afzonderlijk nul is, gelijk toepassing van een der operatoren I onmiddellijk leert. Wij noemen deze ontwikkeling de ontwikkeling naar *elementaire affinoren*. Door gebruikmaking van tabellen als (10) en (25) zou men nu de I in $\overline{A}$, $\overline{M}$, $\overset{m}{\overline{A}}$ of $\overset{a}{\overline{M}}$ kunnen uitdrukken en aldus een eenduidige ontwikkeling naar alternaties of mengingen kunnen verkrijgen. De volgende weg is echter eenvoudiger en leert meer.

De elementaire operatoren als product van twee toegevoegde algemeene operatoren.

Zijn $\overline{M}_{j_1}, \ldots, \overline{M}j_k$ toegevoegd aan $\overline{A}_0, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_k$, dan worden $A_2, \ldots, \overline{A}_k$ geannulleerd door $\overline{M}_{j_1}$, zij bevatten dus zeker $y_1 \geqq 1$ der hoofdeenheden I niet. Evenzoo worden $\overline{A}_3, \ldots, \overline{A}_k$ geannulleerd door $\overline{M}_{j_1}$ en $\overline{M}_{j_2}$, zij bevatten dus zeker $y_2 \geqq 1$ verdere hoofdeenheden niet, enz. Aldus blijkt, dat $\overline{A}_k$ slechts $k - \sum\limits^{1,\ldots,k-1} y_l, y_l \geqq 1$ hoofd-

eenheden bevat, waaruit volgt $y_1 = y_2 = \ldots = y_k = 1$. De hoofdeenheden kunnen dus zoo worden gerangschikt:

$$_1I, \ldots\ldots, {}_kI,$$

dat

$$\overline{A}_i = \sum_l^{i,\ldots,k} \frac{1}{\delta_{il}}\, {}_lI \quad , \quad i > 1. \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Daar dezelfde redeneering voor de $\overline{M}$ geldt kunnen de hoofdeenheden ook zoo worden gerangschikt:

$$^1I, \ldots\ldots, {}^kI,$$

dat

$$\overline{M}_i = \sum_l^{i,\ldots,k} \frac{1}{\delta_{il}}\, {}^lI \quad , \quad i > 1. \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

De koefficienten van de beide ontwikkelingen zijn gelijk, de twee volgorden der I zijn echter voor $p > 5$ niet gelijk, bijv. voor $p = 6$, beide indices gebruikende:

$${}^{11}_{1}I \;,\; {}^{10}_{2}I \;,\; {}^{9}_{3}I \;,\; {}^{7}_{4}I \;,\; {}^{8}_{5}I \;,\; {}^{6}_{6}I \;,\; {}^{4}_{7}I \;,\; {}^{5}_{8}I \;,\; {}^{3}_{9}I \;,\; {}^{2}_{10}I \;,\; {}^{1}_{11}I \,..$$

Van hieraf gebruiken we voor de I niet meer de indices rechts van blz. 1283.

Uit (26), (27) en (7) volgt de betrekking:

$${}^j_iI = \delta^2_{ij}\ \overline{A}_i\, \overline{M}_j = \delta^2_{ij}\ \overset{m}{\overline{A}_i}\, \overset{a}{\overline{M}_j} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Daar men gemakkelijk aantoont, dat $\overline{A}_i\ \overline{M}_j$, juist éénmaal K_1 bevat, zijn de koefficienten $\delta^2{}_{ij}$ identiek met de koefficienten μ_{i1} in (20) en de δ_{ij} dus gelijk aan de groepkarakters in de eerste rij van FROBENIUS. Men behoeft dus slechts deze eerste rij te kennen. Voor het geval dat $\overline{A}_i = {}_s\overline{A}_i$ is

$$\delta_{ij} = \binom{p-1}{s-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

en voor $\overline{A}_i = {}_{\alpha.2}\overline{A}_i$:

$$\delta_{ij} = \frac{\binom{p}{2\alpha}\binom{2\alpha}{\alpha}}{\binom{p-\alpha+1}{\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Voor meer algemeene formules zie men de betreffende verhandelingen van FROBENIUS.

Wij hebben dus deze stelling verkregen:

Hoofdstelling B. Iedere affinor van den p-den graad kan op éene en slechts éene wijze in een reeks van k elementaire affinoren ontwikkeld worden. Een elementaire affinor met den ondersten index i en den bovensten j is een grootheid die door alle alternaties

A_l, $l > i$, $l > 1$ en alle mengingen M_h, $h > j$, $h > 1$ geannulleerd wordt. Een dergelijke grootheid wordt eveneens geannulleerd door alle $\overset{m}{A_l}$ en $\overset{a}{M_h}$, kan ontstaan door ${}_i^j I$, $\overline{A}_i$, $\overset{m}{\overline{A}_i}$, $\overline{M}_j$ en $\overset{a}{\overline{M}_j}$ en is bij toepassing van ${}_i^j I$, $\delta_{ij} A_i$, $\delta_{ij} \overset{m}{\overline{A}_i}$, $\delta_{ij} M_j$ en $\delta_{ij} \overset{a}{M_j}$ invariant. Voor een bepaalde waarde van n (aantal grondelementen **e**) *worden alle elementaire affinoren, voor welke het permutatiegetal der A permutatiegebieden $> n$ bevat, nul.*

Voor $p = 6$ luidt de ontwikkeling bijv.:

$$\left.\begin{aligned}\overset{6}{\mathbf{u}} = (\overline{A}_0\overline{M}_{11} + 25\overline{A}_2\overline{M}_{10} + 81\overline{A}_3\overline{M}_9 + 25\overline{A}_4\overline{M}_7 + 100\overline{A}_5\overline{M}_8 + 256\overline{A}_6\overline{M}_6 + \\ + 25\overline{A}_7\overline{M}_4 + 100\overline{A}_8\overline{M}_5 + 81\overline{A}_9\overline{M}_3 + 25\overline{A}_{10}\overline{M}_2 + \overline{A}_{11}\overline{M}_0)\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Ontwikkeling van een elementairen affinor naar geordende elementaire affinoren van de eerste of tweede soort.

Stelling II. Iedere eenv. alternatie of menging, die door alle hoogere met hetzelfde aantal permutatiegebieden van meer dan een faktor geannulleerd wordt, kan worden geschreven als veelvoudensom van geordende alternaties of mengingen met hetzelfde permutatiegetal, die in elk van hun gebieden alleen faktoren bevatten uit de overeenkomstige gebieden van de oorspronkelijke alternatie of menging.

Het bewijs zij eerst geleverd voor een affinor

$$\overset{P}{\mathbf{m}} = {}_{p,q}A\overset{P}{\mathbf{n}} = {}_p\mathbf{u} \overset{d}{\circ} {}_q\mathbf{v} = (\widehat{\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_p}) \overset{d}{\circ} (\widehat{\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_q})$$

Is de eerste faktor van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ geen $\mathbf{u}$, dan passe men een ${}_{p+1}A$ toe, welks gebied dezen factor en ${}_p\mathbf{u}$ omvat, ${}_{p+1}A\overset{P}{\mathbf{m}}$ is dan te schrijven als som van $p+1$ termen, waarvan er slechts een, nl. $\overset{P}{\mathbf{m}}$ zelf, een factor $\mathbf{v}$ als eersten heeft en die alle in het gebied p alleen factoren van ${}_p\mathbf{u}$ hebben. Dus is $\overset{P}{\mathbf{m}}$ te schrijven als een som van termen die alle een factor $\mathbf{u}$ als eersten hebben. Komt nu in een dier termen $\overset{P}{\mathbf{m}}_1$ de tweede factor $\mathbf{v}$ voor den tweeden factor $\mathbf{u}$, dan passe men een ${}_{p+1}A$ toe, welks gebied de twee eerste $\mathbf{v}$ en de $p-1$ laatste $\mathbf{u}$ bevat. ${}_{p+1}A\overset{P}{\mathbf{m}}_1$ is dan te schrijven als een som van $p+1$ termen waarvan er slechts één, n.l. $\overset{P}{\mathbf{m}}_1$ zelf, twee $\mathbf{v}$ als tweede en derde factor heeft en die alle in het gebied p alleen factoren van ${}_p\mathbf{u}$ hebben. $\overset{P}{\mathbf{m}}_1$ is dus te schrijven als een som van termen, die alle t.o. van de eerste en van de tweede faktoren geordend zijn. Aldus voortgaande

bereikt men een som van volledig geordende termen. In elk dier termen bevat het gebied p alleen factoren $\mathbf{u}$ en het andere gebied alleen factoren $\mathbf{v}$.

We beschouwen nu den affinor $\overset{P}{\mathbf{m}} = {}_p\mathbf{u} \overset{d}{\circ} {}_q\mathbf{v} \overset{d}{\circ} {}_r\mathbf{w} \overset{d}{\circ} \ldots$ met Q alterneerende gebieden, van p, q, r, enz. factoren, $p \geq q \geq r \geq \ldots$, die door iedere alternatie met Q alterneerende gebieden hooger dan ${}_{p,q,r,\ldots}A$ geannulleerd moge worden. Is de eerste factor van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ bijv. een $\mathbf{w}$, dan passe men een ${}_{p+1}A$ toe, welks permutatiegebied die $\mathbf{w}$ en ${}_p\mathbf{u}$ bevat. Daar die ${}_{p+1}A$ annulleert is $\overset{P}{\mathbf{m}}$ een som van termen, die alle met een $\mathbf{u}$ beginnen. Zij nu de meest linksche tweede factor bijv. een $\mathbf{v}$, dan passe men een ${}_{p+1}A$ toe, die de twee eerste $\mathbf{v}$ en de $p-1$ laatste $\mathbf{u}$ in zijn permutatiegebied heeft. Aldus voortgaande bereikt men een som van termen, die alle wat betreft den stand der $\mathbf{u}$ ten opzichte van de overige factoren geordend zijn. Men gaat nu voort met alternaties ${}_{p,q+1}A$, waarvan het gebied p steeds de reeds geordende $\mathbf{u}$ bevat, en bereikt daarmede ordening der $\mathbf{v}$, enz., tot volledige ordening is bereikt. Bij iederen overgang en dus ook in het eindresultaat blijven de factoren $\mathbf{u}$ in alle termen in het gebied p, de $\mathbf{v}$ in het gebied q enz.

We passen de bewezen stelling toe op den elementairen affinor ${}_i^jI \overset{p}{\mathbf{u}}$ en bewijzen dat het resultaat eenduidig is en identiek met

$$ {}_i^jI \overset{p}{\mathbf{u}} = \Big(\sum_{\lambda}^{1,\ldots,\delta_{ij}} \varepsilon_{ij} \, A_i^{(\lambda)} \, M_j^{(\lambda)} \Big) \overset{p}{\mathbf{u}}, \quad \ldots \ldots \quad (32) $$

te sommeeren over alle *geordende* alternaties en mengingen, wier aantal juist δ_{ij} bedraagt. Daartoe zij gebruik gemaakt van de bekende eigenschap dat het getalstelsel der permutaties P een associatief stelsel is, dat uiteenvalt in k „oorspronkelijke" stelsels met δ_{ij}^2 eenheden. De eenheden van zulk een oorspronkelijk stelsel kunnen dus zoo gekozen worden dat

$$ J_{pq} \, J_{rs} = \begin{cases} J_{ps} & voor\ q = r \\ 0 & \ ,, \quad q \neq r. \end{cases} \quad \ldots \ldots \quad (33) $$

Een dergelijk stelsel bevat hoogstens δ_{ij} idempotente hoofdeenheden, wier som de modulus van het stelsel ${}_i^jI$ is. Zij nu voor een bepaalde waarde van λ voor eenigen affinor $\overset{p}{\mathbf{v}}$ $\quad A_i^{(\alpha)} M_j^{(\alpha)} \overset{p}{\mathbf{v}} \neq 0$ waarin $A_i^{(\alpha)}$ en $M_j^{(\alpha)}$ toegevoegd zijn, dan is $A_i^{(\alpha)} M_j^{(\alpha)} \overset{p}{\mathbf{v}}$ een elementaire affinor en dus is volgens Stelling II

$$ A_i^{(\alpha)} M_j^{(\alpha)} \overset{p}{\mathbf{v}} = A_i^{(\alpha)} M_j^{(\alpha)} \sum_{\beta} A_i^{(\beta)} \overset{p}{\mathbf{w}}_{\beta} \quad \ldots \ldots \quad (34) $$

waarin de $\overset{p}{\mathbf{w}}_\beta$ elementaire affinoren zijn, en de sommatie te geschieden heeft over alle *geordende* alternaties $\underset{i}{A}^{(\beta)}$. Daar nu $\underset{j}{M}^{(\alpha)} \underset{i}{A}^{(\beta)} = 0$ voor $\alpha \neq \beta$ volgt

$$\underset{i}{A}^{(\alpha)} \underset{j}{M}^{(\alpha)} \overset{p}{\mathrm{v}} = \underset{i}{A}^{(\alpha)} \underset{i}{M}^{(\alpha)} \underset{i}{A}^{(\alpha)} \overset{p}{\mathrm{w}}_\alpha . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Herhaalde toepassing leert dus dat de operator $\underset{i}{A}^{(\alpha)} \underset{j}{M}^{(\alpha)}$ nooit nilpotent kan zijn. Volgens een bekende stelling uit de theorie der hoogere komplexe getalstelsels volgt daaruit, dat er een idempotent getal bestaat van den vorm:

$$a_{\alpha_1} (\underset{i}{A}^{(\alpha)} \underset{j}{M}^{(\alpha)}) + \ldots + a_{\alpha_\mu} (\underset{i}{A}^{(\alpha)} \underset{j}{M}^{(\alpha)})^\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Voor iedere geordende alternatie bestaat er dus zoo'n idempotent getal, en deze vormen, daar hun producten nul zijn, een rij van idempotente hoofdeenheden. Het aantal geordende operatoren A_i en M bedraagt dus σ_{ij} of minder. Het kan echter niet minder bedragen daar herhaalde toepassing van stelling II leert, dat iedere elementaire affinor zich laat schrijven in den vorm $\sum_\lambda \underset{i}{A}^{(\lambda)} \underset{j}{M}^{(\lambda)} \overset{p}{\mathbf{m}}$. Ware nu $\mu \neq 1$, dan zouden de machten van $\underset{i}{A}^{(\alpha)} \underset{j}{M}^{(\alpha)}$ ten opzichte van een der idempotente hoofdeenheden in de eerste en ten opzichte van de andere in de vierde klasse van Peirce zijn. Daar dergelijke getallen (nilpotente neveneenheden) in een oorspronkelijk getalstelsel niet kunnen voorkomen, is $\mu = 1$ en de operatoren

$$\overset{j}{\underset{\lambda i}{}}I = \varepsilon_{ij} \underset{j}{A}^{(\lambda)} \underset{j}{M}^{(\lambda)} \qquad \lambda = 1, \ldots, \sigma_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

zijn dus idempotente hoofdeenheden. Evenzoo vormen

$$\overset{\lambda j}{\underset{i}{}}I = \varepsilon'_{ij} \underset{j}{M}^{(\lambda)} \underset{i}{A}^{(\lambda)} \qquad \lambda = 1, \ldots, \sigma_{ij} \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

een dergelijk stel. Wij noemen deze operatoren *geordende elementaire operatoren van de eerste* resp. *tweede soort*, en de affinoren die door hen ontstaan kunnen, *geordende elementaire affinoren van de eerste* resp. *tweede soort*.

Is γ_i het aantal permutaties in A_i of M_i, dus voor het permutatiegetal $s_1, \ldots, s_t$ gelijk $s_1! \ldots s_t!$ en β_i het aantal operatoren A_i of M_i dat een *bepaalden* operator M_j resp. A_j *niet* annulleert, dan is gemakkelijk te berekenen dat $\dfrac{p!}{\gamma_i \gamma_j} = \dfrac{\alpha_i}{\beta_i} = \dfrac{\alpha_j}{\beta_j}$ de koefficient is van K_1 in $\underset{i}{A}^{(\alpha)} \underset{j}{M}^{(\alpha)}$ en $\underset{j}{M}^{(\alpha)} \underset{i}{A}^{(\alpha)}$. Daar de koefficient van K_1 in $\overline{A_i} \;\; M_j$ één is, volgt daaruit:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} = \frac{\delta_{ij}\,\gamma_i\,\gamma_j}{p\,!} = \frac{\delta_{ij}\,\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\delta_{ij}\,\beta_j}{\alpha_j} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

De ontwikkeling naar elementaire affinoren van de eerste soort luidt dus bijv. voor $p = 6$:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{6}{\mathbf{u}} = (A_0 M_{11} + \frac{5}{3}\sum\limits_{\lambda}^{1,\ldots,5} A_2^{(\lambda)} M_{10}^{(\lambda)} + \frac{12}{5}\sum\limits_{\lambda}^{1,\ldots,9} A_3^{(\lambda)} M_9^{(\lambda)} + 2\sum\limits_{\lambda}^{1,\ldots,5} A_4^{(\lambda)} M_7^{(\lambda)} + \\ + 2\sum\limits_{\lambda}^{1,\ldots,10} A_5^{(\lambda)} M_8^{(\lambda)} + \frac{16}{5}\sum\limits_{\lambda}^{1,\ldots,16} A_6^{(\lambda)} M_6^{(\lambda)} + 2\sum\limits_{\lambda}^{1,\ldots,5} A_7^{(\lambda)} M_4^{(\lambda)} + \\ + 2\sum\limits_{\lambda}^{1,\ldots,10} A_8^{(\lambda)} M_5^{(\lambda)} + \frac{12}{5}\sum\limits_{\lambda}^{1,\ldots,9} A_9^{(\lambda)} M_3^{(\lambda)} + \frac{5}{3}\sum\limits_{\lambda}^{1,\ldots,5} A_{10}^{(\lambda)} M_2^{(\lambda)} + A_{11} M_0)\,\overset{6}{\mathbf{u}}\end{array}\right\} . \quad (40)$$

Is een ontwikkeling van een affinor $\overset{p}{\mathbf{u}}$ gegeven naar geordende alternaties of mengingen, die ieder door elke hoogere alternatie resp. menging gealterneerd worden, dan is deze ontwikkeling identiek met de aangegevene. Immers bij toepassing van den operator $\varepsilon_{ij}\, A_i^{(\alpha)} M_j^{(\alpha)}$ resp. $\varepsilon_{ij} M_j^{(\alpha)} A_i^{(\alpha)}$ worden alle termen geannulleerd behalve die welke ontstaan is uit $A_i^{(\alpha)}$ resp. $M_j^{(\alpha)}$, alleen deze eene term blijft onveranderd en is dus gelijk aan $\varepsilon_{ij}\, A_i^{(\alpha)}\, M_j^{(\alpha)} \overset{p}{\mathbf{u}}$ resp. $\varepsilon_{ij} M_j^{(\alpha)} A_i^{(\alpha)} \overset{p}{\mathbf{u}}$. De aangegeven ontwikkeling is dus eenduidig bepaald.

We hebben dus de volgende stelling verkregen:

Hoofdstelling C. Iedere affinor kan op ééne en slechts ééne wijze geschreven worden als een som van geordende alternaties of mengingen, die door elke alternatie resp. menging met hooger permutatiegetal geannulleerd worden.

Ontwikkeling van een affinor naar niet reduceerbare kovarianten van verschillenden graad.

Zijn $\overline{A_i}$ en $\overline{M_j}$ toegevoegd, dan is het voor $n > 5$ zeer wel mogelijk, dat met een alg. alternatie lager dan $\overline{A_i}$ een algemeene menging correspondeert lager dan $\overline{M_j}$. Is echter $\overline{A_i} = {}_{\alpha.n}\overline{A_i}$, dan is iedere alg. alternatie, lager dan $\overline{A_i}$ van den vorm $(\alpha - \beta).n, s_2, \ldots, s_t\, \overline{A_i}$. Aan $\alpha.n$ is het permutatiegetal $(\alpha + p - \alpha n), (n-1).\alpha$ toegevoegd, en aan $(\alpha-\beta).n, s_2, \ldots, s_t$ het getal $(\alpha - \beta + t + p - (\alpha-\beta)n - s_2 - \ldots - s_t), (s_t - 1).(\alpha - \beta + t), \ldots, (n - s_2).(\alpha - \beta)$ en het tweede getal is zeker hooger dan het eerste omdat $s_2, \ldots, s_n$ alle $< n$ zijn. Alle alg. alternaties lager dan ${}_{\alpha.n}\overline{A_i}$ worden dus geannulleerd door alle mengingen met hooger permutatiegetal dan $\overline{M_j}$. Is dus het geheele aantal malen, dat p n bevat r, dan kunnen de operatoren ${}_i^j I$ in $r+1$ groepen

worden saamgevat. Is de som der operatoren in de $(\alpha+1)$-de groep ${}_{\alpha}\Gamma'$, dan is ${}_{\alpha}\Gamma'\overset{p}{\mathbf{u}}$ een som van grootheden, die kunnen ontstaan uit alternaties ${}_{\alpha.n}A$, en die door iedere ${}_{(\alpha+1).n}A$ en alle hoogere alternaties geannulleerd worden. Elke term van ${}_{\alpha}\Gamma'\overset{p}{\mathbf{u}}$ is een doordringend algemeen product van α factoren $\mathbf{E}, \mathbf{E} = \mathbf{e}_1 \frown \dots \mathbf{e}_n$, en een reale affinor van den graad $p-\alpha n$, die een kovariante is van $\overset{p}{\mathbf{u}}$ en blijkbaar door iederen operator ${}_{n}A$ geannulleerd wordt. Een dergelijken affinor noemen we *lineair homogeen nietreduceerbaar* en de aangegeven ontwikkeling de ontwikkeling naar *lineair homogeen nietreduceerbare kovarianten.*

We zullen nu aantoonen dat er slechts één ontwikkeling naar niet reduceerbare kovarianten bestaat. Het is voldoende daartoe aan te toonen, dat een doordringend product $\overset{p}{\mathbf{r}}$ van $\mathbf{E}^{\alpha}$ en een niet reduceerbaren affinor $\overset{q}{\mathbf{v}}$, $q = p-\alpha n$, door alle operatoren Γ' behalve ${}_{\alpha.n}\Gamma'$ geannulleerd wordt. Daar $\overset{p}{\mathbf{r}}$ kan ontstaan door een ${}_{\alpha.n}A$ en dus geannulleerd wordt door iedere menging met een permutatiegetal hooger dan het aan $\alpha.n$ toegevoegde, is dit voor alle ${}_{\beta}\Gamma'$ waarvoor $\beta < \alpha$ is, evident. Is $\beta > \alpha$, dan merke men op, dat ${}_{\beta}\Gamma'$ een veelvoudensom is van operatoren $\overline{M}_j\,\overline{A}_i$, waarin de alternaties altijd meer dan α permutatiegebieden met n factoren hebben. Het gestelde zal dus bewezen zijn, wanneer aangetoond is, dat $\overset{p}{\mathbf{r}}$ door iederen operator ${}_{\beta.n}A$, $\beta > \alpha$ geanulleerd wordt.

We maken daarbij gebruik van de stelling, dat een nietreduceerbare grootheid geen lineaire kovarianten van lageren graad bezit. [1]) Door de werking van een operator ${}_{\beta.n}A$ ontstaat uit $\overset{p}{\mathbf{r}}$ een doordringend algemeen product van $\mathbf{E}^{\beta}$ en een affinor $\overset{r}{\mathbf{w}}$, $r = p - \beta n$. $\overset{r}{\mathbf{w}}$ zou dan echter een lineaire kovariante zijn van $\overset{q}{\mathbf{v}}$ van den graad $r^r < q$. Dit is niet mogelijk, dus is $\overset{r}{\mathbf{w}}$ nul.

Iedere term van ${}_{\alpha}\Gamma'\overset{p}{\mathbf{u}}$ is in α verschillende gebieden van n factoren alterneerend en wordt door iedere alternatie met een alterneerend gebied van meer dan α factoren geannulleerd. Uit stelling II volgt dus dat ${}_{\alpha}\Gamma'\overset{p}{\mathbf{u}}$ herleid kan worden tot een som van *geordende* alternaties met permutatiegetal $\alpha.n$. Deze splitsing is eenduidig

[1]) Het bewijs van deze stelling moge elders afzonderlijk gegeven worden.

bepaald, daar iedere dezer alternaties een som is der geordende alternaties met permutatiegetallen vanaf $\alpha . n$ tot en met het hoogste getal onder $(\alpha+1) . n$, die dezelfde α alterneerende gebieden van n factoren hebben, uit de ontwikkeling volgens Hoofdstelling C.

We hebben dus de stelling verkregen:

Hoofdstelling D. Iedere affinor kan op éene en slechts éene wijze geschreven worden als een som van termen, die ieder bestaan uit doordringende producten van een voor dezen term karakteristiek aantal α *faktoren* **E** *met een lineair homogeen niet reduceerbaren affinor van den graad* $p-\alpha n$, *en die ieder een geordende alternatie met het permutatiegetal* $\alpha . n$ *vormen. Deze ontwikkeling kan verkregen worden door groepsgewijze samenvatting der termen van de ontwikkeling naar elementaire affinoren.*

$\overset{p}{\mathbf{u}}$ laat zich dus schrijven:

$$\overset{p}{\mathbf{u}} = \sum_{\alpha}^{0,\ldots,r} \sum_{\lambda}^{1,\ldots,\delta_{ij}} {}_{\alpha.n}L_i^{(\lambda)} \quad \ldots \ldots . \quad (41)$$

waarin ${}_{\alpha.n}L_i^{(\lambda)}$ de som is der geordende elementaire operatoren van de eerste soort die dezelfde n-factorige alterneerende gebieden hebben als ${}_{\alpha\, n}A_i^{(\lambda)}$.

Voor $n=2$ is de ontwikkeling naar gemengde alternaties volgens Hoofdstelling A tegelijk een ontwikkeling naar niet reduceerbare kovarianten. Zij is dus voor iederen affinor eenduidig bepaald, en daar zij k termen bevat ook identiek met de ontwikkeling naar elementaire affinoren. Uit (16) blijkt dus dat voor dit geval

$$ {}^{k-\alpha-1}_{\alpha+1}I = \frac{\binom{p}{2\alpha}\binom{2\alpha}{\alpha}}{\binom{p-\alpha+1}{\alpha}} {}_{\alpha.2}\overset{m}{A} \quad \ldots \ldots . \quad (42)$$

Uit de afgeleide reeksontwikkelingen kunnen op eenvoudige wijze zeer algemeene reeksontwikkelingen voor algebraische vormen in m rijen van n variabelen worden afgeleid. In een volgend artikel hoopt schrijver dit nader aan te toonen. Daarbij zal dan tevens worden aangegeven waar het bovenstaande aansluit aan reeds bekende reeksontwikkelingen van algebraische vormen.

Ontwikkeling van den RIEMANN-CHRISTOFFEL'schen *affinor naar geordende elementaire affinoren.*

Wordt de gevonden reeksontwikkeling naar geordende elementaire affinoren van de eerste soort toegepast op den RIEMANN-CHRISTOFFEL'-

schen affinor $\overset{4}{\mathbf{K}} = \mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_2\, \mathbf{k}_3\, \mathbf{k}_4$, waarvoor, zooals bekend is, geldt:

$$\mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_2\, \mathbf{k}_3\, \mathbf{k}_4 = -\, \mathbf{k}_2\, \mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_3\, \mathbf{k}_4 = -\, \mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_2\, \mathbf{k}_4\, \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_2\, \mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_4\, \mathbf{k}_3$$

$$\mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_2\, \mathbf{k}_3\, \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_2\, \mathbf{k}_3\, \mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_3\, \mathbf{k}_1\, \mathbf{k}_2\, \mathbf{k}_4 = 0, \quad . \;\; . \;\; . \quad (43)$$

dan blijkt, dat van alle negen geordende elementaire operatoren van de eerste soort alleen $\varepsilon_{3,3}\, A_3^{(1)}\, M_3^{(1)}$ niet nul geeft. $\overset{4}{\mathbf{K}}$ is dus zelf een voorbeeld van een geordenden elementairen affinor.

Sterrekunde. — De Heer DE SITTER biedt een mededeeling aan van Dr. J. WOLTJER JR.: *„Over de storingstermen in de beweging van Hyperion, welke evenredig zijn met de eerste macht der excentriciteit van Titan".*

(Mede aangeboden door den Heer J. C. KAPTEYN.)

1. De inhoud dezer mededeeling bestaat in de berekening der termen in de beweging van Hyperion, welke evenredig zijn met de eerste macht der excentriciteit van Titan, onder dezelfde beperkende omstandigheden als aangegeven in Hoofdstuk II § 1 der „Investigations"[1]). De bij deze storingen optredende argumenten worden gevormd door combinatie van het saeculaire deel van het verschil in pericentrumlengte der beide satellieten met veelvouden van het libratie-argument. Die termen, waarvoor dit veelvoud een oneven getal is, bezitten in de middelbare anomalie coefficienten, waarbij de quadraatwortel uit de storende massa in den noemer optreedt; het bedrag der hierdoor in de middelbare anomalie (en middelbare lengte) veroorzaakte storing kan ongeveer een halven graad bedragen. Het vermoeden ligt voor de hand, dat wij hier te doen hebben met de door H. STRUVE[2]) aan het einde zijner bespreking van de baan van Hyperion bedoelde storingstermen, wier invloed hij in de waarnemingen duidelijk constateerde en welker totaal bedrag volgens zijn schatting eveneens ongeveer een halven graad zou kunnen bereiken.

Deze mededeeling vormt een vervolg op de ontwikkelingen vervat in de „Investigations" en in „De pericentrumlengte van Hyperion en de massa van Titan"[3]).

2. De termen der eerste orde t. o. v. de excentriciteit van Titan in de vier veranderlijken $\varrho, \sigma, \theta, \Omega$ nl. $\delta\varrho, \delta\sigma, \delta\theta, \delta\Omega$ worden bepaald door het volgende stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen[4]):

[1]) Investigations in the theory of Hyperion. Kortheidshalve citeer ik deze verhandeling als „Investigations."

[2]) Publications de l'Observatoire Central Nicolas. Série II. Vol. XI. Beobachtungen der Saturnstrabanten. St. Pétersbourg. 1898. p. 290.

[3]) Versl. Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Deel XXVII, N^0. 6.

[4]) Investigations, p. 48.

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{d\delta\varrho}{dt} &= \frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta\partial\varrho}\,\delta\varrho + \frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta\partial\sigma}\,\delta\sigma + \frac{\partial^2 R_1}{\partial\theta^2}\,\delta\theta + \frac{\partial R_2}{\partial\theta},\\
\frac{d\delta\sigma}{dt} &= \frac{\partial R_2}{\partial\Omega},\\
\frac{d\delta\theta}{dt} &= -\frac{\partial^2(R_0+R_1)}{\partial\varrho^2}\,\delta\varrho - \frac{\partial^2 R_1}{\partial\varrho\partial\sigma}\,\delta\sigma - \frac{\partial^2 R_1}{\partial\varrho\partial\theta}\,\delta\theta - \frac{\partial R_2}{\partial\varrho},\\
\frac{d\delta\Omega}{dt} &= -\frac{\partial^2 R_1}{\partial\varrho\partial\sigma}\,\delta\varrho - \frac{\partial^2 R_1}{\partial\sigma^2}\,\delta\sigma - \frac{\partial^2 R_1}{\partial\sigma\partial\theta}\,\delta\theta - \frac{\partial R_2}{\partial\sigma}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)
$$

Zoowel in de coefficienten van $\delta\varrho, \delta\sigma, \delta\theta$ als in de bekende termen dezer differentiaalvergelijkingen moeten de waarden van $\varrho, \sigma, \theta, \Omega$ voor $e'=0$ gesubstitueerd worden; verder behooren in R_2 de termen van hoogere orde in e' dan de eerste te worden weggelaten, zoodat [1])

$$
R_2 = \frac{m'}{a'}\,e'\left[g(\theta)\cos\Omega + h(\theta)\sin\Omega\right]. \quad (2)
$$

De waarden van $\varrho, \sigma, \theta, \Omega$ voor $e'=0$ zijn gegeven als functies van twee integratieconstanten, σ_0 en q, en twee lineaire functies van den tijd τ en ϖ, die elk een additieve integratieconstante bevatten, door de formules [2]):

$$
\left.\begin{aligned}
\varrho &= \sum_{p=0}^{p=\infty} \varrho_p\,\mu^p, & \theta &= \sum_{p=0}^{p=\infty} \theta_p\,\mu^p,\\
\sigma &= \sum_{p=0}^{p=\infty} \sigma_p\,\mu^p, & \Omega &= \varpi + \sum_{p=0}^{p=\infty} \Omega_p\,\mu^p,\\
\mu &= \sqrt{\frac{m'}{M}},
\end{aligned}\right\} \quad (3)
$$

waar

$$
\left.\begin{aligned}
&\varrho_p = \sum_{s=0}^{s=\infty} \varrho^{(p,s)}\cos s\tau, \quad \theta_p = \sum_{s=1}^{s=\infty} \theta^{(p,s)}\sin s\tau, \quad \Omega_p = \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega^{(p,s)}\sin s\tau,\\
&\tau = \nu t + \gamma, \qquad \nu = \mu \sum_{p=0}^{p=\infty} \nu_{p+1}\,\mu^p,\\
&\varpi = \chi t + const., \quad \chi = \mu^2 \sum_{p=0}^{p=\infty} \chi_{p+2}\,\mu^p,
\end{aligned}\right\} \quad (4)
$$

en ϱ_0; $\sigma_0, \ldots, \sigma_p, \ldots$; $\theta^{(p,s)}$; $\varrho^{(p,s)}$; $\Omega^{(p,s)}$; ν_p; χ_p; en γ constante grootheden zijn. De coefficient van t in ϖ is in afwijking van de in de „Investigations" gebruikte notatie door de letter χ voorgesteld om verwarring met het bekende getal π te voorkomen. De grootheid

[1]) Investigations, p. 22.

[2]) Investigations, p. 23 en Versl. Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Deel XXVII, N°. 6.

ϱ_0 die in deze formules in de verschillende coefficienten optreedt is als functie van σ_0 en q gegeven door de betrekking [1])

$$\overline{\frac{\partial R_0}{\partial \varrho}} + \overline{\frac{\partial R_1}{\partial \varrho}} = -3n', \tag{5}$$

waar de constante term eener periodieke functie aangegeven is door een streep boven het functieteeken. Hieruit volgt voor ϱ_0 de ontwikkeling:

$$\varrho_0 = \sum_{p=0}^{p=\infty} l_p \mu^p, \tag{6}$$

waar l_0 een constante is, $l_1 = 0$ is, terwijl $l_2, \ldots, l_p, \ldots$ functies van σ_0 en q zijn.

3. Door substitutie der reeksen (3) en (4) in (2) wordt de ontwikkeling van R_2 deze:

$$\left.\begin{aligned} R_2 &= \frac{m'}{M}\frac{e'}{a'}\left[\cos\varpi \sum_{p=0}^{p=\infty} A_p \cos p\tau + \sin\varpi \sum_{p=1}^{p=\infty} B_p \sin p\tau\right], \\ A_p &= \sum_{r=0}^{r=\infty} A_{p,r}\mu^r, \qquad B_p = \sum_{r=0}^{r=\infty} B_{p,r}\mu^r; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

deze formule kan men ook aldus schrijven:

$$R_2 = \frac{m'}{M}\frac{e'}{a'} \sum_{-\infty}^{+\infty} C_p \cos(\varpi + p\tau), \tag{8}$$

waar

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= A_0, \\ C_p &= \frac{A_p - B_p}{2}, \qquad p \geqq 1, \\ C_{-p} &= \frac{A_p + B_p}{2}, \qquad p \geqq 1, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

en C_p aldus ontwikkeld kan worden:

$$C_p = \sum_{r=0}^{r=\infty} C_{p,r}\mu^r, \qquad p = -\infty, \ldots, +\infty \tag{10}$$

De coefficienten $A_{p,r}$, $B_{p,r}$, $C_{p,r}$ zijn functies van ϱ_0, σ_0, q.

De waarden der coefficienten $C_{p,0}$ en der afgeleiden dezer coefficienten, als functies van ϱ_0, σ_0 en q beschouwd, naar q vindt men vereenigd in onderstaande tabel. Deze waarden behooren bij de in „Investigations" Hoofdstuk II afgeleide numerieke waarden der coefficienten in de reeksen (3) en (4).

[1]) Investigations, Hoofdstuk II, § 8.

p	$C_{p,0}\dfrac{10^6}{M}$	$q\dfrac{\partial C_{p,0}}{\partial q}\cdot\dfrac{10^5}{M}$	p	$C_{p,0}\dfrac{10^5}{M}$	$q\dfrac{\partial C_{p,0}}{\partial q}\cdot\dfrac{10^6}{M}$
0	+ 93397	— 1340			
1	+ 18685	+ 20056	— 1	— 18685	— 20056
2	+ 318	+ 712	— 2	+ 318	+ 712
3	— 264	— 826	— 3	+ 264	+ 826
4	— 10	— 42	— 4	— 10	— 42
5	+ 4	+ 20	— 5	— 4	— 20

Voor de verdere ontwikkelingen dezer verhandeling zullen wij nog noodig hebben de waarde van den coefficient $C_{0,1}$.

Nu heeft men de vergelijking

$$\frac{1}{M}\sum_{p=0}^{p=\infty} A_{p,1}\cos p\tau = \left[\frac{\partial g}{\partial \varrho}\right]_0 \varrho_1 + \left[\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right]_0 \sigma_1 + \left[\frac{\partial g}{\partial \theta}\right]_0 \theta_1 + [h]_0\,\Omega_1\,, \tag{11}$$

waar $[\;]_0$ een verkorte schrijfwijze is voor $[\;]_{\rho=\rho_0,\sigma=\sigma_0,\theta=\theta_0}$.

Het rechterlid dezer formule is een even periodieke functie van τ; verder keeren, indien men τ door $\pi-\tau$ vervangt, ϱ_1, σ_1 $(=0)$, θ_1 en Ω_1 van teeken om, terwijl hun coefficienten hetzelfde blijven; hieruit volgt, dat het linkerlid een even periodieke functie van τ is, die van teeken omkeert als men τ door $\pi-\tau$ vervangt en dus dat $A_{2p,1}=0$, voor $p=0, 1, \ldots$; dus:

$$C_{0,1}=A_{0,1}=0\;. \tag{12}$$

4. De oplossing der vergelijkingen (1) is, wat $\delta\theta$ betreft, gegeven door de formule [1]):

$$\begin{aligned}
\delta\theta = &\left[\frac{\partial\theta}{\partial\sigma_0}\frac{\partial\sigma}{\partial q}-\frac{\partial\theta}{\partial q}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_0}\right]\int\frac{dt}{\Delta}\frac{\partial R_2}{\partial\tau}+\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\int\frac{dt}{\Delta}\left[\frac{\partial R_2}{\partial q}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_0}-\frac{\partial R_2}{\partial\sigma_0}\frac{\partial\sigma}{\partial q}\right]\\
&+\frac{\delta\sigma}{\Delta}\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\frac{\partial\theta}{\partial q}-\frac{\partial\Omega}{\partial q}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_0}+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_0}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\sigma_0}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial q}\right]\\
&+\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\nu}{\partial\sigma_0}\frac{\partial\sigma}{\partial q}-\frac{\partial\nu}{\partial q}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_0}\right]\int dt\left[\int\frac{dt}{\Delta}\frac{\partial R_2}{\partial\tau}\right]\\
&+\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\chi}{\partial\sigma_0}\frac{\partial\sigma}{\partial q}-\frac{\partial\chi}{\partial q}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_0}\right]\int\frac{dt}{\Delta}\,\partial\sigma.
\end{aligned} \tag{13}$$

[1]) Investigations, III, § 1.

De waarde der grootheid Δ, die constant is, wordt gegeven door de vergelijking:

$$\Delta = \left(\frac{\partial\varrho}{\partial\sigma_0}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \frac{\partial\varrho}{\partial\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\sigma_0}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial q} - \left(\frac{\partial\varrho}{\partial q}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \frac{\partial\varrho}{\partial\tau}\frac{\partial\theta}{\partial q}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_0}. \qquad (14)$$

In de formules (13) en (14) zijn de grootheden $\varrho,\sigma,\theta,\Omega,R_2,\nu,\chi$ te beschouwen als functies van q,σ_0,τ,ϖ.

Men ziet dadelijk dat in formule (14) het verschil met $\frac{\partial\sigma}{\partial q}$ als factor voorgesteld kan worden door een machtreeks in μ zonder constanten term; hetzelfde geldt van $\frac{\partial\varsigma}{\partial q}$, alleen ontbreekt hier ook de eerste macht in μ. Dus:

$$\left(\frac{\partial\varrho}{\partial\sigma_0}\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \frac{\partial\varrho}{\partial\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\sigma_0}\right)\frac{\partial\sigma}{\partial q} = \mu^3 \times \textit{machtreeks in } \mu.$$

Bedenkt men verder dat Δ een constante is, dan vindt men door ontwikkeling van het verschil met $\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma_0}$ als factor:

$$\Delta = \left[-\mu\frac{\partial\varrho_0}{\partial q}\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} + \mu\frac{\partial\varrho_1}{\partial\tau}\frac{\partial\theta_0}{\partial q} + \mu^2\frac{\partial\varrho_2}{\partial\tau}\frac{\partial\theta_0}{\partial q}\right]_{\tau=\frac{\pi}{2}} + \mu^3 \times \textit{machtreeks in } \mu.$$

Hieruit volgt:

$$\Delta = \left[\mu\frac{\partial\varrho_1}{\partial\tau}\frac{\partial\theta_0}{\partial q} + \mu^2\frac{\partial\varrho_2}{\partial\tau}\frac{\partial\theta_0}{\partial q}\right]_{\tau=\frac{\pi}{2}} + \mu^3 \times \textit{machtreeks in } \mu,$$

waar bij de differentiaties de grootheden $\varrho_1,\varrho_2,\theta_0$ als functies van ϱ_0, σ_0,q en τ te beschouwen zijn.

Uit het stelsel vergelijkingen (A) van Hoofdstuk II, § 3 der Investigations volgt, indien men stelt $R_1 = \mu^2 F_1$:

$$\nu_1\frac{\partial\varrho_2}{\partial\tau} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial\varrho\partial\theta}\varrho_1 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial\theta^2}\theta_1.$$

Voor $\tau = \frac{\pi}{2}$ is $\varrho_1 = \theta_1 = 0$, zoodat dus ook $\left[\frac{\partial\varrho_2}{\partial\tau}\right]_{\tau=\frac{\pi}{2}} = 0$.

Daar verder

$$\frac{\partial\varrho_1}{\partial\tau} = -\frac{1}{\left[\frac{\partial^2 R_0}{\partial\varrho^2}\right]_{\rho=\rho_0}}\nu_1\frac{\partial^2\theta_0}{\partial\tau^2} = -\frac{a_0^2\nu_1}{48}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial\tau^2},$$

volgt als definitieve formule voor Δ:

$$\Delta = -\mu\frac{a_0^2\nu_1}{48}\left[\frac{\partial^2\theta_0}{\partial\tau^2}\right]_{\tau=\frac{\pi}{2}} + \mu^3 \times \text{machtreeks in } \mu;$$

stelt men dus

$$\Delta = \sum_{p=0}^{p=\infty} \Delta_p \mu^p , \tag{15}$$

zoo is

$$\Delta_0 = 0, \qquad \Delta_1 = +\,0.0083292 \; \frac{a_0^{\,2} v_1}{q}, \qquad \Delta_2 = 0 . \tag{16}$$

5. Duidt men de vijf termen van het rechterlid der formule (13) aan door de cijfers I, II, III, IV, V, zoo vindt men voor elk dezer termen een ontwikkeling van de gedaante:

$$\left.\begin{array}{l} I = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} I_p \sin(\varpi + p\tau), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ V = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} V_p \sin(\varpi + p\tau). \end{array}\right\} \tag{17}$$

De coefficienten $I_p, \ldots, V_p$ bezitten e' als factor en kunnen aldus ontwikkeld worden:

$$\left.\begin{array}{l} I_p = \sum\limits_{r=0}^{r=\infty} I_{p,r}\, \mu^r , \\ II_p = II_{p,-1}\, \mu^{-1} + \sum\limits_{r=0}^{r=\infty} II_{p,r}\, \mu^r , \\ III_p = \sum\limits_{r=0}^{r=\infty} III_{p,r}\, \mu^r , \\ IV_p = \sum\limits_{r=0}^{r=\infty} IV_{p,r}\, \mu^r , \\ V_p = V_{p,-1}\, \mu^{-1} + \sum\limits_{r=0}^{r=\infty} V_{p,r}\, \mu^r . \end{array}\right\} \tag{18}$$

Voor $d\theta$ vindt men dus de ontwikkeling:

$$\left.\begin{array}{l} d\theta = e' \sum\limits_{p=0}^{p=\infty} \theta_p^{(e')} \mu^p + e'\, \theta_{-1}^{(e')} \mu^{-1}, \\ \theta_p^{(e')} = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta_{(e')}^{(p,q)} \sin(\varpi + q\tau), \quad p = -1, 0, .., +\infty . \end{array}\right\} \tag{19}$$

Ter bepaling der coefficienten $\theta_{(e')}^{(p,q)}$ heeft men de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} e'\, \theta_{(e')}^{(-1,q)} = II_{q,-1} + V_{q,-1}, \\ e'\, \theta_{(e')}^{(p,q)} = I_{q,p} + II_{q,p} + III_{q,p} + IV_{q,p} + V_{q,p}, \quad p = 0, .., +\infty . \end{array}\right\} \tag{20}$$

Evenzoo vindt men voor $d\sigma$ de ontwikkeling:

$$\left.\begin{aligned} d\sigma &= e' \sum_{p=0}^{p=\infty} \sigma_p^{(e')} \mu^p , \\ \sigma_p^{(e')} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{(e')}^{(p,q)} \cos(\varpi + q\tau). \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

De waarde van $d\varrho$ vindt men zonder eenige integratie uit de derde vergelijking van het stelsel (1). Daaruit volgt:

$$d\varrho = \frac{1}{\frac{\partial^2 (R_0 + R_1)}{\partial \varrho^2}} \left\{ -\frac{d\delta\theta}{dt} - \frac{\partial^2 R_1}{\partial\varrho\partial\sigma} d\sigma - \frac{\partial^2 R_1}{\partial\varrho\partial\theta} d\theta - \frac{\partial R_2}{\partial\varrho} \right\}. \qquad (22)$$

Hieruit volgt, dat $d\varrho$ aldus ontwikkeld kan worden:

$$\left.\begin{aligned} d\varrho &= e' \sum_{p=0}^{p=\infty} \varrho_p^{(e')} \mu^p , \\ \varrho_p^{(e')} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \varrho_{(e')}^{(p,q)} \cos(\varpi + q\tau). \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Ter bepaling van $d\Omega$ heeft men volgens (1) de vergelijking:

$$\frac{d\delta\Omega}{dt} = -\frac{\partial^2 R_1}{\partial\varrho\partial\sigma} \delta\varrho - \frac{\partial^2 R_1}{\partial\sigma^2} d\sigma - \frac{\partial^2 R_1}{\partial\sigma\partial\theta} \delta\theta - \frac{\partial R_2}{\partial\sigma} \quad . \qquad (24)$$

Het rechterlid kan ontwikkeld worden als een machtreeks in μ, die begint met een term van de eerste orde in μ en waarvan elke coefficient gelijk is aan een som van termen, die e' als factor bezitten en van de gedaante zijn:

$$\text{coefficient.} \cos(\varpi + p\tau),$$

$p = -\infty, \ldots, +\infty$. Voor den coefficient van μ vindt men:

$$-\frac{Me'}{a'} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial\sigma\partial\theta} \right]_{\rho_0\tau_0\theta_0} \theta_{-1}^{(e')} .$$

Nu is

$$\theta_{-1}^{(e')} = \frac{1}{a'\Delta_1} \left\{ \frac{1}{\chi_2} \frac{\partial C_{0,0}}{\partial q} - \frac{C_{0,0}}{\chi_2^2} \frac{\partial \chi_2}{\partial q} \right\} \sin\varpi \frac{\partial\theta_0}{\partial\tau},$$

zoodat de coefficient van μ in het rechterlid der vergelijking voor $\frac{d\delta\Omega}{dt}$ gelijk is aan:

$$\frac{e'}{a'\Delta_1} v_1 \left\{ \frac{1}{\chi_2} \frac{\partial C_{0,0}}{\partial q} - \frac{C_{0,0}}{\chi_2^2} \frac{\partial \chi_2}{\partial q} \right\} \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial\tau^2} \sin\varpi. \qquad (25)$$

Hieruit volgt dat $d\Omega$ aldus ontwikkeld kan worden:

$$\left.\begin{aligned} d\,\Omega &= e' \sum_{p=0}^{p=\infty} \Omega_p^{(e')} \mu^p , \\ \Omega_p^{(e')} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \Omega_{(e')}^{(p,q)} \sin(\varpi + q\tau). \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

6. Ter bepaling der coefficienten $I_{p,0}, \ldots, V_{p,0}, II_{p,-1}, V_{p,-1}$ leidt men uit formule (13) de volgende formules af:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{-\infty}^{+\infty} I_{p,0} \sin(\varpi + p\tau) = \\ &= -\frac{e'}{a'\Delta_1 r_1}\frac{\partial\theta_0}{\partial q}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left[C_{p,0}\cos(\varpi + p\tau) + C_{-p,0}\cos(\varpi - p\tau)\right],\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{-\infty}^{+\infty} II_{p,0} \sin(\varpi + p\tau) = \frac{e'}{a'\Delta_1\chi_2}\frac{\partial C_{0,0}}{\partial q}\sin\varpi\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} + \\ &+ \frac{e'}{a'\Delta_1 r_1}\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left[\frac{\partial C_{p,0}}{\partial q}\frac{\sin(\varpi + p\tau)}{p} - \frac{\partial C_{-p,0}}{\partial q}\frac{\sin(\varpi - p\tau)}{p}\right],\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} III_{p,0}\sin(\varpi + p\tau) = \frac{e'}{a'\Delta_1\chi_2}C_{0,0}\left[\frac{\partial\Omega_1}{\partial\tau}\frac{\partial\theta_0}{\partial q} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial q}\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}\right]\cos\varpi, \quad (29)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{-\infty}^{+\infty} IV_{p,0}\sin(\varpi + p\tau) = \\ &= -\frac{e'}{a'\Delta_1 r_1^2}\frac{\partial r_1}{\partial q}\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left[C_{p,0}\frac{\sin(\varpi + p\tau)}{p} - C_{-p,0}\frac{\sin(\varpi - p\tau)}{p}\right],\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} V_{p,0}\sin(\varpi + p\tau) = -\frac{e'}{a'\Delta_1}\frac{C_{0,0}}{\chi_2^2}\frac{\partial\chi_2}{\partial q}\sin\varpi\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}, \quad (31)$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} II_{p,-1}\sin(\varpi + p\tau) = \frac{e'}{a'\Delta_1\chi_2}\frac{\partial C_{0,0}}{\partial q}\sin\varpi\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}, \quad (32)$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} V_{p,-1}\sin(\varpi + p\tau) = -\frac{e'}{a'\Delta_1}C_{0,0}\frac{1}{\chi_2^2}\frac{\partial\chi_2}{\partial q}\sin\varpi\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}. \quad (33)$$

In deze formules zijn bij de in de rechterleden te verrichten differentiaties de betrokken grootheden te beschouwen als functies van ϱ_0, σ_0, q en τ.

De uit de formules (27) tot en met (31) volgende waarden der grootheden $I_{p,0}, \ldots, V_{p,0}$ en de uit formule (20) volgende waarde van $\theta^{(0,p)}_{(e')}$ vindt men in de eerste tabel der volgende bladzijde.

De coefficienten $\theta^{(-1,q)}_{(e')}$ vindt men door gelijkstelling der overeenkomstige coefficienten in de vergelijking

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\theta^{(-1,q)}_{(e')}\sin(\varpi + q\tau) = \frac{1}{a'\Delta_1\chi_2}\left\{\frac{\partial C_{0,0}}{\partial q} - \frac{C_{0,0}}{\chi_2}\frac{\partial\chi_2}{\partial q}\right\}\sin\varpi\frac{\partial\theta_0}{\partial\tau}. \quad (34)$$

Uit deze formule, waarin de afgeleiden der verschillende grootheden bij constante ϱ_0 te nemen zijn, volgt geheel algemeen:

$$\theta^{(-1,2q)}_{(e')} = 0, \qquad q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \quad (35)$$

De waarden der coefficienten met oneven index, zooals deze volgen uit formule (34), vindt men in de tweede tabel der volgende bladzijde vereenigd.

p	$I_{p,0}\frac{10^4}{e'}$	$II_{p,0}\frac{10^4}{e'}$	$III_{p,0}\frac{10^4}{e'}$	$IV_{p,0}\frac{10^4}{e'}$	$V_{p,0}\frac{10^4}{e'}$	$\theta^{(0,p)}_{(e)}\cdot 10^4$
− 6	− 5	+ 6	0	0	0	+ 1
− 5	− 12	+ 13	+ 3	0	0	+ 4
− 4	+ 370	− 381	0	+ 7	0	− 4
− 3	+ 339	− 359	+ 12	+ 6	0	− 2
− 2	− 19696	+ 20464	0	− 739	− 23	+ 6
− 1	− 331	− 371	+ 466	+ 6	0	− 230
0	+ 38663	+ 41633	0	− 1493	0	+ 78803
+ 1	+ 331	+ 371	− 466	− 6	0	+ 230
+ 2	− 19696	+ 20464	0	− 739	− 23	+ 6
+ 3	− 339	+ 359	− 12	− 6	0	+ 2
+ 4	+ 370	− 381	0	+ 7	0	− 4
+ 5	+ 12	− 13	− 3	0	0	− 4
+ 6	− 5	+ 6	0	0	0	+ 1

q	$\theta^{(-1,q)}_{(e')}\cdot 10^5$
− 3	− 4
− 1	+ 770
+ 1	+ 770
+ 3	− 4

Ter bepaling van $\sigma_0^{(e')}$ heeft men de formule:

$$\sigma_0^{(e')} = \frac{C_{0,0}}{a'\chi_2} \cos \varpi, \tag{36}$$

waaruit men de volgende waarden der coefficienten $\sigma^{(0,q)}_{(e')}$ afleidt:

$$\sigma^{(0,q)}_{(e')} = 0 \quad \text{als} \quad q \neq 0 \quad ; \quad \sigma^{(0,0)}_{(e')} = -\,0.090563 \sqrt{a_0 M} \ . \tag{37}$$

Ter bepaling van $\varrho_0^{(e')}$ heeft men de formule:

$$\varrho_0^{(e')} = -\frac{\nu_1}{\left[\frac{\partial^2 R_0}{\partial \varrho^2}\right]_{\rho_0}} \frac{\partial \theta_{-1}^{(e')}}{\partial \tau}. \tag{38}$$

De waarden der coefficienten $\varrho_{(e')}^{(0,q)}$, die uit deze formule volgen, vindt men vereenigd in onderstaande tabel.

q	$\varrho_{(e')}^{(0,q)} \frac{10^4}{\varrho_0}$
-1	$+13$
$+1$	-13

Voor $\Omega_0^{(e')}$ heeft men de uitdrukking:

$$\Omega_0^{(e')} = [\ldots\ldots] \sin \varpi + 0.024 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \tau} \sin \varpi, \tag{39}$$

waaruit geheel algemeen volgt:

$$\Omega_{(e')}^{(0,2q+1)} = 0, \qquad q = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots, \tag{40}$$

en verder voor de even indices de waarden uit onderstaande tabel.

q	$\Omega_{(e')}^{(0,q)} . 10^4$
-2	-3
0	$[\ldots\ldots.]$
$+2$	-3

Voor de berekening van $[\ldots]$ is de ontwikkeling der storingsfunctie niet ver genoeg doorgevoerd.

7. Gaat men van de termen der eerste orde in e' in ϱ en σ over op de overeenkomstige termen in a en e, die wij δa en δe zullen noemen, zoo heeft men:

$$\frac{\delta a}{a_0} = \frac{\partial a}{\partial \varrho} \frac{\delta \varrho}{a_0} = \frac{2\varrho}{\varrho_0} \frac{\delta \varrho}{\varrho_0}, \tag{41}$$

$$\delta e = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left(\sqrt{1-e^2} - \tfrac{3}{4}\right) \frac{\delta \varrho}{\varrho} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\delta \sigma}{\sqrt{aM}}. \tag{42}$$

Noemen wij evenzoo δl en δg de termen der eerste orde in e' in de veranderlijken l en g, zoo volgt uit de transformatievergelijkingen uit Hoofdstuk II § 2 der „Investigations":

$$\delta \theta = 4\, \delta l + 3\, \delta g,$$
$$\delta \Omega = \delta g,$$

en dus:

$$\left.\begin{aligned} \delta l &= \frac{\delta \theta - 3\, \delta \Omega}{4}, \\ \delta g &= \delta \Omega \qquad . \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

In de volgende tabellen vindt men de ontwikkelingen der vier

grootheden $\delta a, \delta e, \delta l, \delta g$ aangegeven, benevens numerieke waarden voor de coefficienten.

$$\delta l = e' \sum_{p=0}^{p=\infty} l_p^{(e')} \mu^p + e' l_{-1}^{(e')} \mu^{-1} \qquad l_p^{(e')} = \sum_{-\infty}^{+\infty} l_{(e')}^{(p,q)} \sin(\varpi + q\tau),\ p=-1,0,\ldots$$

$$l_{-1}^{(e')} = \begin{aligned} &- 0^\circ.001 \sin(\varpi - 3\tau) \\ &+ 0.110 \sin(\varpi - \tau) \\ &+ 0.110 \sin(\varpi + \tau) \\ &- 0.001 \sin(\varpi + 3\tau) \end{aligned}$$

$$l_{(e)}^{(-1,2q)} = 0, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$l_0^{(e')} = \begin{aligned} &+ 0^\circ.02 \sin(\varpi - 2\tau) \\ &- 0.33 \sin(\varpi - \tau) \\ &[\ldots\ldots] \sin \varpi \\ &+ 0.33 \sin(\varpi + \tau) \\ &+ 0.02 \sin(\varpi + 2\tau) \end{aligned}$$

$$\delta g = e' \sum_{p=0}^{p=\infty} g_p^{(e')} \mu^p$$

$$g_p^{(e')} = \sum_{-\infty}^{+\infty} g_{(e')}^{(p,q)} \sin(\varpi + q\tau)$$

$$g_0^{(e')} = \begin{aligned} &- 0^\circ.02 \sin(\varpi - 2\tau) \\ &[\ldots\ldots] \sin \varpi \\ &- 0.02 \sin(\varpi + 2\tau) \end{aligned}$$

$$g_{(e')}^{(0,2q+1)} = 0, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$\delta a = e' \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p^{(e')} \mu^p \qquad \delta e = e' \sum_{p=0}^{p=\infty} e_p^{(e')} \mu^p$$

$$a_p^{(e')} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{(e)}^{(p,q)} \cos(\varpi + q\tau) \qquad e_p^{(e')} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_{(e')}^{(p,q)} \cos(\varpi + q\tau)$$

$$\frac{a_0^{(e')}}{a_0} = \begin{aligned} &+ 0.0026 \cos(\varpi - \tau) \\ &- 0.0026 \cos(\varpi + \tau) \end{aligned}$$

$$a_{(e')}^{(0,2q)} = 0, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$e_0^{(e')} = \begin{aligned} &+ 0.0030 \cos(\varpi - \tau) \\ &+ 0.8636 \cos \varpi \\ &- 0.0030 \cos(\varpi + \tau) \end{aligned}$$

8. Om de numerieke waarden der storingen $\delta a, \delta e, \delta l, \delta g$ af te leiden nemen wij [1])

$$e' = 0.02870 .$$

Voor μ^{-2} vonden wij uit de periode der libratie [2]):

$$3986 ;$$

uit de pericentrumbeweging [3]):

$$4080 .$$

Nemen wij het gemiddelde van beide waarden, zoo vinden wij:

$$\mu^{-2} = 4033,$$

waaruit volgt:

$$\mu = 0.0157 .$$

Verwaarloost men nu in de ontwikkelingen van $\delta l, \delta g, \delta a, \delta e$ die vermeld staan in de opschriften der tabellen van § 7 de termen der orde μ en hooger, zoo vindt men voor $\delta l, \delta g, \delta a, \delta e$ de waarden vereenigd in de volgende tabel.

$\delta l =$	$\delta g =$	$\frac{\delta a}{a_0} =$	$\delta e =$
$-\overset{\circ}{0}.002 \; sin(\varpi - 3\tau)$			
$+ 0.001 \; sin(\varpi - 2\tau)$	$-\overset{\circ}{0}.001 \; sin(\varpi - 2\tau)$		
$+ 0.192 \; sin(\varpi - \tau)$		$+ 0.0001 \; cos(\varpi - \tau)$	$+ 0.0001 \; cos(\varpi - \tau)$
$[\ldots] \; sin \; \varpi$	$[\ldots] \; sin \; \varpi$		$+ 0.0248 \; cos \; \varpi$
$+ 0.211 \; sin(\varpi + \tau)$		$- 0.0001 \; cos(\varpi + \tau)$	$- 0.0001 \; cos(\varpi + \tau)$
$+ 0.001 \; sin(\varpi + 2\tau)$	$- 0.001 \; sin(\varpi + 2\tau)$		
$- 0.002 \; sin(\varpi + 3\tau)$			

De coefficient van $cos \varpi$ in δe is in bevredigende overeenstemming met de door H. STRUVE [4]) uit de waarnemingen gevonden waarde $+ 0.0230$.

[1]) Investigations, p. 71.
[2]) l. c., p. 70.
[3]) Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, Deel XXVII, N⁰. 6.
[4]) Publications de l'Observatoire Central Nicolas. Série II. Vol. XI. Beobachtungen der Saturnstrabanten. St. Pétersbourg, 1898, p. 290.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt een mededeeling aan van de Heeren F. E. C. SCHEFFER en G. MEYER: „*Over een indirecte analyse van gashydraten langs thermodynamischen weg en de toepassing daarvan op het hydraat van zwavelwaterstof*". II. [1]).

(Mede aangeboden door den Heer JAEGER).

7. *Bepaling van de driephasenlijnen* $SS_B G$ *en* SL_2G.

Een aantal toestelletjes van de gedaante van fig. 3 werd van geringe hoeveelheden water voorzien, dat door C ingebracht en door hellen in het verwijde deel A overgegoten werd. Deze hoeveelheden water werden zóó gekozen, dat het vat A voor ongeveer een vijfde deel dáarmede werd gevuld. Elk toestelletje werd daarop achtereenvolgens verbonden met een zwavelwaterstoftoestel, waarin het gas door toedruppelen van verdund zwavelzuur bij een oplossing van zuur natriumsulfide bereid kon worden. De laatste werd verkregen door met iets bariet koolzuurvrij gemaakte natriumhydroxyde oplossing met zwavelwaterstof te verzadigen.

Vóór het bereiden van het gas werd de wand van B en C, die nog door water vochtig was, gedroogd door verhitten bij een luchtdruk van 2 c.M. kwik, terwijl bol A in koolzuur en alcohol was geplaatst. Tusschen het vultoestel en het apparaat C was daartoe een Tstuk aangebracht, dat verbinding met een waterstraalzuigpomp mogelijk maakte. Hierop werd bol A tot ongeveer tweederde gevuld met droge vloeibare zwavelwaterstof (het gas werd gevoerd door een Ubuis met P_2O_5 om meegevoerde vloeistof tegen te houden), waarna bij C dichtgesmolten en het afkoelend mengsel verwijderd werd.

Bij opwarmen tot kamertemperatuur smolt het ijs en vertoonde de inhoud twee lagen, gescheiden door een korst van zwavelwaterstofhydraat. Om de massa zooveel mogelijk in hydraat om te zetten werd bol A voorzichtig opgewarmd door indompelen in een waterbad van ruim 30° (het quadrupelpunt SL_1L_2G ligt bij 29.5° [2])), totdat de vaste korst verdween. Vervolgens werd onder schudden tot gewone temperatuur afgekoeld om de inwerking van beide lagen zoo goed mogelijk te doen plaats hebben. Eventueel overgedistilleerde

[1]) Eerste mededeeling. Deze Verslagen. **27.** 1104 (1919).

[2]) Deze Verslagen. **19.** 1062 (1911) Tabel.

vloeibare zwavelwaterstof werd daarbij steeds teruggegoten in A door hellen van het toestel. Was op deze manier de afkoeling tot kamertemperatuur afgeloopen, dan bleef het apparaat nog eenige dagen staan om de inwerking te bevorderen.

Om tot dampdrukbepalingen over te gaan werd bol A in vloeibare lucht afgekoeld, het toestelletje bij C geopend en met caoutchouc

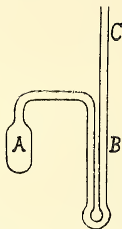


Fig. 3.

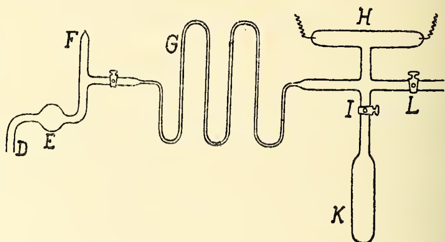


Fig. 4.

aan de buis D van het door fig. 4 aangegeven apparaat verbonden. Door leegpompen door kraan L met een waterstraalluchtpomp werd het zwavelwaterstof-luchtmengsel uit B en C (fig. 3) gedeeltelijk verwijderd; de rest van het gas werd (na sluiten van L) door openen van I in de afgekoelde kokosnootkool K opgenomen. Was de gasvormige zwavelwaterstof geheel uit het apparaat verdwenen, dan werd lucht toegelaten en het toestel van fig. 3 bij D aan dat van fig. 4 vastgesmolten. Hierop werd weder geëvacueerd, de vloeibare lucht rond A door koolzuur en alcohol vervangen en de zwavelwaterstof door L weggezogen. Nadat de vloeibare zwavelwaterstof uit A was weggekookt, bleef het apparaat nog eenige uren met de waterstraalpomp in verbinding om de door de vaste stof geadsorbeerde zwavelwaterstof zoo goed mogelijk te verwijderen. Daarna werd bol A weder in vloeibare lucht geplaatst, de toestel geheel geëvacneerd met behulp van de kokosnootkool, lucht toegelaten, buis F tijdelijk geopend om kwik in E te brengen en de geheele toestel opnieuw leeggezogen.

Het kwik in E werd door verhitten in vacuo van lucht bevrijd. Na afkoelen van het kwik werd A weder in koolzuur en alcohol geplaatst en met de waterstraalpomp, daarna met de kool geëvacueerd.

Wanneer nu na het evacueeren met de kokosnootkool kraan I gesloten werd, trad na korten tijd weder een gasdruk in den toestel

op. (GEISSLER'sche buis *H*) en dit herhaalde zich voortdurend. Op de oorzaak van dit verschijnsel komen wij later terug. Wanneer eenige malen het in den toestel ontwikkelde gas was weggenomen, zoodat aangenomen mocht worden, dat het apparaat geen lucht meer bevatte, werd het kwik uit *E* door hellen van het linker deel van den toestel (de glasveer *G* maakte deze beweging mogelijk) in *B* overgebracht. De kraan bij *G* werd nu gesloten en de toestel tusschen deze kraan en de glasveer *G* doorgesneden.

Het linker deel werd met caoutchoucslang aan een één meter langen, voor de hoogere drukkingen aan een drie meter langen manometer verbonden. Door een zuigpomp, een kraan, die verbinding met de buitenlucht toeliet en een kraan, die verbonden was met een fietspomp, kon dan bij de metingen de luchtdruk tusschen *B* en de manometers naar willekeur geregeld worden. Bij de bepalingen werkt buis *B* dus als afsluiter; het niveauverschil in den manometer, gecorrigeerd voor het standverschil in *B*, levert de waarde van den driephasendruk. Om het niveauverschil in *B* te kunnen bepalen werd met behulp van kurkschijfjes en koperdraad een glasschaaltje met millimeterverdeeling aan de buis *B* bevestigd. Daar de bepalingen uitsluitend bij temperaturen beneden kamertemperatuur werden uitgevoerd, werd alleen bol *A* geplaatst in een bad met alcohol, dat door inwerpen van vast koolzuur tot bepaalde temperaturen kon worden afgekoeld; een roerder zorgde voor gelijkmatige temperatuur in het alcoholbad. De afsluiter *B* bleef voortdurend met de buitenlucht in aanraking.

Bij het langzaam opwarmen van het alcoholbad bleek nu, dat reeds bij lage temperaturen een snelle drukstijging optrad, welke onmogelijk aan ontleding van het hydraat kon worden toegeschreven. Had de druk een bepaalde waarde bereikt, dan was de verandering met de temperatuur weder sterk gedaald. Dit feit wees er op, dat het hydraat ondanks het leegpompen met de kokosnootkool nog merkbare hoeveelheden zwavelwaterstof geadsorbeerd had, welke reeds bij temperaturen van ongeveer — 50° C. losgelaten werden.

Het leegpompen met de kokosnootkool was dus niet voldoende geweest om de geadsorbeerde hoeveelheid zwavelwaterstof te verwijderen; lang evacueeren is echter ongewenscht, daar, zooals later zal blijken, het hydraat bij — 80° C nog een merkbaren dissociatiedruk bezit en er dus in vacuo ontleding moet plaats hebben. Het optreden van deze gasadsorptie en de bij —80° C niet verwaarloosbare dissociatiedruk veroorzaken dus, dat op de boven beschreven wijze de verbinding niet in zuiveren toestand bereid kan worden. Voor de bepaling van de driephasendrukkingen werken deze beide

verschijnselen echter niet storend, wanneer de gasadsorptie althans niet te groote bedragen aanneemt.

Uit de beschreven verschijnselen is immers duidelijk, dat de gasadsorptie geen evenwichtsverschijnsel is; bij hoogere temperaturen, waar de evenwichten zich sneller instellen, is deze adsorptie spoedig opgeheven en de vrijkomende zwavelwaterstof kan den driephasendruk niet beinvloeden (de driephasenevenwichten zijn monovariant). Evenmin kan een gedeeltelijke ontleding van het hydraat op den evenwichtsdruk invloed hebben.

Toch doet zich bij deze bepalingen een moeilijkheid voor. Indien de verbinding geen gas geadsorbeerd had, zou bij verhitting slechts een gasdruk kunnen optreden door ontleding van de verbinding in ijs en gas; het waarnemen van een gasdruk zou dan dus al voldoende criterium zijn, dat zich een driephasendruk had ingesteld. Door de genoemde adsorptie is het echter mogelijk, dat bij verhoogde temperatuur door vrijkomen van gas een gasdruk optreedt zonder dat er ontleding van de verbinding plaats heeft. Daar de transformatie van een deel van de verbinding in ijs en gas niet direct te zien is, bestaat dus de mogelijkheid, dat men drukkingen van tweephasenevenwichten verbinding-gas meet in plaats van driephasenevenwichten. Bij de bepalingen bleek nu, dat bij lagere temperaturen geen overeenstemmende waarden voor den druk werden gevonden (de tweephasencoëxistenties zijn divariant); bij hoogere temperatuur werd de overeenstemming echter zeer goed. Dit moet blijkbaar hierdoor worden verklaard, dat de praeparaten verschillende hoeveelheden zwavelwaterstof geadsorbeerd hadden, die bij verhooging van temperatuur werden losgelaten. Wanneer deze vrijgekomen hoeveelheid gas een druk levert, die hooger is dan de driephasendruk, kan de ontleding van de verbinding niet beginnen. Eerst wanneer door temperatuursverhooging de driephasendruk zóó sterk stijgt, dat deze grooter wordt dan de druk, door het losgelaten geadsorbeerde gas veroorzaakt, treden driephasendrukkingen op. Door de verschillende geadsorbeerde hoeveelheden heeft dit bij de verschillende mengsels bij verschillende temperaturen plaats. Bij geen der proeven bleek de gasadsorptie zóó groot te zijn, dat de bepalingen der driephasendrukkingen daardoor onmogelijk werden gemaakt. Voor de berekeningen werden uit den aard der zaak alleen de goed overeenstemmende waarden in de nabijheid van het quadrupelpunt gebruikt. (Zie §§ 8 en 9).

8. *De driephasenlijn hydraat-ijs-gas.*

In de tabellen 1—3 zijn de resultaten van drie waarnemings-

reeksen vermeld. In de eerste en tweede kolom van elke tabel zijn de temperaturen en de bijbehoorende driephasendrukkingen (in cM.) aangegeven; de laatste zijn op kwik van 0° C. herleid. De derde kolom bevat de voor de dampspanning van ijs gecorrigeerde spanningen, de vierde en vijfde de verschillen in de BRIGG'sche logarithmen van den druk en in de reciproke absolute temperaturen van de opvolgende waarnemingen. De zesde kolom bevat de volgens § 5 berekende waarde van $\frac{Q_1}{2.303\,R}$; daar in § 5 met Neperiaansche, in de tabellen 1—3 met gewone logarithmen werd gewerkt, treedt hier de modulus 2.303 in den noemer op. De laatste kolom geeft de gemiddelde waarden van de laatstgenoemde uitdrukking. De eerste waarde van P in tabel 3 is te hoog; ze heeft waarschijnlijk op het evenwicht

TABEL 1.

t	P	$P(corr)$	$10^2 \Delta \log P$	$10^5 \Delta T^{-1}$	$\frac{Q_1}{2.303\,R}$	*gemiddeld.*
—25.85	22.4	22.35				
			12.929	9.74	1327	
—19.75	30.2	30.1				
			7.894	6.07	1300	
—15.8	36.2	36.1				
			7.747	5.88	1318	
—11.85	43.3	43.15				1327
			7.471	5.63	1327	
— 7.95	51.5	51.25				
			5.598	4.23	1323	
— 4.95	58.6	58.3				
			4.791	3.51	1365	
— 2.4	65.5	65.1				

TABEL 2.

t	P	$P(corr)$	$10^2 \Delta \log P$	$10^5 \Delta T^{-1}$	$\frac{Q_1}{2.303\,R}$	*gemiddeld.*
—21.1	28.0	27.95				
			8.828	6.66	1326	
—16.8	34.35	34.25				
			9.780	7.40	1322	
—11.85	43.05	42.9				
			11.728	8.74	1342	1344
— 5.75	56.5	56.2				
			5.132	3.81	1347	
— 3.0	63.6	63.25				
			3.304	2.39	1382	
— 1.25	68.65	68.25				

TABEL 3.

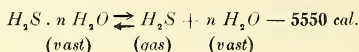
t	P	$P(corr)$	$10^2 \Delta \log P$	$10^5 \Delta T^{-1}$	$\frac{Q_1}{2.303 R}$	*gemiddeld.*
—24.6	[24.9]	24.85				
			10.160	9.27	[1096]	
—18.75	31.5	31.4				
			11.955	8.91	1342	
—12.85	41.5	41.35				1329
			11.309	8.53	1326	
— 6.95	53.9	53.65				
			9.063	6.87	1319	
— 2.0	66.5	66.1				

hydraat-gas betrekking. (zie § 7). Dat de te kleine waarde van Q_1 met deze veronderstelling in overeenstemming is, is gemakkelijk in te zien; het gebied, waar verbinding naast gas coëxisteert, ligt immers t. o. v. de driephasenlijn aan de zijde van hoogeren druk.

Neemt men de gemiddelde waarde uit de drie tabellen, dan blijkt dat de waarde voor $\frac{Q_1}{2.303 R}$ 1333 bedraagt, waaruit voor Q_1 de waarde 6090 volgt.

De uitwendige arbeid bij de transformatie bedraagt RT, omdat bij de omzetting één grammol gas wordt gevormd; bij het quadrupelpunt ($t = -0.4°$; zie § 9) is deze arbeid 541 cal.

De energieverandering bedraagt dus 5550 cal. De transformatie wordt aangegeven door:



$$\underset{(vast)}{H_2S \,.\, n\, H_2O} \rightleftarrows \underset{(gas)}{H_2S} + \underset{(vast)}{n\, H_2O} - 5550 \text{ cal.}$$

9. *De driephasenlijn hydraat-waterige vloeistof-gas.* In de tabellen 4—6 zijn de resultaten vermeld, die verkregen werden met dezelfde praeparaten als die in § 8. In de vijfde kolom is door a aangegeven het aantal volumina H_2S van één atmosfeer (gecorrigeerd op 0°), dat in één volume water oplost. [1]) Hieruit volgt door een eenvoudige berekening onder aanname van de wet van HENRY, dat in één grammol water $1.057.10^{-5}$. aP grammolen zwavelwaterstof oplossen; we hebben dit bedrag door q aangeduid.

In de tabellen geeft b de absolute waarde van $\frac{(1 + r - s)\, \Delta \log P}{\Delta\, T^{-1}}$ 2.303 R. (zie verg. 13) aan; r en s zijn berekend volgens verg. 10a en b, waarin voor n de waarde 6 werd gesubstitueerd.

[1]) LANDOLT—BÖRNSTEIN—ROTH. Tabellen blz. 601. Bepalingen van WINKLER.

TABEL 4.

t	P	P_{H_2O}	P_{H_2S}	a	$10^3 q$	$10^4 \frac{P_{H_2O}}{P_{H_2S}}$	$10^3 r$ $(n=6)$	$10^2 s$ $(n=6)$	rQ_v	sQ_0	$1+r-s$	$10^5 \Delta T^{-1}$	$10^2 \Delta \log P$	b	E_2	$E_2(t=-0.4)$	gemiddeld.
0.85	83.5	0.5	83.0	4.497	3.945	60	5.86	2.37	63	108	0.9822	1.39	4.726	15250	14750	14660	
1.9	93.1	0.55	92.55	4.347	4.253	59	5.75	2.55	62	116	0.9803	1.32	4.135	14020	13530	13380	
2.9	102.4	0.55	101.85	4.210	4.532	54	5.25	2.72	56	124	0.9781	1.31	4.470	15240	14760	14560	
3.9	113.5	0.6	112.9	4.076	4.864	53	5.15	2.92	55	133	0.9760	1.23	4.295	15560	15090	14840	14110
4.85	125.3	0.65	124.65	3.954	5.210	52	5.04	3.13	54	143	0.9737	2.58	8.175	14070	13620	13290	
6.85	151.25	0.75	150.5	3.710	5.902	50	4.82	3.54	52	161	0.9694	2.53	8.488	14820	14390	13950	
8.85	183.9	0.85	183.05	3.485	6.743	46	4.41	4.05	47	185	0.9639						

TABEL 5.

t	P	P_{H_2O}	P_{H_2S}	a	$10^3 q$	$10^4 \frac{P_{H_2O}}{P_{H_2S}}$	$10^3 r$ $(n=6)$	$10^2 s$ $(n=6)$	rQ_v	sQ_0	$1+r-s$	$10^5 \Delta T^{-1}$	$10^2 \Delta \log P$	b	E_2	$E_2(t=-0.4)$	gemiddeld.
−0.05	74.0	0.45	73.55	4.628	3.598	61	5.97	2.16	64	98	0.9844	1.34	4.722	15840	15340	[15290]	
+0.95	82.5	0.5	82.0	4.482	3.885	61	5.96	2.33	64	106	0.9827	2.58	8.701	15120	14630	14510	
2.9	100.8	0.55	100.25	4.210	4.461	55	5.35	2.68	57	122	0.9786	2.61	8.680	14840	14370	14140	14330 (resp. 14570)
4.9	123.1	0.65	122.45	3.948	5.110	53	5.14	3.07	55	140	0.9744	2.57	8.757	15140	14680	14350	
6.9	150.6	0.75	149.85	3.704	5.867	50	4.82	3.52	52	161	0.9696						

TABEL 6.

t	P	P_{H_2O}	P_{H_2S}	a	$10^3 q$	$10^4 \frac{P_{H_2O}}{P_{H_2S}}$	$10^3 r$ $(n=6)$	$10^2 s$ $(n=6)$	rQ_v	sQ_0	$1+r-s$	$10^5 \Delta T^{-1}$	$10^2 \Delta \log P$	b	E_2	$E_2(t=-0.4)$	gemiddeld.
0.97	82.5	0.5	82.0	4.479	3.882	61	5.96	2.33	64	106	0.9827	2.68	8.959	14990	14500	14370	
3.00	101.4	0.55	100.85	4.196	4.473	55	5.35	2.68	57	122	0.9786	2.65	8.913	15010	14540	14310	14370
5.03	124.5	0.65	123.85	3.931	5.146	52	5.04	3.09	54	141	0.9741	2.59	8.867	15210	14760	14420	
7.05	152.7	0.75	151.95	3.686	5.920	49	4.73	3.55	51	162	0.9692						

De gevonden waarden van E_2 kunnen nu dienen om die waarde bij het quadrupelpunt te berekenen.

De ligging van het quadrupelpunt zou gevonden kunnen worden door graphisch het snijpunt te bepalen van de beide driephasenlijnen SS_BG en SL_2G. Met behulp van de in de tabellen 1—6 vermelde gegevens vindt men aldus $t = -0.6 \pm 0.2$; de bijbehoorende druk bedraagt ca. 70 c.M. kwik. Nauwkenriger is de quadrupelpuntstemperatuur echter als volgt te berekenen.

De vloeistof L_2 is onder de omstandigheden van het quadrupelpunt een verdunde oplossing van zwavelwaterstof in water. Duidt men weder door a het aantal volumina H_2S van één atmosfeer (gecorrigeerd op 0°) aan, dat in één volume water oplost, dan is het aantal grammolen H_2S, dat in 100 gram water oplost, $5.87.10^{-5}\,aP$. Was H_2S een niet-electroliet, dan zou derhalve de vriespuntsdaling bedragen $5.87.10^{-5}\,aP.18.5°$. Vult men hierin voor a en P de oplosbaarheid bij $t = -0.6°$ (4.709) en den graphisch gevonden quadrupelpuntsdruk (70) in, dan vindt men een vriespuntsdaling van 0.4°; de quadrupelpuntstemperatuur bedraagt dus —0.4° C. Kiest men voor a de oplosbaarheid bij —0.4°, dan brengt dit in de berekening geen wijziging.

Het feit, dat zwavelwaterstof in water gedeeltelijk electrolytisch gedissocieerd is, brengt in bovenstaande berekening evenmin verandering. De dissociatie-constante van H_2S bedraagt (eerste trap) ongeveer 10^{-7}. De verdunning onder de omstandigheden van het vierphasenevenwicht bedraagt 5.2, de dissociatiegraad dientengevolge ongeveer 7.10^{-4} en de laatste heeft dus geen merkbaren invloed op de ligging van het quadrupelpunt.

Om nu bij deze temperatuur de waarde van E_2 te vinden, moeten de soortelijke warmten van de reageerende stoffen bekend zijn. Daar de moleculaire soortelijke warmte van het hydraat ($n = 6$) volgens de wet van Kopp 61.6 zou bedragen [1]) en de soortelijke warmte van zes molen water en één mol zwavelwaterstof $108 + 6.3 = 114.3$ is, is de algebraïsche som ca. 53. De correctie, benoodigd voor de berekening van E_2 bij het quadrupelpunt is dus 53 $(t + 0.4)$. Het gemiddelde van de aldus gevonden waarden is in de laatste kolom van de tabellen 4—6 vermeld.

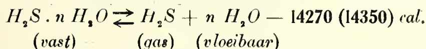
In de tabellen 4 en 5 vertoonen de waarden van de voorlaatste kolom nog merkbare afwijkingen. Dit moet toegeschreven worden aan de kleine temperatuurverschillen tusschen de opvolgende waarnemingen. Om deze verschillen nauwkeuriger te bepalen werd bij

[1]) Nernst. Theoretische Chemie. Gesetz von Dulong und Petit.

de proeven van tabel 6 de ANSCHÜTZ-thermometer (verdeeling in $^1/_5$ graad), die bij de andere bepalingen werd gebruikt, door een BECKMANN-thermometer vervangen (verdeeling in $^1/_{50}$ graad). De overeenstemming van de waarden in de voorlaatste kolom van tabel 6 is dientengevolge veel beter; de gemiddelde waarden van de drie tabellen stemmen goed met elkaar overeen.

Maakt men nu het gemiddelde op van de getallen uit de laatste kolommen van tabel 4—6, dan vindt men, wanneer men de eerste waarde van tabel 5, welke klaarblijkelijk te hoog is (waarschijnlijk doordat de transformatie in het quadrupelpunt nog niet geheel had plaats gehad), uitschakelt, voor E_2 de waarde 14270; telt men de bedoelde waarde wel mede, dan bedraagt het gemiddelde 14350 cal.

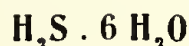
De ontleding van het hydraat heeft dus plaats volgens:



$$H_2S \, . \, n\, H_2O \rightleftarrows H_2S + n\, H_2O - 14270\ (14350)\ cal.$$
$$(vast) \qquad (gas) \qquad (vloeibaar)$$

Een bezwaar, dat tegen bovenstaande berekeningen kan worden aangevoerd, is de keuze van $n = 6$ bij de bepaling van r en s uit verg. 10 a en b en bij de berekening van de algebraïsche som der soortelijke warmten. Wij komen hierop in § 11 terug.

10. Uit de waarden $E_1 = 5550$ cal. (§ 8) en $E_2 = 14270\ (14350)$ cal. (§ 9) volgt volgens verg. $1 : n\, Q = 8720\ (8800)$ cal. en daar $Q = 1440$ cal., volgt voor n de waarde 6.06 (6.11). De conclusie uit deze berekeningen is dus, dat het hydraat de formule heeft



$$H_2S \, . \, 6\, H_2O$$

11. Zooals in § 9 werd vermeld, is bij de berekening reeds $n = 6$ genomen. Een keuze van n was noodig om r en s te kunnen berekenen (verg. 10 a en b) en om de algebraïsche som van de soortelijke warmten te kunnen vinden. Wij zullen dus nog moeten aantoonen, dat $n = 6$ de eenige waarde is, welke aan de waarnemingen voldoet. Het zou immers mogelijk kunnen zijn, dat bij de keuze $n = 5$ ook het resultaat van § 10 merkbaar werd veranderd en met de keuze $n = 5$ zou overeenstemmen. Dit is echter niet het geval. Wij kunnen dit als volgt inzien.

Indien $n = 5$, zou de moleculaire soortelijke warmte van het hydraat 53.0 bedragen en daar de soortelijke warmte van vijf molen water en één mol zwavelwaterstof $90 + 6.3 = 96.3$ is, zou de algebraïsche som ca. 43 zijn.

Berekent men nu onder de aanname $n = 5$ de waarden van r en s en met behulp daarvan de overige getallen, dan blijkt, dat dit geen verandering geeft in het resultaat en dus de aanname $n = 5$

onjuist is. We hebben deze berekening voor de gegevens van tabel 4 uitgevoerd; de resultaten zijn in tabel 4*a* vermeld. De gemiddelde

TABEL 4*a*.

t	$10^3 r$ $(n=5)$	$10^2 s$ $(n=5)$	rQ_v	sQ_0	$1+r-s$	b	E_2	$E_2(t=-0.4)$	gemiddeld.
0.85	5.88	1.97	63	90	0.9862				
						15310	14800	14720	
1.9	5.78	2.13	62	97	0.9845				
						14080	13570	13450	
2.9	5.28	2.27	57	104	0.9826				
						15310	14810	14650	
3.9	5.17	2.43	56	111	0.9809				14210
						15640	15150	14940	
4.85	5.06	2.61	54	119	0.9790				
						14150	13670	13400	
6.85	4.85	2.95	52	135	0.9754				
						14920	14460	14110	
8.85	4.44	3.37	47	154	0.9707				

waarde van de laatste kolom wordt 100 cal. hooger dan het correspondeerende getal van tabel 4. Een verschil van één molecuul water in de samenstelling van het hydraat zou een verschil van 1440 cal. eischen en het verschil ligt bovendien nog in de verkeerde richting. De waarde $n = 5$ voldoet dus niet aan de waarnemingen.

Uit de tabellen 4—6 zal duidelijk zijn, dat de verwaarloozingen in de uitdrukkingen 10 *a* en *b*, waarover in § 6 werd gesproken, toelaatbaar zijn.

12. Wanneer we nu de resultaten van deze indirecte analyse met de vroeger langs directen weg uitgevoerde bepalingen vergelijken, dan blijkt, dat bij het quadrupelpunt de samenstelling van de verbinding aangegeven wordt door $H_2S.6H_2O$, dat echter bij —80°, wanneer de verbinding uit water en overmaat zwavelwaterstof wordt gevormd, door de vaste stof een quantum gas hardnekkig wordt vastgehouden, dat bij een druk van 2 c.M. (waterstraalpomp) in eenige uren nog niet ontwijkt. Bij opwarmen wordt dit gas echter snel losgelaten en veroorzaakt dit laatste, dat bij dampdrukbepalingen bij lage temperaturen tweephasenevenwichten worden gemeten. (Zie § 7).

De vroeger verrichte analyses kunnen door deze gasadsorptie verklaard worden. De hoeveelheid zwavelwaterstof, die daarbij werd vastgehouden, was niet gering. Bedenkt men, dat de samenstelling van de vaste stof lag tusschen $H_2S.5.1H_2O$ en $H_2S.5.5H_2O$, dan blijkt, dat per molecuul $H_2S.6H_2O$ resp. 0.18 en 0.09 mol H_2S geadsorbeerd gebleven zijn. Dat deze hoeveelheden de bovenstaande driephasenbepalingen niet onmogelijk hebben gemaakt, moet hieraan worden toegeschreven, dat bij de vulling van de apparaten herhaaldelijk met vloeibare lucht, dus bij een lageren druk werd leegge-

zogen, de zwavelwaterstof dus gemakkelijker kon ontwijken en de tijd van evacueeren lang werd gekozen.

Bij de directe analyses is leegpompen met vloeibare lucht niet toelaatbaar, daar dan de druk beneden de driephasenspanning SS_BG daalt, m. a. w. het hydraat ontleden kan. Uit de bepalingen van de tabellen 1—3 is door extrapolatie de driephasendruk hydraat-ijs-gas bij —80° te berekenen. Neemt men aan, dat de transformatiewarmte onafhankelijk van de temperatuur is — dat de invloed van de temperatuur klein is, is reeds in § 5 aangetoond —, dan vindt men met behulp van de tabellen 1–3 voor de driephasenlijn SS_BG de vergelijking

$$log\ P = -\frac{1833}{T} + 6{,}7393.$$

Vult men hierin $t = -80°$ C. in, dan blijkt de drukking 7 m.M. te bedragen. In het koolzuur-alcoholmengel is de driephasenspanning dus zeker niet te verwaarloozen. Bij de vulling van de apparaten heeft men dus bij het evacueeren met de kokosnootkool te maken èn met langzaam afnemende adsorptie èn met ontleding van het hydraat. Uit de bovenbeschreven waarnemingen blijkt, dat de tijd van evacueeren gemakkelijk zóó kan worden gekozen, dat men van geen van beide last heeft bij de bepaling van de evenwichtsdrukkingen.

Ontleding van het hydraat moet echter bij de directe analyses worden vermeden. De druk van de waterstraalpomp ligt voldoende hoog boven den driephasendruk, dat men met ontleding geen rekening behoeft te houden; onder deze omstandigheden is echter de adsorptie niet in enkele uren op te heffen. Verbetering is in de directe analysemethode slechts mogelijk door den tijd van evacueeren langer te kiezen. Wij hebben nog een drietal directe analyses op de vroeger beschreven wijze (zie § 1 l. c.) uitgevoerd, waarbij de tijd, gedurende welke het praeparaat met de waterstraalpomp in verbinding bleef, tot 5 (één bepaling) resp. 7 (twee bepalingen) uur werd opgevoerd. Ondanks dit leverden deze bepalingen voor het watergehalte 5.39, 5.46 en 5.61 H_2O. Alleen de laatste waarde valt iets buiten de grenzen 5.1 tot 5.5 van de vroeger verrichte bepalingen (zie § 1). De waarde 6 is dus ook hier nog lang niet bereikt.

De besproken gasadsorptie is dus de oorzaak, dat het zwavelwaterstofhydraat langs directen weg nog niet in zuiveren toestand bereid is en dus ook niet geanalyseerd kan worden, maar dat een indirecte methode, die toegepast kan worden bij temperaturen, waar deze adsorptie is opgeheven, voor deze stof de goede samenstelling oplevert. Bij deze temperaturen is directe analyse echter onmogelijk wegens de groote dissociatiespanning.

Delft—Amsterdam, 22 Maart 1919.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 154*a* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: C. A. CROMMELIN, J. PALACIOS MARTINEZ en H. KAMERLINGH ONNES: *„Isothermen van eenatomige stoffen en hunne binaire mengsels.* XIX. *Isothermen van neon van* $+20°$ *C. tot* $-217°$ *C."*

(Aangeboden in de vergadering van 29 Juni 1918.)

§ 1. *Inleiding.*

Deze mededeeling vormt het vervolg van eene vorige eenigszins voorloopige mededeeling [1]). De bewerking der neon-isothermen is thans zoover gevorderd, dat wij hetgeen hier volgt als een min of meer afgerond geheel kunnen mededeelen. De metingen hebben betrekking op drukkingen tot ongeveer 90 atmospheren en loopen, wat de temperatuur aangaat, van $+20°$ C. tot $-217°$ C.; zij omvatten dus het gebied van kamertemperatuur tot de laagste temperatuur, die met vloeibare zuurstof te bereiken is. Het gebied van $-218°$ C. tot $-246°$ C., dat met behulp van den waterstofdampcryostaat [2]) thans ook voor metingen toegankelijk is, is hier buiten beschouwing gelaten; wij hopen binnenkort onze bepalingen ook tot in dit gebied voort te zetten. Voor de beteekenis van dergelijke bepalingen als thans hier zullen worden medegedeeld, en de toestellen, waarmede de metingen verricht zijn, verwijzen wij naar vroegere mededeelingen over de waterstof- en de argon-isothermen [3]).

Ter wille van de volledigheid en in het belang van eene grootere overzichtelijkheid hebben wij in de tabellen ook opgenomen het materiaal, dat reeds in de aangehaalde mededeeling over neon gepubliceerd is, nl. de series I, II, III, IV, VI, VII, VIII en IX.

§ 2. *De uitkomsten der metingen* zijn samengevat in tabel I; waarin

θ = de temperatuur op de *internationale* [4]) CELSIUS-schaal, d. i. die op de *internationale* KELVIN-schaal verminderd met 273.09;

p = de druk in internationale atmospheren (voor Leiden is 1 internationale atmospheer = 74.9488 cm. kwik);

d_A = de dichtheid, uitgedrukt in de normale dichtheid (0° C. en één atmospheer);

v_A = het volume, uitgedrukt in het normaalvolume (0° C. en één atmospheer).

---

[1]) H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN, Zittingsverslag Juni 1915, Comm. N°. 147*d*.

[2]) H. KAMERLINGH ONNES, Zittingsverslag Febr. 1917, Comm. N°. 151*a*.

[3]) Zie bv. H. KAMERLINGH ONNES en H. H. FRANCIS HYNDMAN, Zittingsversl. Maart 1901, Comm. N°. 69; H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK, Zittingsversl. Dec. 1906, Comm. N°. 97*a*; C. BRAAK, proefschrift, Leiden, 1908; C. A. CROMMELIN, proefschrift, Leiden, 1910.

[4]) Zie H. KAMERLINGH ONNES, Comm. Suppl. N°. 34*a* § 5.

TABEL I.

Serie.	N⁰.	p	d_A	pv_A
		$\theta = + 20°.00$ C.		
VI	1	22.804	21.046	1.0835
VI	2	25.015	23.052	852
VI	3	26.575	24.464	863
VI	4	29.090	26.757	872
VI	5	32.572	29.891	897
VIII	1	34.887	32.002	902
VI	6	35.423	32.447	917
VI	7	37.812	34.601	928
VIII	2	39.168	35.843	928
VIII	3	44.762	40.862	955
VIII	5	54.149	49.213	1003
VIII	6	59.717	54.161	026
VIII	7	65.021	58.797	059
VIII	9	77.360	69.338	131
VIII	10	82.545	73.967	160
VIII	11	88.239	78.886	186
VIII	12	93.298	83.154	220
		$\theta = 0°.00$ C.		
VII	1	22.064	21.869	1.0089
VII	2	23.555	23.314	103
VII	3	25.867	25.558	121
VII	4	28.468	28.089	135
VII	5	30.790	30.345	147
IX	1	39.753	39.098	168
IX	2	44.892	44.030	196
IX	5	59.777	58.234	265
IX	6	66.104	64.135	307
IX	7	74.059	71.495	359
IX	8	79.108	76.127	392
IX	9	84.662	81.347	408

TABEL I (*Vervolg*).

Serie.	N⁰.	p	d_A	pv_A
$\theta = -$ 103°.01 C.				
XV	1	35.558	56.40	0.6304
XV″	1	36.697	58.23	6302
XV	2	40.610	64.21	6324
XV″	2	42.107	66.53	6329
XV″	4	55.136	86.57	6369
XV	4	58.583	91.76	6384
XV	5	78.110	120.52	6481
$\theta = -$ 141°.22 C.				
XVI″	1′	33.840	69.83	0.4846
XVI	2	37.707	77.71	4852
XVI″	2	38.581	79.50	4853
XVI	3	43.319	88.97	4869
XVI″	4	49.881	102.32	4875
XVI	4	51.916	106.42	4878
XVI	5	66.471	134.91	4927
XVI	6	78.558	158.06	4970
$\theta = -$ 182°.60 C.				
X	2	32.067	99.89	0.3210
X″	2	32.988	102.84	3208
X	3	36.438	113.69	3205
X″	3	36.880	115.07	3205
X	4	41.371	129.44	3196
X″	4	42.533	133.15	3194
X	5	49.943	156.61	3189
X″	5	50.514	158.55	3186
X″	6	63.320	199.21	3179

TABEL 1 (*Vervolg*).

Serie.	N⁰.	p	d_A	pv_A
		$\theta = -200^\circ.08$ C.		
XI	1′	26.214	105.10	0.2494
XI	2′	28.402	114.38	2483
XI	3″	31.417	127.24	2469
XI	1	34.268	139.81	2451
XI	4	34.285	139.88	2451
XI	5	39.843	164.30	2425
XI	2	39.891	164.63	2423
XI	3	46.517	194.30	2394
XI	3′	46.529	194.51	2392
XI	6	47.951	200.79	2388
III	1	61.657	263.77	2338
III	2	67.456	291.10	2317
III	3	73.850	320.35	2302
III	4	79.923	348.59	2293
		$\theta = -208^\circ.10$ C.		
XII	1	24.071	111.90	0.2151
XII	3	28.844	136.44	2114
XII	4	31.948	153.00	2088
XII	5	37.856	185.47	2041
XII	6	41.798	207.95	2010
IV	1	58.472	308.32	1897
IV	2	64.451	345.22	1867
IV	3	69.692	377.89	1844
IV	4	74.532	409.18	1822
IV	5	79.228	439.12	1804

TABEL I (*Vervolg*).

Serie.	N⁰.	p	d_A	pv_A
$\theta = -$ 213°.08 C.				
XIII	1	23.086	119.92	0.1925
XIII	2	24.810	129.82	1911
XIII	3	26.673	140.90	1893
XIII	4	29.365	157.70	1862
XIII	5	32.441	177.37	1829
XIII	6	37.418	210.68	1776
II	1	53.896	334.59	1611
II	2	59.769	382.03	1565
II	3	66.271	435.46	1522
II	4	72.858	484.75	1503
II	5	79.698	534.62	1491
$\theta = -$ 217°.52 C.				
XIV	1	21.349	123.40	0.1730
XIV	2	22.997	134.72	1707
XIV	3	24.686	146.67	1683
XIV	4	26.848	162.51	1652
XIV	5	30.042	186.94	1607
XIV	6	32.795	209.68	1564
I	1	49.930	358.51	1393
I	2	53.528	395.62	1353
I	3	59.618	458.40	1301
I	4	64.975	511.85	1269
I	5	71.649	571.69	1253
I	6	79.417	632.23	1256

Eene graphische voorstelling van dit waarnemings-materiaal in het $\frac{pv_A}{T} - d_A$ diagram vindt men op fig. 1.

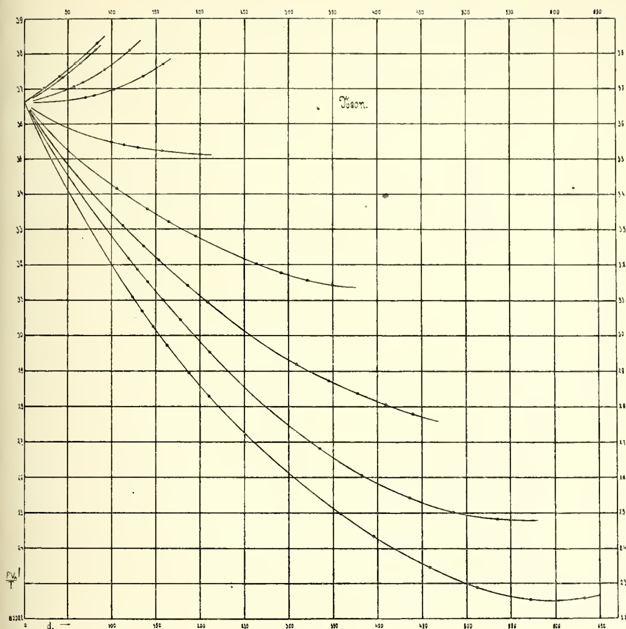


Fig. 1.

§ 3. *Viriaalcoefficienten.*

Uit het zooeven medegedeelde getallen-materiaal konden eenige coefficienten der empirische toestandsvergelijking:

$$pv_A = A_A + B_A d_A + C_A d_A^2 + D_A d_A^4 + E_A d_A^6 + F_A d_A^8 \quad {}^{1})$$

worden berekend. Deze berekeningen hebben alleen betrekking op de coefficienten B_A, C_A, D_A, en in één enkel geval op E_A; immers de bereikte dichtheden zijn niet groot genoeg om de coefficient F_A en in de meeste gevallen ook niet om E_A te berekenen, zoodat deze ontleend werden aan de gereduceerde toestandsvergelijkingen VII. A. 3 [3]) of VII. 1. [2]); de coefficienten $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{F}$ zijn namelijk in deze beide

[1]) H. KAMERLINGH ONNES, Zittingsverslag Juni 1901, Comm. N°. 71.

[2]) Suppl. N°. 19, Mei 1908.

[3]) H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN, Zittingsverslag Juni 1912, Comm. N°. 128.

vergelijkingen identiek. Bij sommige berekeningen werd, zooals uit het vervolg zal blijken, ook D_A, bij andere D_A en C_A aangenomen volgens VII. A. 3. Deze coefficienten werden berekend met de bij eene vorige gelegenheid [1]) gepubliceerde kritische constanten van neon, nl.

$$\theta_k = -228°.35\ C. \qquad p_k = 26.86\ \textit{int. atm.}$$

De berekeningen geschiedden nu op 3 verschillende manieren:

a. voor alle temperaturen werd alleen B_A uit de waarnemingen berekend, de overige coefficienten werden aangenomen, C_A en D_A volgens VII. A. 3, E_A en F_A volgens VII. 1. of VII. A. 3. (wat, zooals boven reeds werd opgemerkt, op hetzelfde neerkomt);

b. voor de laagste 4 temperaturen werden B_A en C_A uit de waarnemingen berekend, verder als onder *a*;

c. voor alle temperaturen werden B_A en C_A, voor —200°,08 C., —208°,10 C. en —213°,08 C. bovendien D_A en voor —217°,52 C. ook nog E_A uit de waarnemingen berekend, verder als onder *a*.

De berekeningen *c* werden het eerst uitgevoerd en hadden ten doel eene zoo mooi mogelijke aansluiting aan de waarnemingen te verkrijgen, zoodat de coefficiënten een zuiver empirisch karakter dragen. Toen het bleek, dat de waarden van C_A, zich niet mooi op eene kromme lieten vereenigen en die van D_A nog veel minder, en het dus duidelijk werd, dat het waarnemingsmateriaal niet voldoende was om C_A en D_A als functie van de temperatuur te berekenen, gingen wij over tot de berekeningen *a* en *b*, waarbij de D_A waarden en gedeeltelijk ook zelfs de C_A waarden werden aangenomen. De aansluiting aan de waarnemingen is bij de berekeningen *a* en *b* natuurlijk belangrijk minder goed dan bij *c*.

De resultaten van deze berekeningen, die alle volgens de methode der kleinste quadraten werden uitgevoerd, vindt men vereenigd in de tabellen II en III. Tabel II geeft de individueele, volgens de verschillende methoden *a*, *b* en *c* uit waarnemingen berekende viriaalcoefficienten, tabel III de uit VII. A. 3 afgeleide coefficienten, benevens de waarden van A_A, berekend uit de vergelijking

$$A_A = A_{A_0}\,(1 + 0{,}0036618\,\theta),\ ^{2})$$

waarbij voor A_{A_0} de reeds gepubliceerde waarde $+$ 0.99986 [3]) ten grondslag werd genomen.

---

[1]) H. Kamerlingh Onnes, C. A. Crommelin en P. G. Cath, Zittingsverslag Febr. 1917, Comm. N⁰. 151*b*.

[2]) Comm. N⁰. 71.

[3]) Comm. N⁰. 147*d*.

TABEL II.

θ	$B_A \times 10^3$	$B_A \times 10^3$	$C_A \times 10^6$
	Volgens *a*.	Volgens *b*.	
+ 20°.00	+ 0.54880		
0°.00	47148		
— 103°.01	16653		
— 141°.22	055249		
— 182°.60	— 0.093113		
— 200°.08	15746	— 0.18779	+ 0.21531
— 208°.10	19553	21706	18307
— 213°.08	22305	24084	18407
— 217°.52	24028	25880	19649

TABEL II (*Vervolg*).

θ	$B_A \times 10^3$	$C_A \times 10^6$	$D_A \times 10^{12}$	$E_A \times 10^{18}$
	Volgens *c*.			
+ 20°.00	+ 0.51578	+ 0.82778		
0°.00	41334	1.1538		
— 103°.01	069193	1.1515		
— 141°.22	— 0.025378	0.71945		
— 182°.60	13435	33607		
— 200°.08	19667	27847	— 0.24096	
— 208°.10	22926	25304	0.16102	
— 213°.08	24625	21123	0.005848	
— 217°.52	29313	36427	0.46739	+ 0.57517

TABEL III.

θ	A_A	$C_A \times 10^6$	$D_A \times 10^{12}$	$E_A \times 10^{18}$	$F_A \times 10^{27}$
		Volgens VII. A. 3.			
+ 20°.00	+ 1.0731	+ 0.29747			
0.00	0.99986	25440			
— 103°.01	62271	0.072156	+ 0.37445	— 0.1373	+ 40.29
— 141°.22	48281	39576	28409	0.03754	12.51
— 182°.60	33131	58524	12718	2409	— 4.190
— 200°.08	26731	96581	11124	4293	5.666
— 208°.10	23795	0.12219	0.081145	+ 0.04550	5.367
— 213°.08	21971	14073	60843	4599	4.836
— 217°.52	20345	15882	41215	4576	4.160

§ 4. *Discussie en vergelijking met andere waarnemingen.*

De verschillen tusschen de uit deze vergelijkingen berekende en de waargenomen pv_A-waarden zijn op fig. 2 graphisch voorgesteld als functies van de dichtheden d_A, en wel in dier voege, dat als ordinaten zijn uitgezet de waargenomen pv_A-waarden minus de berekende pv_A-waarden, uitgedrukt in procenten van de laatstgenoemde waarden.

De voorstelling der afwijkingen is aldus gemakkelijker en overzichtelijker, dan wanneer het getallen-materiaal in de tabellen ingevoegd was geworden.

De aansluiting van de nieuwe en de oude series is over 't algemeen zeer bevredigend; bij de isothermen van —217°.52 C. laat zij echter duidelijk te wenschen over. Terwijl het bij de isothermen van —200°.08 C. nog gelukt is de afwijkingen der waarnemingsgrootheden van de best aansluitende formule (rekening *c*) binnen 0.1 °/₀ te houden, komen bij —217°.52 C. zelfs afwijkingen van bijna ½ °/₀ voor.

De afwijkingen der verschillende stellen van B_A-waarden uit deze mededeeling van de vereffende B_A-waarden volgens VII. A. 3, n.l. $\triangle B_A = B_A$ (berekend) — B_A (VII. A. 3)), zijn weergegeven op fig. 3, waarop ook voorkomen de betreffende afwijkingen der B_A-waarden, die door CATH en een van ons verkregen zijn [1]) uit metingen bij lage drukken.

[1]) P. G CATH en H. KAMERLINGH ONNES, Comm. N⁰. 152*c*, aangeboden voor de Zittingsverslagen, waarin deze mededeeling weldra zal verschijnen; voorloopige waarden in: P. G. CATH, Proefschrift. Leiden 1917, p. 77.


a — b ---- c -·-· Neon.
-237°.32
-233°.08
-208°.50
-200°.08
-182°.60
-145°.22
-103°.03
0°.00
+20°.00
d_A →

Fig. 2

Wij merken op, dat de B_A-waarden volgens *a* vrij goed overeen-

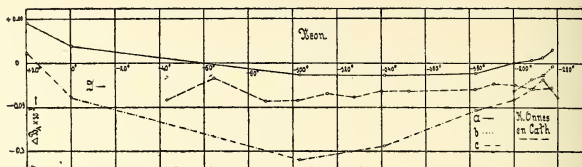


Fig. 3.

komen met die volgens VII. A. 3. Die volgens *c* wijken van de laatste, zooals ook te verwachten was, aanmerkelijk meer af; vooral bij de lagere temperaturen geven zij veel kleinere waarden te zien.

Sterrekunde. — De Heer DE SITTER biedt een mededeeling van Dr. A. PANNEKOEK: „*Onderzoek van een melkwegvlek in Aquila.*"

(Mede aangeboden door den Heer J. C. KAPTEYN).

In een mededeeling aan de Vergadering van de Kon. A. v. W. van 8 Dec. 1911 werd een methode geschetst, om met behulp van eenige photographische opnamen gegevens te krijgen omtrent de toename van de sterdichtheid bij afnemende grenshelderheid. Daar werd reeds vermeld, dat Prof. HERTZSPRUNG te Potsdam met het daar aanwezige Zeisstriplet eenige platen had opgenomen (van de melkwegvlek N.W. van γ Aquilae) om de methode op de proef te kunnen stellen. Door verschillende omstandigheden kon de definitieve bewerking van deze platen eerst voor korten tijd afgesloten worden.

De platen zijn 20 × 20 cM., het centrum ligt bij χ Aquilae, en het opgenomen gebied is 6° lang en breed. De platen, die onmiddellijk voor het doel gebruikt zijn, zijn:

Nr. 328	2 Sept. 1910	Expos. 600, 600, 190, 60, 19, 6, 2 sec.		(plaat *A*)
Nr. 329	2 Sept. 1910	Expos. 1900, 1900 sec.		(plaat *B*)
Nr. 1260	24 Aug. 1911	Expos. 40^m,	Halbgitter Noord	(plaat C_1)
Nr. 1261	24 Aug. 1911	Expos. 45^m,	Halbgitter Zuid	(plaat C_2)

Voor het aftellen van de platen *A* en *B* was niet een net op de platen zelf afgedrukt. maar was op een afzonderlijke glasplaat een net gephotographeerd van $6^2/_3$ mm. interval; deze netplaat werd gedurende het tellen op de telplaten geklemd.

1. *De tellingen.* Op plaat *A* werden in elk hokje geteld de aantallen sterren met slechts 2 gelijke beelden, met bovendien een 3de beeld (190^s exp.), met 4 beelden (dus voor 60^s nog een zichtbaar beeld), met 5 en met 6 beelden. De grenshelderheden verschillen ongeveer 1 grootteklasse en bedroegen naar eenige voorloopige vergelijkingen met een poolopname 13,0 . . . . 9,0. De onzekerheid en de subjectieve opvattingsverschillen, die gewoonlijk bij het tellen van sterren voorkomen, doordat de zwakste sterbeeldjes niet van toevallige vlekjes in de plaat zijn te onderscheiden, vallen hier grootendeels weg, omdat elke ster twee gelijke beeldjes op bekenden afstand moet vertoonen, of het zwakke beeldje zich op een bekende plaats naast helderder beelden moet vertoonen. Toch is daardoor bij het tellen de onzekerheid niet geheel verdwenen; op plaat *B* zijn sommige

TABEL I. Aantallen sterren.

		I									
	121 35 18 1 1 0	98 36 15 5 2 0	123 44 19 8 5 1	97 27 17 7 5 1	83 24 11 5 1 0	113 44 17 7 0 0	100 33 18 7 2 0	112 46 27 11 3 1	127 51 22 13 6 2	118 34 15 9 1 0	
	135 40 17 7 1 0	88 34 14 3 1 0	64 28 17 8 3 0	96 38 13 6 4 0	101 36 13 5 2 2	96 28 13 5 1 0	84 24 12 8 5 2	107 46 14 6 4 2	85 31 20 5 2 0	94 37 13 2 1 0	
	83 27 14 6 2 0	96 33 15 6 1 1	97 27 12 5 4 0	123 36 20 7 3 0	115 40 16 8 3 2	91 28 15 6 4 1	90 34 20 11 5 1	90 35 21 7 5 2	77 26 13 7 3 1	111 44 21 8 1 0	
III	76 25 13 4 0 0	76 23 12 4 1 0	102 49 25 8 5 2	105 32 14 6 2 1	77 35 19 8 3 1	87 49 19 8 3 1	95 35 15 6 0 0	120 35 14 6 1 0	144 47 16 5 0 0	117 53 25 13 4 1	II
	52 27 18 8 3 0	87 30 12 4 2 0	76 23 9 3 0 0	94 44 19 8 2 1	59 30 18 10 4 3	69 30 13 7 1 0	92 34 21 8 6 1	103 40 18 8 4 1	97 46 21 12 3 1	127 39 18 9 5 0	
	52 18 9 3 1 0	78 25 8 4 2 0	92 IV 31 9 3 2 0	72 22 10 5 1 0	84 33 19 6 1 0	82 39 20 7 2 1	111 32 17 7 3 2	110 33 21 5 2 0	84 34 16 6 2 0	118 40 11 3 0 0	
	55 13 8 3 2 0	73 21 11 2 1 0	88 30 10 4 1 0	55 16 4 1 0 0	58 21 13 7 3 0	99 35 16 9 5 2	95 49 25 10 4 1	117 41 15 5 2 0	106 55 24 9 4 2	88 36 17 8 2 1	
	45 20 9 6 2 1	52 25 10 2 1 0	54 25 12 5 2 0	19 12 6 0 0 0	28 10 5 0 0 0	72 24 12 6 3 0	89 29 15 5 3 0	88 34 20 6 2 0	87 32 10 2 1 0	94 27 12 3 2 1	
	53 16 9 3 3 2	51 10 6 3 2 2	38 10 6 5 1 0	38 9 5 2 1 0	21 5 2 0 0 0	29 9 5 1 1 0	84 26 14 8 2 2	63 35 16 9 5 0	61 33 15 7 4 1	71 30 14 6 5 2	IV
V	39 19 12 1 0 0	24 13 8 2 1 0	35 8 6 4 1 0	53 15 8 2 0 0	34 11 6 3 2 1	39 15 10 4 2 1	39 18 8 1 1 0	60 30 15 8 2 0	46 20 14 5 2 1	61 31 17 9 3 0	

dichte melkwegstreken als het ware fijn gespikkeld met nauwlijks merkbare vlekjes, waarbij het vaak willekeurig schijnt, welke en hoeveel men, door ze twee aan twee als bijeenbehoorend te beschouwen, als sterren kan meetellen. Bij de beoordeeling, of naast de helderder beelden een nauwlijks zichtbaar 3[de] of 4[de] beeld aanwezig is, was de subjectieve zekerheid aanmerkelijk grooter.

Bij de heldere sterren trad een andere onzekerheid op. Soms kwam het voor, dat van een ster, die in de groote beelden beslist zwakker was dan een andere, toch meer zwakke beelden zichtbaar waren, doordat de zwakste beelden bij haar klein en scherp, bij de andere groot en flauw waren. De oorzaak daarvan ligt in de eigenaardige achromatiseering van het Zeisstriplet[1]), waardoor de gele sterren groot en wazig, de witte sterren scherp en klein zijn. Deze omstandigheid, die misschien bruikbaar is voor de kleurbepaling van zulke zwakke sterren, was bij deze tellingen hinderlijk; als regel werd getracht alleen de zichtbaarheid van het zwakste beeld tot maatstaf van de indeeling te nemen.

Het afgetelde gebied omvat 100 hokjes (in R.Kl. van —7 tot +3, in decl. van +5 tot —5). Het centrum van de plaat ligt op 279°30′ + 11°30′; de zijde van elk hokje is 15′,28, dus het oppervlak 0,0649 = $^1/_{15.41}$ vierkante graden. De hoekpunten van het onderzochte gebied liggen op

277°40′6 + 12°44′,8; 277°41′,6 + 10°12′,4; 280°17′,0 + 12°46′,3;
280°16′,5 + 10°13′,6.

De tellingen zijn verricht met het mikroskoop van het Repsoldtoestel voor rechthoekige coördinaten op de sterrewacht te Leiden, dat daartoe van het zwakste oculair werd voorzien; de vergrooting was 10 maal, eigenlijk nog iets te sterk voor dit doel. De uitkomsten der tellingen zijn in Tabel I samengesteld; in elk hokje bevinden zich achtereenvolgens het aantal op plaat *B*, het aantal op plaat *A*, de aantallen op *A* met minstens 3 en 4 beelden, en de aantallen op *A* met minstens 5 en 6 beelden.

2. *De helderheidsschaal.* Om de grenshelderheden te vinden, waarvoor deze aantallen gelden, moest de grootte van een aantal sterren bepaald worden. Dit gedeelte van het onderzoek gaf de grootste moeilijkheden, omdat het met eenigszins primitieve hulpmiddelen moest worden uitgevoerd. Een vergelijkingsschaal werd

---

[1]) De brandpuntsafstand is minimum voor 394 $\mu\mu$ (HERTZSPRUNG A. N. 4951. Bd. **207**. 88).

gevormd door een stukje uit een opname van Coma Berenices te snijden, waarop naast elkaar exposities van 12, 15, 19, 24, 30, 38, 48, 60, 76, 95 en 120 voorkomen, dus van elke ster 11 beelden, die $0^m,2$ in helderheid opklimmen. Door dit plaatje achter tegen de plaat *A* of *B* te drukken, film tegen film, en met een 5 maal vergrootend oculair de beelden te vergelijken, kon elke ster op *A* of *B* door schatting tusschen de termen van de schaal ingevoegd worden. De getallen van de schaalwaarden zijn ongeveer de grootten van sterren, die dezelfde beelden op plaat *B* zouden hebben.

Met behulp van deze schaal werd in een aantal gelijkmatig verspreide hokjes van alle duidelijk zichtbare sterren op plaat *B* de helderheid bepaald, en evenzoo op *A* van alle goed zichtbare en meetbare beelden. Daaruit zijn de helderheidsverschillen tusschen de verschillende exposities te vinden, uitgedrukt in de voorloopige schaal. Om de eenheid van deze voorloopige schaal in de absolute schaal der grootteklassen uit te drukken, werden op de beide platen *C* twee strooken, Noord en Zuid, uitgemeten, zoo, dat elke strook op de eene plaat geheel door het Halbgitter bedekt, op de andere geheel vrij was. Door hieruit het verschil in helderheid der beelden met en zonder Halbgitter in de voorlooige schaal af te leiden en te vergelijken met de bekende absorbtiecoefficient van het Gitter, vindt men de reductie op absolute schaal. Uit eenige bekende heldere sterren is dan de absolute grootte te vinden.

Bij de uitvoering en herleiding der metingen, bleek dat bij de heldere sterren met groote beelden tusschen de verschillende platen systematische verschillen bestonden, die het ongewenscht maakten, deze verder te gebruiken. Bij de zwakkere sterren van de schaal traden andere fouten op. De zwakste beelden vertoonden zich als eenigszins onregelmatige vlekjes, die ook niet steeds $0^m,2$ in grootte verschilden. De oorzaak kan deels in plaatselijke variaties van gevoeligheid en niet geheel regelmatige verdeeling van de zilverkorrels liggen, die het uiterlijk van deze kleine flauwe vlekjes beïnvloeden, deels in het toevallig samenvallen van beelden van andere onzichtbare sterren met schaalbeelden. Het bleek daarom noodig, van alle beelden der dikwijls gebruikte sterren de grootte afzonderlijk te bepalen. Dit werd gedaan, door ze tusschen de beelden op een poolplaat in te schatten, die ook met een theoretisch interval van $0^m,2$ op elkaar volgden; doordat elk schaalbeeld in meerdere poolsterreeksen ingevoegd werd, gingen de fouten van deze reeksen slechts zeer verzwakt in de grootten van de schaal over. Zoo werd gevonden voor de grootte van het zwakste (0) tot het sterkste beeld (10) van de sterren *w*, *s* en *r*:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w	onzichtbaar				14,4	14,15	14,0	13,8	13,6	13,4	13,2
s	14,2	14,05	13,9	13,85	13,45	13,15	13,0	12,85	12,7	12,4	12,25
r	13,25	13,0	12,8	12,5	12,25	11,9	11,75	11,75	11,5	11,35	11,15

Deze waarden werden gebruikt om de grootte van de sterbeelden in de behandelde hokjes op plaat *B* en *A* af te leiden; de kortere exposities geven kleinere, ongeveer met 1^m afdalende helderheden, waaruit het grootteverschil van de opeenvolgende exposities B, A_1, A_2, A_3, enz. te vinden is. Rangschikt men deze verschillen naar de helderheid, dan vindt men:

B	A_1	B-A_1	Gecorr.	A_1	A_2	A_1-A_2	Gecorr.
11,40	12,32	0.92(18)	0.98	11,46	12,40	0,94(5)	1,01
11,88	12,76	0,88(17)	0,96	11,85	12,81	0,96(11)	1,04
12,41	13,35	0,94(30)	0,91	12,30	13,49	1,19(17)	1,15
12,70	13,84	1,14(18)	1,00	12,76	13,95	1,19(17)	1,03
			0,95(83)				1,07(50)

A_2	A_3	A_2-A_3	Gecorr.
12,28	13,35	1,07(8)	1.05
12,81	14,02	1,21(11)	1,04
			1,04(19)

De verschillen tusschen deze uitkomsten zijn niet enkel toevallig; dat bij alle de laatste waarde het grootst is, bewijst, dat de schaal nog eenigszins verloopt. Door opeenvolgende benaderingen werd als afwijking van een gelijkmatig loopende schaal gevonden:

11,42—12,32	—0,06	12,36—13,35	+0,03
11,87—12,73	—0,10	12,75—13,86	+0,15

Hieraan wordt voldaan door de volgende correcties aan de schaal aan te brengen:

11,2—11,8	0	13,0	+ 0,07
12,0	+ 0,02	13,2	+ 05
12,2	+ 04	13,4	+ 03
12,4	+ 07	13,6	00
12,6	+ 08	13,8	— 04
12,8	+ 09	14,0	— 08

Door deze correcties aan te brengen, vindt men voor het helderheidsverschil $B—A_1 = 0,95$; $A_1—A_2 = 1,07$; $A_2—A_3 = 1,04$. Voor de kortere exposities konden alleen de helderder sterren gebruikt worden; zij gaven als resultaat $A_3—A_4 = 1,16$ (7); $A_4—A_5 = 1,09$ (14). De middelbare fout van 1 helderheidsbepaling is $0^m,14$.

Met deze zelfde schaal werden ook een aantal sterren in de N.

en de Z.-strook op de Halbgitterplaten C_1 en C_2 vergeleken. Daarbij werd gevonden:

$$\text{Z.-strook: gewoon beeld } C_1 - \text{verzwakt beeld } C_2 = = 13{,}78-11{,}63 = 2{,}15 \ (75)$$

$$\text{N.-strook: gewoon beeld } C_2 - \text{verzwakt beeld } C_1 = = 13{,}78-11{,}48 = 2{,}30 \ (38)$$

Hieruit volgt voor de absorbtie van het Halbgitter in eenheden van de voorloopige schaal 2,22. In absolute maat van grootteklassen werd voor deze absorbtie te Potsdam, volgens opgave van Prof. HERTZSPRUNG, gevonden 1,963 grkl. Dus moeten alle hier afgeleide intervallen met den factor 0,884 vermenigvuldigd worden, om ze in grootteklassen uit te drukken (d.w.z. een 10 × grootere expositie geeft een winst van 1,77 grkl.). Ze worden dan

$$B - A_1 = 0^m{,}84\,;\ A_1 - A_2 = 0^m{,}95\,;\ A_2 - A_3 = 0^m{,}92\,;$$
$$A_3 - A_4 = 1^m{,}02\,;\ A_4 - A_5 = 0^m{,}96.$$

Om ook de grootten zelf in absolute maat te kunnen uitdrukken, werden 16 meest heldere sterren gebruikt, die in de Göttinger Aktinometrie voorkomen; uit de helderheid van hun 5de en 6de beeld werd gevonden:

$$m - 11{,}55 = 0{,}884\ (\text{voorl. } m - 11{,}55).$$

3. *De grenshelderheden.* De verschillen in grenshelderheid zullen gelijk zijn aan de hier gevonden verschillen in helderheid van dezelfde sterren bij verschillende exposities, wanneer de waarnemingsomstandigheden volkomen identiek zijn. Maar deze zijn niet identiek. Bij de opnamen B en A_1 vertoont elke ster twee gelijke beelden; men telt dus alle dubbele beelden, die nog juist zichtbaar zijn. Bij de opnamen A_2 A_3 A_4 en A_5 daarentegen moet men een zwak, nog juist zichtbaar beeldje zoeken, dat zich op een bekende plaats naast helderder beelden bevindt. Is de kans, dat een sterbeeld in de buurt van de zichtbaarheidsgrens door de fluctuaties in de omstandigheden nog juist zichtbaar is $= a$, dan is de kans, dat twee gelijke beelden beide zichtbaar zijn $= a^2$; dus in dit geval blijven meer sterren onzichtbaar. Bij tellingen als op B en A_1 zal dus systematisch minder geteld worden dan op de wijze, bij A_2 enz. gebruikt. Voor het verschil in grenshelderheid A_1—A_2 zal dus niet het boven gevonden verschil in helderheid gebruikt mogen worden.

Om het te vinden, waren reeds bij de telling van plaat A van die hokjes, waarin later van alle duidelijk zichtbare sterren de grootte zou worden bepaald, kaartjes geteekend met aanduiding van alle sterren, die 2, 3, 4, 5 en 6 beelden toonden. Men zoekt nu op, welke grootte, gemeten op B, de grens vormt tusschen de sterren,

die op A onzichtbaar, en die welke zichtbaar zijn; dit is de grenshelderheid voor A_1. Evenzoo welke grootte de grens vormt tusschen de sterren met 2 en met 3 beelden op A; dit is de grenshelderheid voor A_2. Uit het eerste volgt, met het verschil B-A_1, de grenshelderheid voor B; uit het tweede op dezelfde wijze de grenshelderheid voor A_3, A_4 en A_5.

TABEL II.

m	n_1	n_2	n_1^0	n_2^0	p_2	s_2	s_1	m	n_2	n_3	n_2^0	n_3^0	p_2	s_3	s_2
14.5	2		2					13.2	6		12		100		
14.45	0		6					13.15	5		21		100		
14.4	4		5		0			13.1	10		24		100		
14.35	1		5	1	17			13.05	9		27	1	96		
						1								1	
14.3	0	1	6	2	25			13.0	8	1	31	5	86		
						3								6	
14.25	5	1	8	3	27			12.95	14	4	27	7	79		
						6								13	
14.2	3	1	13	2	13			12.90	5	2	26	8	76		
						8								21	
14.15	5	0	16	1	6			12.85	7	2	15	5	75		
						9								26	112
14.1	8	0	24	0	0			12.8	3	1	16	4	80		
						9								30	96
14.05	11	0	36	3	8			12.75	6	1	14	4	78		
						12								34	82
14.0	17	3	38	9	19			12.7	5	2	17	7	71		
						21								41	65
13.95	10	6	48	18	27			12.65	6	4	13	12	52		
						39								53	52
13.9	21	9	37	17	32			12.6	2	6	11	12	48		
						56	171							65	41
13.85	6	2	29	12	29			12.55	3	2	6	9	40		
						68	142							74	35
13.8	2	1	21	13	38			12.5	1	1	8	7	53		
						81	121							81	27
13.75	13	10	18	11	38			12.45	4	4	6	5	55		
						92	103							86	21
13.7	3	0	30	27	47			12.4	1	0	8	8	50		
						119	73							94	13
13.65	14	17	19	20	51			12.35	3	4	5	13	28		
						139	54							107	8
13.6	2	3	21	30	59			12.3	1	9	5	17	23		
						169	33								3
13.55	5	10	9	13	59			12.25	1	4	2	14	12		
							24								1
13.5	2	0	9	26	74			12.2		1	1	15	6		
							15								
13.45	2	16	4	17	81			12.15		10		16	0		
							11								
13.4	0	1	3	21	88			12.1		5		15	0		
							8								
13.35	1	4	3	16	84			12.05		0		5			
							5								
13.3	2	11	3	16	84			12.0		0					
							2								
13.25		1	2	18	90										

In de toepassing bleek deze methode nog zeer bezwaarlijk, omdat de grootten van de op A zichtbare en de onzichtbare sterren, evenzoo die van de sterren met 2 en met 3 beelden, ver over elkaar heengrijpen en bovendien nog onregelmatig verdeeld zijn. Is m_1 de gemeten grootte op B, die van de ware grootte m door ongelijkheden van de plaat en meetfouten afwijkt; is de eveneens van m afwijkende helderheid op de telplaat m_2, dan zal de ster zichtbaar of onzichtbaar zijn, al naar $m_2 < $ of $> m_0$, de grenshelderheid is. Volgen nu de afwijkingen $m_1 - m$ en $m_2 - m$ de foutenwet, en zijn de sterren over de verschillende helderheden gelijkmatig verdeeld, dan heeft men twee criteria ter bepaling van m_0:

1°. voor $m_1 \gtrless m_0$ is het aantal onzichtbare sterren $\gtrless$ het aantal zichtbare; dus m_0 is die waarde van m_1, waarvoor 50 °/₀ van de sterren zichtbaar, 50 °/₀ onzichtbaar is;

2°. voor $m_1 \gtrless m_0$ is het totale aantal helderder onzichtbare sterren $\gtrless$ het totale aantal zwakkere zichtbare sterren; dus is m_0 die waarde van m_1 waarboven evenveel zichtbare sterren voorkomen, als er onzichtbare beneden voorkomen.

Nu neemt het aantal sterren voor grooter m toe; daardoor zal de gemiddelde m die met een gemeten m_1 correspondeert, wat grooter zijn dan deze; en de naar het 1ste criterium gevonden grenshelderheid m_0 heeft een positieve correctie noodig, die echter door de afwijkingen m_2-m wat verkleind wordt. Daarentegen wordt de grenshelderheid m_0 naar het 2de criterium juist gevonden, wanneer het aantal sterren een lineaire functie van de grootte m is [1]. En wanneer deze functie en de nauwkeurigheidsmodulus voor 1m uiteenliggende grootten als gelijk te beschouwen zijn, is bij het

[1] Men kan dit op de volgende wijze aantoonen. Het aantal sterren van werkelijke grootte m, dat op de eene plaat in de grootte m_1 gemeten wordt, en evenzoo het aantal, dat op de andere plaat de grootte m_2 vertoont, is resp.

$$f(m) \exp. (-h_1^2 (m_1 - m)^2)\, dm\, dm_1 \qquad \text{en} \qquad f(m) \exp. (-h_2^2 (m_2 - m_1)^2) dm\, dm_2$$

waarin $f(m)$ het aantal sterren van de grootte m voorstelt; deze $f(m)$ heeft den vorm $a + bm$.

Hieruit vindt men, wanneer men stelt:

$$\frac{h_1^2\, m_1 + h_2^2\, m_2}{h_1^2 + h_2^2} = m_3 \qquad \frac{h_1^2\, h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = h^2$$

voor het aantal sterren, dat op de eene plaat de grootte m_1, op de andere m_2 heeft

$$f(m_3) \exp. (-h^2 (m_1 - m_2)^2)\, dm_1\, dm_2.$$

Is m_0 de grenshelderheid, zoodat $m_2 \gtrless m_0$ onzichtbaarheid of zichtbaarheid be-

1ste criterium de correctie voor beide grenshelderheden even groot, dus het helderheidsverschil A_1-A_2 wordt ook op die wijze correct gevonden.

In tabel II bevinden zich in de 2de en 3de kolom de aantallen sterren met 0, met 2, met 3 beelden (n_1 n_2 n_3). Om de zeer groote toevallige ongelijkmatigheden van deze aantallen te vereffenen, zijn in de volgende kolommen de sommen van telkens 3 opeenvolgende getallen geplaatst (n_1^0 n_2^0 n_3^0). In de kolom p_2 staat, hoeveel procent n_2^0 van het totaal uitmaakt; waar dit in het stijgen 50 °/₀ bedraagt, ligt de grens tusschen onzichtbaarheid en twee beelden; waar dit in het dalen 50 °/₀ bedraagt, ligt de grens tusschen twee en drie beelden, volgens het 1ste criterium. Daarnaast bevinden zich de sommen s van de zwakkere zichtbare en de helderder onzichtbare sterren; waar deze gelijk worden, ligt volgens het 2de criterium de grenshelderheid.

Uit de waarden p_2 vindt men als grenshelderheden 13,67 en 12,54; hieraan moeten nog de correcties van blz 1331 worden aangebracht, en dan worden ze 13,65 en 12,62. Uit het 2de criterium vindt men evenzoo 13,72 en 12,63, of gecorrigeerd 13,70 en 12,71. Het verschil van deze grenshelderheden A_1 en A_2 is volgens het eerste criterium 1,03, volgens het 2de 0,99; het is dus wel kleiner dan het helderheidsverschil 1,07, maar verschilt daarvan toch minder,

---

teekent, dan is het aantal onzichtbare en het aantal zichtbare sterren van de grootte m_1 gegeven door

$$dm_1 \int_{m_0}^{\infty} f(m_2) \exp.(-h^2(m_1-m_2)^2)\, dm_2 \quad \text{en} \quad dm_1 \int_{-\infty}^{m_0} f(m_2) \exp.(-h^2(m_1-m_2)^2) dm_2.$$

Voor $m_1 = m_0$ zijn deze beide niet gelijk, door den factor $f(m) = a + b \dfrac{h_1^2 m_1 + h_2^2 m_2}{h_1^2 + h_2^2}$.

Het aantal heldere onzichtbare sterren, die dus $m_1 < m_0$, $m_2 > m_0$ hebben, en het aantal zwakke zichtbare sterren, die $m_1 > m_0$ en $m_2 < m_0$ hebben, is

$$\int_{-\infty}^{m_0} dm_1 \int_{m_0}^{+\infty} dm_2\, f(m_2) \exp.(-h^2(m_1 - m_2)^2)$$

en

$$\int_{m_0}^{\infty} dm_1 \int_{-\infty}^{m_0} dm_2\, f(m_2) \exp.(-h^2(m_1 - m_2)).$$

Deze beide dubbelintegralen zijn, daar m_1 en m_2 hier volkomen verwisselbaar zijn, aan elkaar gelijk.

dan te verwachten was. De goede overeenstemming van deze twee waarden is geen maat voor hun zekerheid, daar zij uit hetzelfde materiaal volgens verwante methoden zijn gevonden. Het onregelmatig verloop van het materiaal zelf, de getallen n_1° n_2° n_3° maakt het twijfelachtig of de gevonden waarde wel tot op 0,1 zeker is. Nemen wij het gemiddelde 1,01 aan, en voor A_1 en A_2 zelf 13,71 en 12,70, dan vinden wij voor alle grenshelderheden (alles in de voorloopige schaal):

B 14,66; A_1 13,71; A_2 12,70; A_3 11,66; A_4 10,50; A_5 9,41.

Herleid tot werkelijke grootteklassen wordt dus de grenshelderheid:

B 14,30; A_1 13,46; A_2 12,57; A_3 11,65; A_4 10,62; A_5 9,66

en de verschillen in de grenshelderheid worden:

0,84 0,89 0,92 1,03 0,96 gr.kl.

4. *Uitkomsten.* In het onderzochte vierkant zijn de sterren niet gelijkmatig verdeeld. De grootste dichtheid vindt men aan de N.zijde en de W.zijde; het is alsof twee sterwolken, een van boven en een van rechts in dit gebied reiken, gescheiden door een eenigszins minder dicht gebied, dat zich naar het Z.O. uitstrekt. Onderaan ligt een eenigszins driehoekig zeer ijl gebied. Hierin bevindt zich, als een soort kern, de driearmige leegte, die zich op de melkwegphoto's van MAX WOLF en BARNARD als een zwarte plek of opening vertoont [1]). Verdeelt men nu het veld in 5 even groote gebieden, ieder van 20 hokjes (waarvan de grenzen in Tabel I door dikkere lijnen zijn aangegeven), zoo, dat I en II de dichtste streken, III en IV de overgangsgebieden en V het ijlste deel omvat, dan vindt men voor de steraantallen:

	I	II	III	IV	V	Totaal	log N	m	$\frac{d \log N}{dm}$
B	2169	2100	1571	1513	801	8154	3.099	14.30	
									0.52
A_1	746	787	601	584	279	2997	2.665	13.46	
									0.36
A_2	336	360	297	283	145	1421	2.341	12.57	
									0.43
A_3	136	142	127	116	48	569	1.943	11.65	
									0.39
A_4	55	51	49	47	22	224	1.538	10.62	
									0.63
A_5	14	13	12	9	7	55	0.928	9.66	

De hieruit volgende waarden voor *log N*, het aantal per vierkante graad, en voor den gradient, vindt men voor het geheele vierkant

[1]) Men vergelijke b.v. MAX WOLF, Die Milchstrasse, Fig. 33 en 34.

in de laatste kolommen, voor de vijf kleine gebieden in de volgende lijst.

log N					$\frac{d \log N}{dm}$				
I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
3.22	3.21	3.08	3.07	2.79					
					0.55	0.51	0.49	0.50	0.55
2.76	2.78	2.67	2.65	2.33					
					0.39	0.37	0.35	0.35	0.32
2.41	2.44	2.36	2.34	2.05					
					0.41	0.42	0.39	0.41	0.52
2.02	2.04	1.99	1.95	1.57					
					0.38	0.44	0.40	0.38	0.33
1.63	1.59	1.58	1.56	1.23					

De gradiënten voor het geheele gebied vertoonen eenige onregelmatigheden. De verschillen tusschen de 3 laatste waarden kunnen aan toevallige ongelijkmatigheden en fouten toegeschreven worden; maar niet de beide eerste. Dat blijkt daaruit, dat in alle vijf gebieden de 2[de] gradient kleiner en de eerste grooter is dan de andere. Waarschijnlijk moet de oorzaak voor de kleinheid van den tweeden gradient daarin gezocht worden, dat het werkelijke verschil der grenshelderheden nog kleiner is, dus de invloed van het over het hoofd zien van zwakste sterren op B en A_1 nog sterker is, dan boven gevonden en aangenomen werd. Dan worden dus alle tweede gradienten wat grooter. Het interval $B-A_1$, dus de eerste gradient, verandert in dit geval niet, omdat de tellingen op B en A_1 geheel gelijksoortig zijn.

De eerste gradient is grooter dan de andere. Hier treedt dan *de invloed van de verwijderde melkwegcondensaties* te voorschijn, *die dus eerst vanaf de* 13,5*de grootte in de gradienten merkbaar wordt.*

Het feit, dat de gradienten in het gebied V niet wezenlijk verschillen van die der andere gebieden, laat eenige belangrijke conclusies toe. Dit gebied is als een verzwakte uitbreiding van de driedeelige donkere holte te beschouwen, die zijn kern vormt; de oorzaak voor het ontbreken van sterren in deze holte breidt zich verzwakt over een wijdere omgeving uit. Men kan als eerste verklaring aannemen, dat deze oorzaak een plaatselijke geringere ruimtedichtheid is, dus dat er een reëele holte is tusschen en in de dichte sterwolken, die den melkweg vormen. De dichterbij gelegen sterren worden daardoor dan niet beïnvloed, dus moeten geen verdunning toonen, de heldere sterren zullen relatief talrijker zijn dan de zwakke en de gradient moet kleiner zijn, dan in de dichtere gebieden. De

86

getallen toonen niets hiervan; de sterren van de 10[de] tot de 14[de] grootte zijn alle in gelijke mate verminderd. Men zou dus moeten aannemen, dat deze heldere sterren meerendeels reeds tot de melkweg-condensatie behooren en op denzelfden grooten afstand staan; dit wordt echter uitgesloten door het bedrag van de gradienten tusschen de 10[de] en de 13[de] grootte.

Een tweede verklaring ligt in de aanname van absorbeerende nevelmassa's. Lag zulk een nevel in het gebied van de melkweg-condensaties, dan zouden alleen de verderafgelegen sterren verduisterd worden, en de verschijnselen waren dezelfde als in het vorige geval, een relatieve overmaat van heldere sterren. Uit de gevonden getallen volgt dus, *dat de absorbeerende donkere nevelmassa, die de driedeelige holte veroorzaakt, zoo dichtbij is, dat zij ook reeds het meerendeel van de sterren van de 10[de] en 11[de] grootte verduistert.* Zij staat niet in organisch verband met de melkwegwolken, maar wordt slechts toevallig tegen dien helderen achtergrond geprojecteerd.

5. *Vergelijking met andere uitkomsten.* Onze vroegere onderzoekingen [1]) gaven voor het melkweggebied in Aquila een sterke toename van den gradient tot ver boven 0,6. Deze uitkomsten zijn echter niet onmiddellijk vergelijkbaar met de nu gevondene, omdat een andere grootteschaal gebruikt is. De daar gebruikte schaal van Groningen Publ. 18 heeft positieve stijgende correcties noodig ter herleiding op de visueele Harvard schaal; om de photographische grootten te krijgen, die bij dezelfde *log N* behooren, moeten nog weer stijgende positieve correcties toegevoegd worden, omdat de gemiddelde kleurindex voor de zwakkere sterren toeneemt [2]). Met deze correcties krijgt men:

	m (Gr. 18)	*m* vis.	*m* phot.	*log N*		$\frac{d \log N}{dm}$ vis.	$\frac{d \log N}{dm}$ phot.
1. B. D.	9.24	9.35	9.76	0.898			
2. C. d. C. Catal.	11.73	11.97	12.52	2.249	1—3	0.47	0.44
3. Epstein.	12.51	12.89	13.51	2.557	2—4	0.54	0.51
					3—4	0.76	0.72
4. C. d. C. Krt.	13.20	13.74	14.41	3.205	3—5	0.79	0.74
					4—5	0.82	0.76
5. Herschel.	13.90	14.65	15.39	3.948			

[1]) Onderzoekingen over den bouw van den melkweg. Verslagen K. A. v. W. 25 Juni 1910.

[2]) P. J. van Rhijn. On the number of stars of each photographic magnitude. Publ. Groningen N°. 27.

Hier is een stijgen van den gradient vanaf de 13[de] grootte (phot.) merkbaar; dit stemt dus wel met de nu verkregen uitkomst overeen. Maar de waarden van de nu verkregen gradienten zijn aanmerkelijk minder, dan die uit het vroegere onderzoek volgen (nu 0,52 van 13,5 tot 14,3, toen 0,72 van 13,5 tot 14,4), en die duidelijk op de aanwezigheid van groote verder afliggende stercondensaties wezen. Nu zijn de photographische schalen geheel onafhankelijk van elkaar en daardoor misschien niet direct vergelijkbaar. Wanneer b.v. de gebruikte reductiefactor 0,884 nog wat te groot was, (dus een 10-voudige expositie nog wat minder dan $2 \times 0^m,884$ zou doen winnen) zouden in het onderzoek van nu alle m's en al hun verschillen kleiner en de gradienten grooter worden. In hoeverre zooiets werkelijk het geval is, is niet met zekerheid te zeggen. In elk geval zijn wij met deze tripletopnamen minder diep in de zwakke sterren doorgedrongen, dan bij het vroegere onderzoek. Toen het plan voor deze opnamen ontworpen werd, scheen het niet al te moeilijk om verder te komen dan HERSCHEL's peilingen, waarvan de grenshelderheid toen 13.9 gevonden werd. Door de sedert gevonden schaalreducties, is, zooals nu blijkt, dit doel niet bereikt kunnen worden. Daartoe was een instrument met grooter opening of een veel langeren expositietijd noodig geweest.

Om nog wat verder te komen, zijn door Prof, HERTZSPRUNG op mijn verzoek nog een paar opnamen met den 80 cM. refractor te Potsdam gemaakt. Om de helderheidsschaal dadelijk op de plaat vast te leggen, werd een grof traliescherm voor het objectief geplaatst, waardoor het centrale beeld $0,^m748$ verzwakt wordt en het 1[ste] en 2[de] buigingsbeeld $2,^m242$ en $3,^m317$ zwakker wordt dan het centrale beeld. Op een plaat met centrum op 46 Aquilae ($19^h 37,^m 5 + 11°57'$) werden op 0,343 kwadraatgraden 858 sterren geteld, waarvan 101 het eerste en 24 het tweede buigingsbeeld vertoonen. Daaruit volgt voor

	m_0	m_0—2,24	m_0—3,32
$log\ N$	3,398	2,469	1,845

waaruit de gradienten $\frac{d \log N}{dm} = 0,41$ en 0,58 volgen. Deze plaat dringt wat verder door dan het Triplet, want uit vergelijking met de boven gevonden aantallen rondom 46 Aquilae volgt $m_0 = 14,8$. Hier blijkt nu de gradient van 12,6 tot 14,8 slechts 0,41 te bedragen. Vermoedelijk ligt de oorzaak voor dit kleine bedrag daarin, dat veel zwakkere nevenbeeldjes meegeteld zijn, dan hoofdbeelden, omdat hun plaats nauwkeurig bekend was. Hier blijkt dus ook

weer, hoe gemakkelijk door niet gelijke omstandigheden systematische verschillen in de getelde aantallen sterren ontstaan, waardoor ze voor het afleiden van gradienten onbruikbaar worden.

Een ander middel, om verder te komen, geven de platen, die door FRANKLIN-ADAMS opgenomen zijn; volgens CHAPMAN en MELOTTE gaan zij tot beneden de 17[de] grootte photographisch, en dit blijkt ook uit de door hen opgegeven aantallen. Voor de melkwegzone was het aantal N voor de grootte 15,0 16,0 17,0 naar hun oorspronkelijke opgaven 650, 1300, 2050; deze aantallen zijn door verkeerde vorming van middelwaarden te klein, en Dr. CHAPMAN gaf naderhand voor de beide eerste 840 en 1700 ($log\ N$ 2.92 en 3.23) [1]), dus 29°/₀ en 31°/₀ meer; neemt men het laatste dus 33°/₀ grooter, dan wordt voor 17.0 het aantal $N = 2800$. De tafel van VAN RHIJN geeft voor deze N de photographische grenshelderheden 15,2, 16,2 en 16,9, waaruit blijkt, dat de sterren tot 17,0 onvolledig geteld zijn. Uit de waarden van N, die in Gron. Publ. 18 voor Herschel zijn afgeleid, nl. $N = 175{,}6$ 373 1023 voor de 3 zones 40—90, 20—40 en 0—20 galactische breedte, volgt als photographische grenshelderheid voor Herschel 15,30 15,18 en 15,47. De tellingen, die CHAPMAN en MELOTTE met 17,0 aangeven, gaan dus $1\frac{1}{2}$ grootteklasse verder in de zwakke sterren dan HERSCHEL's peilingen.

De afzonderlijke tellingen op plaat 136 (RKl. 20^{h}0; decl. +15°) die de Aquilastreek bevat, zijn mij door Prof. DYSON welwillend ter beschikking gesteld. Voor deze plaat zijn de grenshelderheden niet photometrisch bepaald, men kan dus $\frac{d\ log\ N}{dm}$ niet streng afleiden. Neemt men voor de m de gemiddelde waarden, dan vindt men (als gemiddelde van 6 plaatsen, die in den melkweg in Aquila en Sagitta liggen)

$m =$	14.4		15,3		16,3		17,0
$N =$	965		3445		11883		14310
$\frac{d\ log\ N}{dm} =$		0,61		0,53		0,12	

Het laatste verschil bewijst weer, dat de zwakste sterren bij Ch. & M. zeer onvolledig geteld zijn, in deze dichte melkwegstreken nog meer dan elders. Overigens is ook in de andere verschillen weinig van den sterken gradient te bemerken, die naar HERSCHEL's getallen te verwachten was. CHAPMAN heeft ook de dichtste gedeelten van de melkwegzone afzonderlijk behandeld en vindt daarvoor

[1]) S. CHAPMAN. The number and galactic distribution of the stars. Table A *Monthly Notices 78* pag. 70.

voor $m =$ 13 14 15 16
$log\, N =$ 2,63 3,07 3,37 3,60

dus voor den gradient 0,44, 0,30 en 0.23. In deze cijfers is ook niets van een ruimtelijke condensatie in verre melkwegwolken te bespeuren.

De tegenstrijdigheid, die in al deze uitkomsten te voorschijn treedt, en telkens de hoop, om verder te komen dan HERSCHEL, teleurstelt, kan aldus samengevat worden: *in de heldere melkwegvlekken vertoonen de Franklin-Adamsplaten nauwlijks meer sterren dan de peilingen van* HERSCHEL, hoewel zij naar de gemiddelde aantallen veel dieper gaan. Op het gebied van plaat 136 geven de tellingen van Ch. & M. 9340 sterren per kwadraatgraad en HERSCHEL 7500, terwijl het gemiddelde over de geheele melkwegzone bij den een meer dan 2800, bij den ander 1023 is.

Het is niet onmiddellijk duidelijk, wat hiervan de oorzaak is. De eene voor de hand liggende verklaring is, dat de tellingen van de zwakste sterren op de Franklin-Adams platen in de dichtste melkwegvlekken veel onvollediger zijn dan in andere streken. Een andere verklaring zou zijn, dat in de heldere dichte melkwegwolken de kleurindex hooger, de sterren dus gemiddeld rooder zijn dan in het gemiddelde van de galactische zone. In dit geval komt men door nog zoo volledige tellingen op photographische platen veel minder ver, dan door tellingen visueel met een kijker met groote opening.

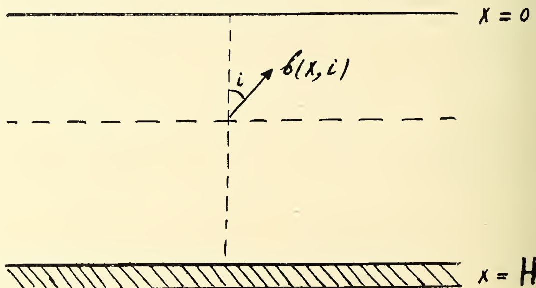
Wij kunnen dus in de diepten van de melkwegwolken nog steeds niet verder indringen, dan HERSCHEL; ons materiaal reikt nog nauwlijks verder, dan wat HERSCHEL meer dan een eeuw geleden verzamelde. Dat in de geheele 19[de] eeuw niets gedaan is om zijn werk te completeeren en te verbeteren, ligt ongetwijfeld daaraan, dat de photographische methode op het gebied van stertellingen zooveel meer beloofde, maar deze belofte nog niet gehouden heeft. De vele systematische ongelijkheden, die de photographische methode aankleven — de afname van de sterdichtheid naar de randen, de grootere invloed van atmospherische absorbtie, de variatie in grenshelderheid — maken het reeds zeer moeilijk, om uit een photographische opname van den hemel een homogeen materiaal af te leiden. Komt hier nu nog bij, dat de zwakste sterren, waar het om te doen is, gemiddeld een hoogen kleurindex hebben, dan blijkt nog sterker, hoe wenschelijk visueele tellingen met zeer lichtsterke instrumenten voor de studie van de melkwegcondensaties zijn.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer H. GROOT: „*Over de effectieve Zonnetemperatuur.*" Eenige opmerkingen naar aanleiding van een artikel van DEFANT: „*Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre.*"

(Mede aangeboden door den Heer VAN DER STOK).

SCHWARZSCHILD heeft in een verhandeling: „Ueber Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre" (Sitz. Ber. d. Berl. Akad. 1914) het probleem behandeld der straling van een, als absoluut zwart lichaam te denken, vlakke laag waarboven zich een absorbeerende en verstrooiende atmosfeer bevindt. Valt op een laag (zie figuur 1) begrensd door de vlakken $x=0$ en $x=H$ uit alle richtingen straling van intensiteit S, uitgaande van het zwarte lichaam ZZ', dan noemt SCHWARZSCHILD in een vlak x de straling, welke 't vlak doorloopt, in een zin met de straling S mee en onder een hoek i met de normaal op de grenslagen, $b(x,i)$ en tracht een formule voor $b(0,i)$ te vinden.

Fig. 1.



Zwart lichaam.

$b(0,i)$ is dus de totale intensiteit van licht dat onder een hoek i aan de grens van de atmosfeer uittreedt en is opgebouwd uit direct licht en licht dat éénmaal, tweemaal enz. verstrooid is.

SCHWARSCHILD slaagt er in, dit probleem voor twee speciale gevallen op te lossen, en wel vindt hij:

a. Grensgeval van uitsluitende absorptie ($\sigma=0$)

$$b(0,i)=a+\frac{b\cos i}{k}\left(1-e^{-kH\sec i}\right) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

b. Grensgeval van uitsluitende verstrooiing ($k=0$)

$$b(0,1)=\frac{0.5+\cos i}{1+\sigma H}+\frac{0.5-\cos i}{1+\sigma H}e^{-\sigma H \sec i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hierin is: $k=$ absorptiecoefficient, $\sigma=$ diffusiecoefficient, $H=$ hoogte van den dampkring, a en b twee numerieke constanten.

In zijn artikel: „Diffusion und Absorption in der Sonnenatmosphäre" (Sitz. Ber. d. K. Akad. zu Wien Abt. II^a. Bnd. 125 (1914)) tracht A. DEFANT aan de hand van gegevens, die hij ontleent aan de waarnemingen van ABBOT over de afname der stralingsintensiteit op de zonneschijf van het midden naar den rand (Annals of the Astr. Observ. of the Smithsonian Inst. vol. III. Washington 1913, p. 158), uit te maken welke der beide oorzaken, absorptie of verstrooiing, op de zon het meest werkzaam blijkt te zijn.

Door een soort „trial and error" methode slaagt hij erin een formule af te leiden:

$$b(0,1)=\frac{0.5+\cos i+e^{-0.0405\,\lambda^{-4}\sec i}(0.5-\cos i)-0.3804+0.3136\cos i}{1+0.0405\,\lambda^{-4}} \quad . \quad (3)$$

die het midden houdt tusschen (1) en (2) en numerisch juiste waarden geeft. Deze schijnt erop te wijzen dat het diffusie-effect verreweg overweegt, maar toch beinvloed wordt door een geringe absorptie.

In hoeverre de beschouwingen, waardoor hij tot formule (3) geraakt, waarde hebben, zij hier in het midden gelaten. Zeker is, dat de numerieke waarden vrij juist zijn, zooals tabel I overtuigend aantoont.

TABEL I.

cos i	$\lambda=0.433\,\mu$			$\lambda=0.604\,\mu$			$\lambda=1.031\,\mu$		
	b (0,*i*)	*b* (0,*i*) × 355	Waargenomen waarde	*b* (0.*i*)	*b* (0,*i*) × 375	Waargenomen waarde	*b* (0.*i*)	*b* (0,*i*) × 117	Waargenomen waarde
1.0	1.2752	453	456	1.0643	399	399	0.9486	111	111
0.9	1.1906	423	419	1.0164	381	380	0.9175	107	107
0.8	1.0996	390	384	0.9656	361	360	0.8838	103	105
0.7	1.0006	355	348	0.9097	341	337	0.8491	99.4	100
0.6	0.8932	317	309	0.8476	318	313	0.8137	95.2	95.8
0.5	0.7764	276	277	0.7764	291	288	0.7765	90.9	90.0
0.4	0.6506	231	238	0.6917	259	265	0.7366	86.2	86.2
0.3	0.5180	184	192	0.5863	220	230	0.6912	80.9	80.9

Verklaring van tabel I:
In deze tabel is voor drie verschillende waarden van λ met behulp van (3) $b(0,i)$ berekend voor de waarden van $\cos i$, aangegeven in de 1ste kolom. In kolom 3 zijn de gevonden waarden van $b(0,i)$ met een factor vermenigvuldigd, teneinde vergelijking met de getallen van Abbot, die in de 4de kolom staan, mogelijk te maken.

Met behulp van (3) en de getallen van Abbot, welke ik hieronder laat volgen, wil Defant nu echter een conclusie trekken over de effectieve temperatuur van de zon.

Golflente in μ	Straling in het midden van de zonneschijf
0.323	144
0.386	338
0.433	456
0.456	515
0.481	511
0.501	489
0.534	463
0.604	399
0.670	333
0.699	307
0.866	174
1.031	111
1.225	77.6
1.655	39.5
2.097	14.0

(Getallen van Abbot).

Zijn redeneering is de volgende:

De formule (3) geeft voor $i = 0$ $b(0,0)$ d.i. voor elke golflengte λ de in het midden van de zonneschijf uittredende stralingsintensiteit, wanneer die van de fotosfeeroppervlakte voor deze λ gelijk aan 1 wordt gesteld. Wat wij *meten* is echter niet de grootheid $b(0,0)$, maar de werkelijk uittredende straling i_λ, die met $b(0,0)$ samenhangt door de formule:

$$I_\lambda = \frac{i_\lambda}{b(0,0)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

waarin I_λ de stralingsintensiteit in het spectrum van de fotosfeer (beschouwd als absoluut zwart lichaam) voor de golflengte λ is.

Met behulp van (3) en (4) en de getallen van ABBOT kan dus de volgende tabel berekend worden voor I_λ (tabel II). Volgens onderstelling straalt de fotosfeer als een absoluut zwart lichaam, zoodat de formule van PLANCK mag toegepast worden, volgens welke:

$$I_\lambda = \frac{7.211 \times 10^8}{\lambda^5 \left(10^{\frac{2.1563 \times 2890}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De grootheden I_λ uit de tabel zijn uitgedrukt in een onbekende eenheid. Beschouwt men deze eenheid en T als onbekenden, dan kan uit twee waarden van I_λ (voor λ_1 en λ_2 bijv.) T opgelost worden. *Indien de opzet juist is, moeten wij uit alle combinaties twee aan twee van I_λ dezelfde temperatuur vinden.*

DEFANT berekent T uit de combinaties:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0.5 & I_\lambda = 700 \\ \lambda_2 = 0.9 & I_\lambda = 180 \end{array}\right\} T = 8900^\circ$$

en

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_1 = 0.6 & I_\lambda = 350 \\ \lambda_2 = 1.2 & I_\lambda = 90 \end{array}\right\} T = 8700^\circ$$

en vindt de overeenstemming „genügend". (l.c. pag. 517).

TABEL II.

Golflengte λ	$1 + 0.0405\ \lambda^{-4}$	$b\,(0,0)$	i_λ	I_λ
0.323	4.721	0.299	144	481.8
0.386	2.824	0.479	338	705.7
0.433	2.152	0.593	456	769.5
0.456	1.937	0.644	515	799.8
0.481	1.757	0.682	511	748.9
0.501	1.646	0.710	489	688.7
0.534	1.498	0.737	463	628.1
0.604	1.304	0.816	399	500.2
0.670	1.201	0.853	333	390.5
0.699	1.170	0.864	307	355.2
0.866	1.072	0.903	174	192.8
1.031	1.036	0.918	111	120.9
1.225	1.018	0.926	77.6	83.8
1.655	1.005_4	0.931	39.5	42.4
2.097	1.002_1	0.932	14.0	15.0

Jammer genoeg schijnt hier echter een fatale vergissing ingeslopen te zijn. Immers bij $\lambda = 0.6$ behoort *niet* $I_\lambda = 350$, maar — (grafisch interpoleerend) — $I_\lambda = 506$, hetgeen $T = 6600°$ inplaats van $8700°$ geeft, zoodat van overeenstemming geen sprake meer kan zijn.

Een ernstig bezwaar tegen de geheele methode schijnt mij dan ook voor het grijpen te liggen en wel dit:

De onderstelling dat alle lichtsoorten tot ons komen van uit één fotosfeeroppervlak, m. a. w. dat licht van alle golflengten uit éénzelfde diepte van de zon afkomstig zou zijn, blijkt in het licht van nieuwere onderzoekingen (zie bijv. de dissertatie van J. Spijkerboer „Verstrooiing van licht en intensiteitsverdeeling over de zonneschijf" (1917)) hoe langer hoe meer onhoudbaar. Indien echter in werkelijkheid licht van verschillende golflengte afkomstig is uit verschillende deelen der zon, dan wordt het zéér de vraag of wij nog wel de formule van Planck mogen toepassen zooals wij dit Defant zagen doen. Want dit zou dan gaan beteekenen, dat wij onderstelden, dat iedere lichtsoort als het ware een soort „eigenfotosfeer" zou hebben, die straalt als een zwart lichaam, terwijl de fotosfeer voor de grootere golflengten dieper zou liggen dan voor de kleinere. Men mag dan verwachten dat de temperatuur, bepaald met de formule van Planck, een functie van λ wordt en wel zou T *des te grooter zijn naarmate* λ *toeneemt.*

In deze laatste opmerking hebben wij een middel om te onderzoeken of de hypothese der schaalsgewijze over elkander liggende fotosfeeren een schijn van rechtvaardiging kan vinden.

Uit de waarden van tabel II grafisch interpoleerend construeerde ik tabel III:

TABEL III.

λ	I_λ	λ	I_λ	λ	I_λ	λ	I_λ
0.40	709	0.70	342	1.00	134	1.60	46
0.45	791	0.75	284	1.10	104	1.70	39
0.50	714	0.80	239	1.20	87	1.80	32
0.55	604	0.85	201	1.30	74	1.90	25
0.60	506	0.90	174	1.40	64	2.00	19
0.65	418	0.95	153	1.50	55		

Omdat wij de eenheid waarin I_λ is uitgedrukt niet kennen, hebben wij, zooals reeds opgemerkt werd, telkens twee waarden van I_λ (a_1 en a_2) noodig om T te vinden.

De berekening komt op het volgende neer:

Zij $A = 7.210 \times 10^8$, $\beta = 2{,}1563 \times 2890$, α_1 en α_2 de waarden van I_λ behoorend bij λ_1 en λ_2, f een onbekende factor, afhankelijk van de eenheden waarin I_λ gemeten is, dan gelden de volgende vergelijkingen:

$$\alpha_1 f = \frac{A}{\lambda_1^5\left(10^{\frac{\beta}{\lambda_1 T}} - 1\right)} \quad \text{en} \quad \alpha_2 f = \frac{A}{\lambda_2^5\left(10^{\frac{\beta}{\lambda_2 T}} - 1\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Als wij de waarden van λ zóó kiezen, dat $\lambda_2 = 2\lambda_1$ en wij stellen $10^{\frac{\beta}{\lambda_2 T}} = x$, dan volgt uit (6) gemakkelijk:

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^5 (x^2 - 1) = x + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

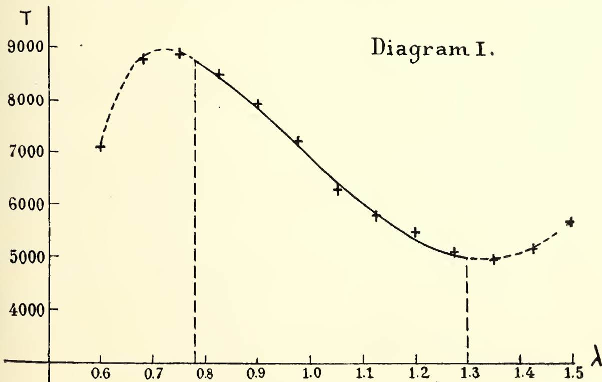
De wortel $x = 1$ geeft $T = \infty$, dus heeft geen physische beteekenis, zoodat wij T vinden uit:

$$\left.\begin{aligned} x &= 32\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) - 1 \\ T &= \frac{\beta}{\lambda_2 \, lg\, x} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Op deze wijze vond ik:

$\lambda_2 =$	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1 3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$T =$	7200	8800	8900	8500	7900	7200	6300	5800	5500	5100	5000	5200	5700

dus gemiddeld *een afname van* T *bij toename van* λ (zie diagram I).



Overigens is ook deze manier nog niet geheel bevredigend, immers wij weten nu niet bij welke λ de gevonden T eigenlijk moet behooren, aangezien de beide waarden van λ (λ_1 en λ_2), die noodig zijn, bij deze rekenwijze tamelijk ver uit elkaar kunnen liggen. Behoort bij ($\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 1,8$) T bijv. bij λ_1, bij λ_2 of bij een waarde die ergens tusschen λ_1 en λ_2 in ligt?

Willen wij dit bezwaar uit den weg gaan, dan kunnen wij de vergelijkingen (6) als volgt behandelen:

Zij $\lambda_1 : \lambda_2 = n : m$ of

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\varrho}{m}\\ \lambda_2 &= \frac{\varrho}{n}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

dan vindt men gemakkelijk:

$$10^{\frac{m\beta}{\varrho T}} - 1 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^5\left(10^{\frac{n\beta}{\varrho T}} - 1\right) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Stel nu

$$10^{\frac{\beta}{\varrho T}} = z \qquad \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^5 = C \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

dan gaat (10) over in

$$z^m - Cz^n + (C-1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Zorgen wij nog dat $m = n + 1$ is, dan wordt de gedaante nog iets geschikter voor numerische benadering en wel:

$$z^n(z - C) + (C-1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12a)$$

Heeft men z voldoende nauwkeurig benaderd, dan volgt T uit:

$$T = \frac{\beta}{\varrho \, lg \, z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Op deze manier kan men λ_1 en λ_2 dicht genoeg bij elkaar brengen om aan een onbepaaldheid in de keuze der λ waarbij T behoort te ontkomen.

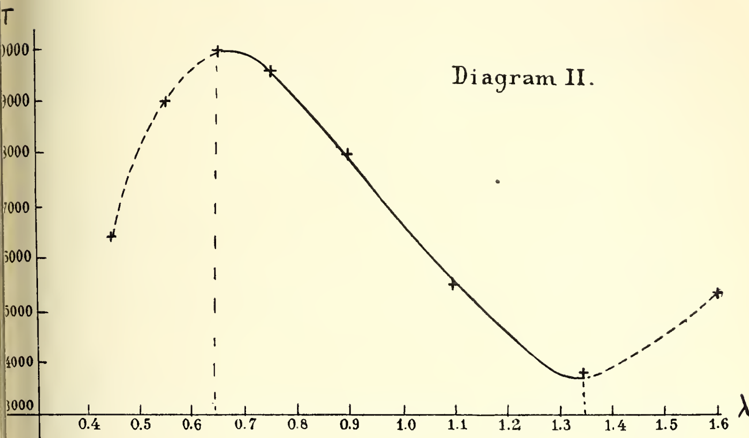
Zoo werd gevonden:

λ_1	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0	1.2	1.5	1.8
λ_2	0.5	0.6	0.7	0.8	1.0	1.2	1.5	1.8	2.0
T	(6400)	9000	10.000	9600	8000	5500	3800	5400	—

zoodat gemiddeld:

$\lambda = 0.5-0.7$	$T = 9500$
$0.7-1.2$	6000
$1.2-1.8$	4600

dus weer een dergelijk resultaat als bij de 1ste methode (zie diagram II). De onderlinge afwijkingen zijn nu veel grooter, hetgeen ook te



verwachten was, daar op de kleine intervallen $\lambda_1 - \lambda_2$ de onvermijdelijke fouten in I_λ (een experimenteele grootheid!) zich zeer sterk doen gevoelen.

Zoo geven $\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 1.8 \\ \lambda_2 = 2.0\end{array}\right\}$ een onbestaanbare waarde voor T, maar neemt men bij $\lambda_2 = 2{,}0$ $I_\lambda = 22$ inplaats van 19, dan zou $T = 18000°$ worden!

Bij deze manier zijn vooral de kleinere waarden van I_λ ongunstig, dus verdienen de waarden bij $\lambda_1 = 1{,}5$ en $\lambda_1 = 1{,}8$ niet al te veel vertrouwen.

Verder zijn de waarden van I_λ voor $\lambda < 0.5$ eigenlijk ook onbetrouwbaar, daar de grafische interpolatie — en iedere andere overigens ook — hier zéér onnauwkeurig wordt.

Laten wij al deze twijfelachtige waarden van T buiten beschouwing, dan komen wij tot het resultaat, dat juist in het gebied der betrouwbare waarden van T (de doorgetrokken lijn in het diagram) *er onmiskenbaar neiging van T bestaat om af te nemen bij het aangroeien van λ, dus juist het omgekeerde van wat wij a priori meenden te mogen verwachten.*

In een volgende mededeeling stel ik mij voor de vraag te behandelen, waaraan dit onverwachte resultaat toegeschreven kan worden.

Utrecht, Maart 1919.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan van den Heer J. D. VAN DER WAALS Jr.: *„Over de theorie der vloeistofwrijving* II."

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

§ 4. *Dichtheidsverdeeling in een vloeistof, stroomende in een krachtenveld.* Alvorens over te gaan tot de „wrijving door groepvorming" zullen wij een eenvoudiger probleem bespreken. Wij zullen ons namelijk voorstellen, dat een gas stroomt in een krachtenveld en dan nagaan welke wijzigingen de strooming teweegbrengt in de dichtheidsverdeeling, zooals die in het krachtenveld zou ontstaan, wanneer er geen strooming was. Wij zullen ons daarbij weer het eenvoudige geval denken, dat de stroom valt in de x-richting en dat de snelheid kan worden voorgesteld door $u = az$. Wij zullen verder onderstellen met een stationairen stroom te doen te hebben, zoodat in een in de ruimte stilstaand punt de dichtheid en de stroomsnelheid constant zijn.

Om nu de dichtheidsverdeeling na te gaan, die dat stationaire karakter zal vertoonen, zullen wij aannemen, dat er twee oorzaken zijn, waardoor de dichtheid in een gegeven punt zou kunnen veranderen: de „molaire" strooming en de diffusiestroom. Het is niet te ontkennen, dat deze onderscheiding artificieel is en dat de verandering der hoeveelheid stof in een ruimteëlement natuurlijk altijd kan gevonden worden uit den totalen stroom, die door de begrenzingsvlakken naar binnen stroomt. Ik zal echter onderstellen, dat deze totale stroom kan gedacht worden samengesteld te zijn uit een molairestrooming, waaraan ik de ongewijzigde snelheid $u = az$ zal toekennen en een stroom, die het gevolg is van de ongelijkmatige dichtheid in verband met de warmtebeweging. Deze laatste zal ik met den naam diffusiestroom aanduiden. Verder zal ik aannemen, dat men de verandering, die door elk van deze beide oorzaken in de dichtheid wordt teweeggebracht, kan berekenen onafhankelijk van de andere oorzaak.

Wat er door den molairen stroom per seconde in een volume-element naar binnen komt is:

$$\frac{dn}{dt}\, dx\, dy\, dz = -u \frac{\partial n}{\partial x}\, dx\, dy\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Om de bijdrage van den diffusiestroom te berekenen zullen wij

aannemen, dat de snelheidsverdeeling der gasmoleculen op ieder punt op de volgende wijze te vinden is. Wij zullen namelijk aannemen, dat de snelheden der moleculen, die in zekere laag gebotst hebben, uit twee componenten bestaat: 1e. de stroomsnelheid der laag, waarin zij gebotst hebben, en 2e de thermische snelheid, van welke laatste zal worden aangenomen, dat zij volgens de wet van MAXWELL over de verschillende moleculen verdeeld is. Ongetwijfeld maken wij door deze dingen te onderstellen een fout, maar wij mogen verwachten, dat dit slechts een fout zal zijn in een getallencoëfficiënt en dat de aard van het verschijnsel alsook de orde van grootte door de met behulp van deze onderstellingen afgeleide formules juist zal worden voorgesteld.

Om nu den diffusiestroom door een vlak A na te gaan zullen wij twee vlakken beschouwen aan weerszijden van het vlak A gelegen op een afstand $\frac{\sqrt{3}}{3}l$. (l = gemiddelde weglengte der moleculen). En wij zullen de moleculen, die door het vlak A gaan beschouwen als „uitgezonden uit" een dier beide vlakken, waaronder wij verstaan, dat zij daar hun laatste botsing hebben gehad. Beschouwen wij nu eerst de moleculen, die botsen in het + vlak [1]) en die een snelheidscomponent loodrecht op het vlak A bezitten tusschen w en $w + dw$. In het vlak A aangekomen hebben deze moleculen een normale snelheid w' gekregen, bepaald door de vergelijking:

$$\tfrac{1}{2} mw'^2 = \tfrac{1}{2} mw^2 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}$$

Het aantal moleculen dezer groep, die per seconde en per oppervlakte-eenheid door het vlak A gaan, is, als n de dichtheid der moleculen in A voorstelt: $n + \frac{\partial n}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}$, die in het + vlak:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\left(n + \frac{\partial n}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}\right) w' e^{-\frac{u^2+v^2+w'^2}{\alpha^2} + \frac{1}{kT}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}}\, d\frac{u}{\alpha}\, d\frac{v}{\alpha}\, d\frac{w'}{\alpha} \quad . \quad (11)$$

Let men alleen op de uit het + vlak uitgezonden moleculen, dan moet w' steeds een waarde hebben, waarvoor $\tfrac{1}{2} mw'^2 > \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}$. In de richting van + naar — gaan echter ook moleculen, die er

---

[1]) D. w. z. het aan A evenwijdige vlak op een afstand $\tfrac{1}{3} l\sqrt{3}$ aan de zijde, waar de potentieele energie ε der moleculen grooter is dan in A. Het aan de andere zijde gelegen vlak zal het — vlak heeten. De z-as zal loodrecht op A staan in de richting van het — vlak naar het + vlak, zoodat $\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} > 0$.

eerst in tegengestelde richting zijn doorgegaan met zoo geringe snelheid, dat zij het $+$ vlak niet konden bereiken, maar tengevolge van de kracht $-\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}$ hun snelheid omkeerden alsvorens het bereikt te hebben. Telt men ook deze moleculen mee, dan vindt men den totalen diffusiestroom van $+$ naar $-$ door uitdrukking (11) naar u en v te integreeren tusschen $-\infty$ en $+\infty$ en naar w tusschen 0 en $-\infty$.

De omgekeerd in $+$ richting door het vlak stroomende moleculen vindt men door te nemen een uit het $-$ vlak uitgezonden groep moleculen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\left(n - \frac{\partial n}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}\right) w' e^{-\frac{u^2+v^2+w'^2}{\alpha^2} - \frac{1}{kT}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}}\, d\frac{u}{\alpha}\, d\frac{v}{\alpha}\, d\frac{w'}{\alpha}$$

en hierin u en v tusschen $-\infty$ en $+\infty$ en w' tusschen 0 en $+\infty$ te integreeren.

Zoo vindt men, dat het vlak A per seconde en per oppervlakte-eenheid gepasseerd wordt in de $-$ richting door het volgende aantal moleculen:

$$\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\left\{\left(n + \frac{\partial n}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}\right) e^{\frac{1}{kT}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}} - \left(n - \frac{\partial n}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}\right) e^{-\frac{1}{kT}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\frac{l\sqrt{3}}{3}}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{3}}{3\sqrt{\pi}}\, l\left(\frac{\partial n}{\partial z} + n\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\frac{1}{kT}\right) = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3\sqrt{\pi}}\, nl\left(\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\frac{1}{kT}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hierin zullen wij $nl =$ constant nemen, ofschoon dit eigenlijk alleen voor ijle gassen geoorloofd is. In het geval van thermodynamisch evenwicht moet deze diffusiestroom door ieder vlak nul zijn, zoodat men dan stelt $l(n) + \frac{\varepsilon}{kT} =$ constant, wat de bekende verdeeling der moleculen in de ruimte aangeeft.

Wij zullen van de waarde van den diffusiestroom in vergelijking (12) gebruik maken om te berekenen hoeveel er door de zes zijden van een ruimte-element $dx\, dy\, dz$ naar binnen komt. Wij vinden daarvoor:

$$-\frac{\alpha\sqrt{3}}{3\sqrt{\pi}}\, nl\, \nabla^2 \left\{ l(n) + \frac{\varepsilon}{kT} \right\} dx\, dy\, dz\,,$$

zoodat wij voor de voorwaarde voor een stationairen toestand vinden in verband met vergelijking (10):

$$+\frac{\alpha\sqrt{3}}{3\sqrt{\pi}}\, nl\, \nabla^2 \left\{ l(n) + \frac{\varepsilon}{kT} \right\} = u\frac{\partial n}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Ik zal hier afzien van de kwestie, welke correcties aan den

getallen-factor zouden moeten worden aangebracht en vergelijking (13) verder ongecorrigeerd gebruiken.

$l(n) + \frac{\varepsilon}{kT}$ is de grootheid, die door GIBBS door μ wordt voorgesteld en met den naam thermodynamische potentiaal wordt aangeduid. In het geval van thermodynamisch evenwicht is zij constant en wel gelijk aan $l(n_0)$, wanneer n_0 de dichtheid is in het punt, waar de potentieele energie nul is gesteld. In het door ons gedachte niet-evenwichtsgeval zal ik stellen:

$$l(n) + \frac{\varepsilon}{kT} - l(n_0) = w. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

of in aanmerking nemende, dat wij w klein onderstellen:

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}(1+w) = n_0 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} + nw, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14a)$$

zoodat nw het aantal moleculen voorstelt, dat tengevolge van den stroom in overmaat boven het normale aantal $n_0\, e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ in een ruimte-element aanwezig is. Volgens vergelijking (13) wordt w gevonden als de potentiaal van denkbeeldig agens, waarvan de dichtheid zou zijn: $-\frac{\sqrt{3\pi}}{a\,.\,nl}\, u\, \frac{\partial n}{\partial x}$.

Om de beteekenis der gevonden formule te illustreeren, zullen wij haar toepassen voor het volgende eenvoudige geval: het krachtenveld is afkomstig van één enkel krachtscentrum, waarin wij den oorsprong O van het coördinaten-systeem leggen, terwijl de kracht alleen een functie van r zal zijn. Was er geen stroom, dan zou dit krachtenveld in een gas een dichtere wolk om O tengevolge hebben, waarbij de dichtheid alleen een functie van r zou zijn. Denken wij nu het gas in strooming gebracht met een *constante* snelheid u in de negatieve x-richting en denken wij, dat dit een *geringe* verandering in de dichtheid ten gevolge heeft, zoodat wij bij wijze van eerste benadering in vergelijking (13) de waarde van $\frac{\partial n}{\partial x}$ mogen nemen, zooals zij zonder stroom zou zijn, dus:

$$\frac{\partial n}{\partial x} = -\, n_0 e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \frac{1}{kT} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

waardoor vergelijking (13) overgaat in,

$$\nabla^2 w = -\,\frac{\sqrt{3\pi}}{a\,.\,nl}\, u \frac{n}{kT} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13a)$$

Het denkbeeldige agens is dan negatief aan den kant van de

positieve x-as en heeft gelijke, doch positieve waarde aan den kant der negatieve x-as. De potentiaal w van dit agens zal dan, zooals uit symmetrie-overwegingen gemakkelijk is af te leiden, in het yz-vlak nul zijn en aan weerszijden daarvan hetzelfde teeken vertoonen als het denkbeeldige agens. De overmaat nw vertoont dus ook deze teekens, wat daarop neerkomt, dat de wolk in de richting der negatieve x-as is verschoven, zooals te verwachten was.

Denkt men nu niet langer $u =$ constant, maar $u = az$, dan zal w een positief teeken krijgen in het 1e en 3e quadrant, d. w. z. de wolk zal uitgerekt worden in de richting van een lijn, die een hoek van 45° met de oorspronkelijke assen maakt en in het 1e en 3e quadrant ligt.

§ 5. *Dichtheidsverdeeling in een stroomende vloeistof bij het kritisch punt.* Gaan wij na deze voorbereiding over tot het vraagstuk van de dichtheidsanomalieën in een stroomende vloeistof, dan zullen wij eerst $\nabla^2 w$ te berekenen hebben volgens vergelijking (13a). Daartoe merken wij vooraf op, dat de door die vergelijking gegeven waarde van $\nabla^2 w$ alleen een gevolg is van de beweging van het gas relatief het krachtscentrum. Dachten wij $u =$ constant en lieten wij dan het krachtscentrum meebewegen, dan zou het natuurlijk op hetzelfde neerkomen, alsof alles stilstond. Wij zullen in vergelijking (13a) voor u dus steeds deze relatieve snelheid hebben te nemen. De waarde van $\nabla^2 w$ in een volume-element $dx\, dy\, dz = d\omega$ zal nu berekend kunnen worden als de som van bijdragen, geleverd tengevolge van de krachten, uitgeoefend door de stof in de verschillende omringende ruimte-elementen. Noemt men een van deze omringende ruimte-elementen $dx'\, dy'\, dz' = d\omega'$ en de dichtheid erin n', dan zijn de $n'd\omega'$ moleculen, die zich erin bevinden op te vatten als een krachtscentrum. Denken wij weer $u = az$ dan zal de snelheid van de stof in $d\omega$ relatief dit centrum bedragen $a\,(z - z')$. Stel verder de potentieele energie van twee moleculen op een onderlingen afstand r voor door $\varphi(r)$, dan wordt de bijdrage tot $\nabla^2 w$ in $d\omega$, die toe te schrijven is aan de stof in $d\omega'$:

$$-\frac{\sqrt{3\pi}}{a\,.\,nl}\frac{n}{kT}a(z-z')\,n'd\omega'\frac{\partial\varphi(r')}{\partial r'}\frac{x-x'}{r'}$$

waarin r' den afstand der ruimte-elementen $d\omega$ en $d\omega'$ voorstelt. Draaiën wij de assen 45° om de y-as en noemen wij de nieuwe assen ξ, η, ζ, dan vinden wij voor de totale waarde van $\nabla^2 w$:

$$\nabla^2 w = -\frac{\sqrt{3\pi}}{al}\frac{a}{kT}\int n'\frac{\partial\varphi}{\partial r'}\frac{(\xi-\xi')^2-(\zeta-\zeta')^2}{2r'}\,d\omega' \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Deze vergelijking geeft de verdeeling van het denkbeeldige agens in de ruimte. Men vindt eruit voor de waarde van w_1 in een volume-element $d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = d\omega_1$, wanneer men den afstand van een element $d\omega$ tot $d\omega_1$ door r_1 voorstelt:

$$w_1 = + \frac{\sqrt{3\pi}}{al} \frac{a}{kT} \iint n' \frac{\partial\varphi}{\partial r'} \frac{(\xi-\xi')^2 - (\zeta-\zeta')^2}{2r'} \frac{1}{r_1} d\omega' d\omega \quad . \quad (17)$$

Indien n' constant was, zou men natuurlijk vinden $\nabla^2 w = o$ en $w = o$. Is echter in een bepaald gebied n' grooter dan in de omringende ruimte-elementen, dan zal in een lijn evenwijdig aan de ξ-as door het centrum van dit gebied gaande $\nabla^2 w$ negatief zijn en in een lijn evenwijdig aan de ζ-as positief. Het denkbeeldige agens en w hebben dan het tegengestelde teeken, zoodat ook hier de verdichte groep uitgerekt zal worden in een richting, die een hoek van 45° met de oorspronkelijke assen maakt.

§ 6. *De toepassing der viriaal-stelling.* Om nu uit de voor w_1 gevonden waarde den spanningstensor te berekenen, zullen wij gebruik maken van de viriaal-stelling. De toepasselijkheid van deze stelling vóor het geval, dat ons bezighoudt, zullen wij echter vooraf moeten aantoonen. Beschouwen wij daartoe een bepaald volume in de ruimte, waarin het stroomende gas zich bevindt. Wij zullen er de gedaante van een recht parallelepipedum aan toekennen en de coördinaatassen evenwijdig aan de ribben kiezen. Aangezien wij den toestand stationair denken, zal de uitdrukking $\Sigma\, m\, x\, \dot{x}$, waarbij over alle moleculen in het volume gesommeerd wordt, constant zijn. Het feit, dat er door de begrenzingsvlakken moleculen in en uit de beschouwde ruimte treden, doet hieraan niets af. Wij besluiten eruit, dat:

$$\frac{d}{dt}(\Sigma\, m\, x\, \dot{x}) = 0 = \Sigma\, m\, \dot{x}^2 + \Sigma\, x\, X + O\, m\, (x_1 - x_2) \int \dot{x}^2 f(\dot{x})\, d\dot{x} \quad . \quad (18)$$

Hierin is X de x-component van de op een molecuul werkende kracht, zijn x_1 en x_2 de abscissen van de begrenzingsvlakken van het parallelepipedum loodrecht op de x-as, en is O de inhoud dezer vlakken. $f(\dot{x})\, d\dot{x}$ geeft het aantal moleculen per c.c.M. aan, waarvan de x-component der snelheid ligt tusschen $\dot{x}$ en $\dot{x} + d\dot{x}$. De laatste term heeft betrekking op de verandering in de waarde van $\Sigma\, m\, x\, \dot{x}$, die een gevolg is van de door de vlakken $x_1 = c$ en $x_2 = c$ in- en uittredende moleculen. De door andere begrenzingsvlakken in- en uittredende moleculen zullen gemiddeld een bijdrage nul tot $\frac{d}{dt} \Sigma\, m\, x\, \dot{x}$ leveren. Stellen wij nu:

$$\dot{x} = \dot{x}_{th} + u,$$

waarin u de stroomsnelheid en $\dot{x}_{th}$ de snelheid der warmtebeweging voorstelt, en nemen wij in aanmerking, dat:

$$\Sigma\, 2\, m\, u\, \dot{x}_{th} = 0.$$

$$\int 2\, u\, \dot{x}_{th}\, f(\dot{x})\, d\dot{x} = 0$$

en

$$\Sigma\, m\, u^2 + O\, m\, (x_1 - x_2)\, u^2 \int f(\dot{x})\, d\dot{x} = 0$$

dan neemt vergelijking (18) den volgenden vorm aan:

$$\Sigma\, m\, \dot{x}^2_{th} + \Sigma\, x\, X + O\, (x_1 - x_2)\, m \int \dot{x}^2_{th}\, f(\dot{x})\, d\dot{x} = 0$$

Splitsen wij nu nog X in X_1 en X_2, waarin X_1 betrekking heeft op de onderlinge krachten der moleculen in het beschouwde volume en X_2 op de krachten door buiten het volume liggende lichamen uitgeoefend op de erin bevatte moleculen. Wij zullen alleen krachten X_2 hebben in aanmerking te nemen, die in de vlakken $x_1 = c$ en $x_2 = c$ aangrijpen; de andere zullen gemiddeld nul opleveren. Verder zullen wij mogen stellen:

$$(\Sigma\, X_2)_{x_1} + m\, O \int \dot{x}_{th}{}^2\, f(\dot{x})\, d\dot{x} = p_{xx}\, O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

waarin $(\Sigma\, X_2)_{x_1}$ voorstelt de som van alle krachten X_2, die in het vlak $x_1 = c$ aangrijpen en p_{xx} op de bekende wijze een element van den spanningstensor. Immers het linker lid van (19) geeft aan de totale verandering van hoeveelheid van beweging, die, zoowel tengevolge van transport door de moleculen bij hun thermische beweging, als tengevolge van krachten, door hetgeen links van het vlak $x_1 = c$ ligt in de stof, die rechts van dat vlak ligt, wordt veroorzaakt. Daar $O(x_2 - x_1) = V$ vinden wij:

$$p_{xx}\, V = \Sigma\, m\, \dot{x}^2 + \Sigma\, x\, X_1$$

of

$$p_{xx} = \frac{RT}{V} - \Sigma'\, x\, X_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

wanneer het teeken Σ' in de laatste vergelijking een sommatie aanduidt over alle moleculen in een c.c.M.

§ 7. *De spanningstensor in een stroomende vloeistof.* Gaan wij thans $p_{\xi\xi}$ berekenen volgens vergelijking (20) dan vinden wij

$$p_{\xi\xi} = \frac{RT}{V} - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial r_{12}}\, n_1 n_2\, \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{r_{12}}\, d\omega_1 d\omega_2, \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

waarin $d\omega_1$ en $d\omega_2$ twee ruimte-elementen zijn, wier afstand door r_{12} wordt voorgesteld en waarin de dichtheid der moleculen respectievelijk n_1 en n_2 bedraagt. Wij kunnen nu stellen

$$n_1 = \bar{n} + \Delta_1 + w_1(\bar{n} + \Delta_1)$$
$$n_2 = \bar{n} + \Delta_2 + w_2(\bar{n} + \Delta_2).$$

$\bar{n}$ stelt hierin de gemiddelde dichtheid voor, Δ de afwijking, zooals wij die ook zonder stroom zouden kunnen verwachten, terwijl $w_1 n_1 = w_1 (\bar{n} + \nabla_1)$ volgens § 4 de afwijking van de gemiddelde dichtheid voorstelt, die door den stroom wordt teweeggebracht. Hierbij zijn termen, die w^2 zouden bevatten, verwaarloosd. In het product $n_1 n_2$ zal de term $(\bar{n} + \Delta_1)(\bar{n} + \Delta_2)$ dezelfde waarde opleveren voor alle coördinaatrichtingen. Deze term zou ook voorkomen, als er geen stroom was, en de integraal ervan in vergelijking (21) zal den term $\frac{\mathbf{a}}{v^2}$ van den hydrostatischen druk volgens de toestandsvergelijking opleveren. Merken wij nog op, dat $\overline{n\Delta_1} = 0$ en $\overline{n\Delta_2} = 0$, dan kan (21) als volgt geschreven worden:

$$p_{\xi\xi} - p = -\iint \frac{\partial\varphi}{\partial r_{12}} \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{r_{12}} (w_1 n_1 \Delta_2 + w_2 n_2 \Delta_1 + n_1 w_1 n_2 w_2) d\omega_1\, d\omega_2 \quad (21a)$$

Den derden term zullen wij verwaarloozen, terwijl de 1ste en 2de gemiddeld gelijk zullen zijn, zoodat wij twee keer den 1sten zullen mogen nemen. Wij zullen er de waarde voor w_1 in substitueeren, die wij in vergelijking (17) gevonden hebben, waarin wij, daar, wanneer Δ' overal nul is, ook $w_1 = 0$ wordt, n' door Δ' mogen vervangen. Zoo vinden wij:

$$p_{\xi\xi} - p = -\frac{\sqrt{3\pi}}{al} \frac{a}{kT} \iiiint n_1 \Delta_2 \Delta' \frac{\partial\varphi}{\partial r'} \frac{(\xi - \xi')^2 - (\zeta - \zeta')^2}{r'}$$
$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial\varphi}{\partial r_{12}} \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{r_{12}} d\omega' d\omega\, d\omega_1 d\omega_2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21b)$$

en op dezelfde wijze:

$$p_{\zeta\zeta} - p = -\frac{\sqrt{3\pi}}{dl} \frac{a}{kT} \iiiint n_1 \Delta_2 \Delta' \frac{\partial\varphi}{\partial r'} \frac{(\xi - \xi')^2 - (\zeta - \zeta')^2}{r'}$$
$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial\varphi}{\partial r_{12}} \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)^2}{r_{12}} d\omega' d\omega\, d\omega_1 d\omega_2 .$$

Het zal bezwaarlijk gaan de waarde dezer uitdrukkingen nauwkeurig te berekenen. Ik zal mij ertoe bepalen een ruwe taxatie te geven van de orde van grootte en aan te toonen, dat $p_{\xi\xi} - p$ en $p_{\zeta\zeta} - p$ gelijke doch tegengestelde waarde verkrijgen, wat, in ver-

band met de eigenschappen van den spanningstensor ook het geval moest zijn.

Indien voor twee verschillende ruimte-elementen de waarden voor Δ steeds onafhankelijk van elkander waren, zou $\overline{\Delta_2 \Delta'} = 0$, behalve als wij het element $d\omega'$ met $d\omega_2$ laten samenvallen. Lieten wij dan de grootte van $d\omega_2$ tot nul naderen, dan zou het rechterlid van (21*b*) nul worden. De Δ's voor verschillende ruimte-elementen zijn echter niet onafhankelijk, maar wanneer Δ_2 b.v. positief is, zullen de Δ's in de naastbijgelegen elementen waarschijnlijk ook positief zijn, zoodat het product $\Delta_2 \Delta' d\omega_2 d\omega'$ niet alleen voor $d\omega' = d\omega_2$ maar voor een eindig gebied rondom $d\omega_2$ gemiddeld positief is. Ik zal in dit gebied aan Δ' niet alleen hetzelfde teeken, maar ook dezelfde waarde als aan Δ_2 toeschrijven en aannemen, dat de grootte ervan met de attractiespheer van een molecuul overeenkomt.[1]) Verder zal ik aannemen, dat wij een voldoende benadering voor $p_{\xi\xi} - p$ krijgen, wanneer wij aan n_1 de waarde $\overline{n}$ toekennen en dan voor $\int n_1 \, d\omega'$, waarbij wij de integratie over het zooeven bedoelde gebied uitstrekken, ν schrijven. ν stelt dan het gemiddelde aantal moleculen in een attractiespheer voor. Bij de kritische dichtheid zou ik geneigd zijn aan ν een waarde tusschen 5 en 25 toe te schrijven, hoewel over dit getal niet veel met zekerheid is te zeggen. Hierdoor gaat (21*b*) over in:

$$p_{\xi\xi} - p = -\frac{\sqrt{3\pi}}{al} \frac{a\nu}{kT} \iiint \Delta_2^{\,2} \frac{\partial \varphi}{\partial r_2} \frac{(\xi-\xi_2)^2 - (\zeta-\zeta_2)^2}{r_2} \frac{1}{r_1} \frac{\partial \varphi}{\partial r_{12}} \frac{(\xi_2-\xi_1)^2}{r_{12}} \, d\omega \, d\omega_1 d\omega_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21c)$$

Om het teeken van deze uitdrukking na te gaan brengen wij den oorsprong naar het punt $\zeta_2 \, \eta_2 \, \xi_2$ over en gaan eerst het teeken na der grootheid $\frac{\partial \varphi}{\partial r_2} \frac{(\xi-\xi_2)^2 - (\zeta-\zeta_2)^2}{r_2} \equiv Q$. De lijnen, die de hoeken tusschen de verplaatste ξ en ζ assen middendoordeelen, verdeelen het vlak in vier quadranten; twee daarvan bevatten de ξ-as en twee de ζ-as. In de twee quadranten, die de ξ-as bevatten, zal $Q > 0$ in de andere $Q < 0$ zijn. Gaan wij vervolgens het teeken na van $\int Q \frac{1}{r_1} d\omega = I$ dan zal dit teeken van de ligging van het punt

[1]) Niet onwaarschijnlijk is het grooter; maar daar elementen $d\omega'$ en $d\omega_2$, die veel grootere afstanden krijgen, toch niet merkbare bijdragen tot de waarde van het rechterlid van (21*b*) leveren, is de beperking tot deze grootte misschien gerechtvaardigd.

$\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1$ afhangen. Ligt dit punt in de quadranten waar $Q > 0$ dan zal ook $I > 0$ en omgekeerd. Vormen wij nu ten slotte $\int I \frac{\partial \varphi}{\partial r_{12}} \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{r_{12}} d\omega_1$ en integreeren wij eerst langs een cirkel $r_{12} =$ constant dan zullen de positieve waarden van I met grootere waarden van $(\xi_2 - \xi_1)^2$ vermenigvuldigd worden dan de negatieve waarden, zoodat het positieve teeken resulteert. Hadden wij $p_{\zeta\zeta} - p$ berekend, dan hadden wij met $(\zeta_2 - \zeta_1)^2$ vermenigvuldigd, zoodat dan de negatieve waarden van I met een grooteren factor waren vermenigvuldigd en het negatieve teeken geresulteerd was.

Om tenslotte tot een taxatie van de orde van grootte van $(p_{\xi\xi} - p)$ te geraken merken wij op dat:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial r} r\, dx\, dy\, dz = \frac{\mathbf{a}}{N^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

waarin $\mathbf{a}$ de bekende grootheid a van de toestandsvergelijking en N het aantal moleculen per moleculaire hoeveelheid voorstelt.

Verder nemen wij aan, dat in den factor $\frac{1}{r_1}$ voor r_1 de straal van de attractiespheer der moleculen (ϱ) mag geschreven worden, en dat de invloed van de factoren $\frac{(\xi - \xi_2)^2 - (\zeta - \zeta_2)^2}{r_2^2}$ en $\frac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{r_{12}^2}$ daarin zal bestaan, dat de waarde, die wij met weglating dier factoren zouden krijgen, met een matig getal μ, kleiner dan 1, vermenigvuldigd wordt.

Zoo vinden wij, als wij nog opmerken, dat $NkT = RT$:

$$p_{\xi\xi} - p = -\frac{a\sqrt{3\pi}}{al\,RT} \nu\mu\, \overline{\Delta^2}\, \frac{(\mathbf{a})^2}{N^3} \frac{1}{\varrho} \quad \ldots\ldots \quad (21d)$$

Hadden wij p berekend, dan hadden wij in het viriaal der attraktiekrachten ook een term met $\overline{\Delta^2}$ gevonden. Noemen wij dien p' dan is:

$$p' = \tfrac{1}{3}\, \overline{\Delta^2}\, \frac{\mathbf{a}}{N^2}$$

zoodat:

$$\frac{p_{\xi\xi} - p}{p'} = -\frac{a\sqrt{3\pi}}{3a\,l\,RT} \nu\,\mu\, \frac{\mathbf{a}}{N} \frac{1}{\varrho} = \pm 10^{-11}.$$

Daar het slechts om een ruwe taxatie te doen is, is hierin genomen:

$$a = 1 \quad \text{en} \quad \nu\mu = 1$$

$$a = 3.10^4$$

$$l = 10^{-7}$$

$$\varrho = 5.10^{-8}$$

$$N = 6.10^{23}$$

Nemen wij voor $p_k = 70$ atm. bij CO_2 en $\eta = 0{,}000678$, dan vinden wij:

$$\frac{\eta}{p} = \pm\, 10^{-11}$$

Nu is $p_k =$ rond $\frac{1}{8}\frac{\mathrm{a}}{v_k^2}$ en $p' = \frac{\overline{\Delta^2}}{\overline{n}^2}\frac{\mathrm{a}}{v_k^2}$, wanneer dus bij het kritisch punt de middelbare Δ wat kleiner, maar van dezelfde orde van grootte wordt, als $\overline{n}$ dan zal $p_{\xi\xi} - p$ voor een snelheidsverval $a = 1$ van dezelfde orde als η worden en dus zeker in aanmerking moeten worden genomen. Op grond hiervan zou men moeten verwachten, dat men bij de kritische dichtheid een abnormaal groote waarde van η zou vinden, wanneer men bij T_k de waarde η als functie der dichtheid naging. WARBURG en VON BABO [1]) hebben η voor CO_2 bepaald bij 32,6° bij verschillende dichtheden. η neemt met de dichtheid toe. Eenige onregelmatige stijging bij de kritische dichtheid blijkt niet uit hun waarnemingen. Interressant zou het zijn, wanneer dergelijke waarnemingen voor een temperatuur dichter bij T_k konden gedaan worden.

[1]) WIEDEMANN's Annalen. XVII p. 390. Anno 1882.

Natuurkunde. — De Heer P. ZEEMAN biedt mede namens Mej. A. SNETHLAGE een mededeeling aan over: „*Proeven over de voortplanting van het licht in bewegende, doorschijnende vaste stoffen*".

(Deze mededeeling zal in het volgende Zittingsverslag worden opgenomen).

De Voorzitter deelt mede dat met het oog op het Natuur- en Geneeskundig Congres, dat van 24—26 April a.s. te Leiden zal bijeenkomen, de *algemeene vergadering* der Akademie vastgesteld is op **Woensdag 23 April** a.s. en stelt voor de *gewone vergadering* **der Afdeeling** voor de maand April te houden op **Zaterdag 3 Mei** a.s. Aldus wordt besloten.

De vergadering wordt gesloten.

---

27 Augustus 1919.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING VAN ZATERDAG 3 MEI 1919.

DEEL XXVII.

N°. 10.

Voorzitter: de Heer H. A. LORENTZ.
Secretaris: de Heer P. ZEEMAN.

INHOUD.

Het Proces-verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van den Heer H. KAMERLINGH ONNES, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Een, met verzoek om bericht en raad, door Zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, bij renvooi van 2 April 1919 N°. 1102 Afd. K. W. aan de Afdeeling gezonden missive van Zijne Exc. den Minister van Buitenlandsche Zaken, waarbij deze doet toekomen een schrijven van het „Ramsay Memorial Comittee" dd. 30 Januari 1919 met daarbij gevoegd memorandum, den Minister overlegd door Harer Majesteits Gezant te Londen en waaromtrent gaarne vernomen zal worden welk antwoord er op te geven zal zijn.

De Voorzitter stelt de stukken in handen der leden-chemici, de Heeren P. VAN ROMBURGH, F. M. JAEGER, J. BÖESEKEN, ERNST COHEN, en F. A. H. SCHREINEMAKERS met verzoek om prae-advies, uit te brengen in de volgende vergadering, welke opdracht door de aanwezige leden wordt aanvaard. Aan den Heer SCHREINEMAKERS, niet ter vergadering tegenwoordig, zal het verzoek schriftelijk worden overgebracht.

3°. Eene missive van Zijne Exc. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen dd. 29 April 1919 n°. 1674, Afd. K. W. met bericht dat H. M. de Koningin bekrachtigd heeft de benoeming van den Heer H. A. LORENTZ tot Voorzitter en van den Heer A. F. HOLLEMAN tot Onder-Voorzitter der Afdeeling.

Aangenomen voor kennisgeving.

De Voorzitter brengt naar aanleiding van het aftreden van den Heer D. J. KORTEWEG als Onder-Voorzitter een woord van hulde aan den aftredende. In hem verliest de Afdeeling een bestuurslid, dat steeds de warmste belangstelling in het werk der Afdeeling toonde, voor wien moeite en arbeid nooit te veel zijn geweest en wiens helder en overwogen oordeel altijd zeer op prijs werd gesteld. Door applaus geeft de vergadering instemming met het gesprokene.

Wiskunde. — De Heer Brouwer biedt een mededeeling aan: „*Opsomming der periodieke transformaties van den torus*".

§ 1. *Transformaties met invariante indicatrix en invariante cyclose.*

We zullen zeggen, dat een transformatie *de cyclose invariant laat*, wanneer zij *iederen cykel* (d. w. z. iedere niet samentrekbare enkelvoudige gesloten kromme), *ook wat den zin betreft, aequivalent transformeert*. Een n-periodieke transformatie t met invariante indicatrix en invariante cyclose van den torus R kan dan geen punt invariant laten [1]), zoodat haar moduuloppervlak [2]) op grond van de formule van Hurwitz [3]) een torus T moet zijn. De beide oppervlakken R en T bezitten een gemeenschappelijk enkelvoudig samenhangend overgewikkeld oppervlak S. Dit oppervlak S kan op zoodanige wijze *topologisch* (d. w. z. eeneenduidig en continu) worden afgebeeld op een Cartesisch vlak C, dat op C de translatie

$$(\tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} x' = x + a \quad (a \text{ geheel}) \\ y' = y \end{cases}$$

beantwoordt aan t, en de translatiegroep, voortgebracht door de translaties

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \end{cases} \qquad \text{en} \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

aan de transformatiegroep van S, die alle punten van T invariant laat. Nu correspondeeren twee punten P_1 en P_2 van C dan en slechts dan met hetzelfde punt van T, als ze *hetzij* met hetzelfde punt van R correspondeeren, *hetzij* P_1 door een macht der translatie τ wordt overgevoerd in een punt P_3, dat met hetzelfde punt van R correspondeert als P_2. Hieruit volgt *ten eerste*, dat een translatie van C van den vorm

$$\begin{cases} x' = x + b \quad (b \text{ geheel}) \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

kan worden aangegeven, die alle punten van R invariant laat, *ten tweede*, dat, als n de minimale waarde is, waarvoor de translatie van C

[1]) Deze Verslagen XXVII, p. 609—612.

[2]) Ibid., p. 1201.

[3]) Math. Annalen 41, p. 404.

$$\begin{cases} x' = x + n \\ y' = y \end{cases}$$

alle punten van R invariant laat, a en n onderling ondeelbaar zijn. Derhalve wordt voor een passend systeem van ringhoekcoördinaten op R de transformatie t voorgesteld door de formules:

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi \\ \psi' = \psi + \dfrac{2\pi a}{n} \end{cases}$$ (a en n onderling ondeelbare geheele getallen).

§ 2. *Transformaties met invariante indicatrix en variabele cyclose.*

Zij t de beschouwde n-periodieke transformatie van den torus R, t' een met t correspondeerende transformatie van het enkelvoudig samenhangende overgewikkelde oppervlak S van R. Door een passende afbeelding van S op een Cartesisch vlak C gaat t' over in een transformatie t'' van C, die van een periodieke, homogene lineaire transformatie met geheele coëfficienten en een determinant $+1$ slechts begrensde afwijkingen vertoont, dus zich, evenals de laatste transformatie, periodiek, eeneenduidig en continu over den oneindig verren cirkel van C laat uitbreiden, waarbij op dezen cirkel de omloopszin invariant is, dus geen invariant punt optreedt, zoodat t'' in het eindige van C, dus ook t op R een invariant punt bezitten moet. Daar derhalve het moduuloppervlak van t door R *niet* onvertakt wordt overdekt, is dit moduuloppervlak op grond van de boven geciteerde formule van Hurwitz een bol B, waarover R als een regelmatig Riemannsch oppervlak van het geslacht één, n-bladig en met een n-bladig vertakkingspunt in het zooeven aangetoonde voor t invariante punt ligt uitgebreid, zoodat slechts vier gevallen mogelijk zijn [1]):

I. $n = 2$; R bedekt B met vier tweebladige vertakkingspunten.

II. $n = 6$; R bedekt B met een tweebladig, een driebladig en een zesbladig vertakkingspunt.

III. $n = 4$; R bedekt B met twee vierbladige en een tweebladig vertakkingspunt.

IV. $n = 3$; R bedekt B met drie driebladige vertakkingspunten.

In elk dezer vier gevallen is door de aangegeven structuur van het Riemannsche oppervlak de transformatie t volledig gekarakteriseerd.

§ 3. *Involutorische transformaties met omkeerende indicatrix.*

Zij I de verzameling der voor de beschouwde transformatie t van

[1]) Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1895, p. 241.

den torus R invariante punten, dan zijn drie gevallen te onderscheiden:

α. De complementairverzameling van I in R bestaat uit meer dan één gebied. Daar geen dezer gebieden door t in zichzelf met invariante randpunten kan worden getransformeerd, worden ze door t twee aan twee verwisseld. Beschouwen we twee zulke door t verwisselde gebieden g_1 en g_2, dan hebben ze een gemeenschappelijke grens, die zoowel voor g_1 als voor g_2 *onbewald*[1]) is, hetgeen alleen kan worden verwezenlijkt, als deze grens uit twee aequivalente cykels bestaat, zoodat t voor een passend systeem van ringhoekcoördinaten voorgesteld wordt door de formules:

$$\begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi. \end{cases}$$

β. De complementairverzameling van I in R bestaat uit één, met R niet identiek gebied g. Indien g niet topologisch afbeeldbaar was op een deelgebied van een bol, zou met t een involutorische transformatie met omkeerende indicatrix van het enkelvoudig samenhangende overgewikkelde oppervlak S van R correspondeeren, waarbij de complementairverzameling der invariante punten op S uit een enkel gebied zou bestaan, wat onmogelijk is. Derhalve is g afbeeldbaar op een deelgebied van een bol, zoodat zijn randen door t twee aan twee worden verwisseld.[2]) Beschouwen we twee zulke door t verwisselde randen r_1 en r_2, dan zijn ze beide voor g onbewald, vallen dus samen in een enkelen cykel k van R. Het gebied $g+k$ is nu niet meer afbeeldbaar op een deelgebied van een bol, kan dus geen randen meer bezitten, want deze randen zouden eenerzijds voor t invariant moeten zijn, andererzijds door t twee aan twee moeten worden verwisseld. Daar derhalve $g+k$ met R identiek is, wordt t voor een passend systeem van ringhoekcoördinaten voorgesteld door de formules:

$$\begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi + \varphi. \end{cases}$$

γ. De verzameling I valt weg. In dit geval bezit t een eenzijdig, gesloten modnuloppervlak M. Zij k een cykel van M, h zijn beeld op R, dan correspondeert met een omloop van h hetzij een dubbele, hetzij een enkele omloop van k. In het eerste geval is k eenzijdig, in het tweede geval tweezijdig. Indien M geen twee elkaar niet snijdende eenzijdige cykels bezat, zouden, als we het beeld op R van een willekeurig gekozen eenzijdigen cykel van M door s voorstellen, twee voor t aequivalente punten van R niet zonder snijding

[1]) Math. Annalen 71, p. 321.

[2]) Ibid. 80, p. 36—41.

van s verbonden kunnen worden, zoodat R door s in twee voor t aequivalente, dus dezelfde topologische structuur bezittende gebieden zou worden verdeeld, wat onmogelijk is. We kunnen dus op M twee elkaar niet snijdende eenzijdige cykels r_1 en r_2 kiezen. Daar r_1 en r_2 de resteerende punten van M niet in gescheiden gebieden verdeelen, verdeelen ook de beelden s_1 en s_2 op R van r_1 en r_2 de resteerende paren van voor t aequivalente punten van R niet in gescheiden gebieden, m. a. w. s_1 en s_2 verdeelen R in twee voor t aequivalente gebieden, zoodat t voor een passend systeem van ringhoekcoördinaten wordt voorgesteld door de formules:

$$\begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi + \pi. \end{cases}$$

§ 4. *Niet-involutorische transformaties met omkeerende indicatrix.*

Zij t de beschouwde $2n$-periodieke transformatie van den torus R. Daar voor $n > 1$ geen $2n$-periodieke, homogene lineaire transformatie in twee variabelen met geheele coëfficienten en een determinant -1 bestaat, laat t^2 de cyclose van R invariant, bezit dus als moduul-oppervlak een torus T, waarop t als een involutorische transformatie t_1 met omkeerende indicatrix wordt afgebeeld. Voeren we op T de volgens § 3 bij t_1 behoorende ringhoekcoördinaten φ en ψ in, beschouwen we twee door de vergelijkingen $\varphi = a$ en $\varphi = -a$ bepaalde cykels r_1 en r_2 van T, en stellen we de beeldcykels van r_ν op R voor door ${}_1s_\nu, {}_2s_\nu, \ldots . {}_ms_\nu$. Daar alle cykels ${}_\mu s_\nu$ voor t aequivalent zijn en hun cyklische volgorde door t wordt omgekeerd, kan hun aantal slechts *twee* bedragen, zoodat $m = 1$ moet zijn. De transformatiegroep van het enkelvoudig samenhangende overgewikkelde oppervlak S van R en T, die alle punten van R invariant laat, wordt dus voortgebracht door de translaties

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi \\ \psi' = \psi + 2n\pi \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} \varphi' = \varphi + 2\pi \\ \psi' = \psi + 2h\pi. \end{cases}$$

Kiezen we φ en $\psi - h\varphi$ als nieuwe ringhoekcoördinaten (φ, ψ) op T, dan worden deze translaties

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi \\ \psi' = \psi + 2n\pi \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} \varphi' = \varphi + 2\pi \\ \psi' = \psi, \end{cases}$$

terwijl t_1 wordt voorgesteld door formules van den vorm

$$\begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi + k\varphi \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi + k\varphi + \pi, \end{cases}$$

dus t in dezelfde coördinaten door formules van den vorm

$$\begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi + k\varphi + 2\ \ \pi \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi + k\varphi + (2q+1)\pi, \end{cases}$$

d. w. z. in ieder geval door formules van den vorm

$$\begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi + k\varphi + g\pi, \end{cases}$$

en in correspondeerende ringhoekcoördinaten *van* R door formules van den vorm

$$\begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi + \frac{k}{n}\varphi + \frac{g}{n}\pi, \end{cases}$$

waarin de eenduidigheid van t op R eischt, dat $\frac{k}{n}$ gelijk is aan een geheel getal e, dat, door φ en $\psi - b\varphi$ voor een passende waarde van b als nieuwe ringhoekcoördinaten (φ, ψ) op R in te voeren, gelijk aan 0 of 1 kan worden gemaakt, zoodat voor t ten slotte de volgende formules gevonden worden:

$$\begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi + \frac{g}{n}\pi \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} \varphi' = -\varphi \\ \psi' = \psi + \varphi + \frac{g}{n}\pi, \end{cases}$$

waarin g en n onderling ondeelbaar zijn.

Dierkunde. — De Heer J. F. VAN BEMMELEN biedt eene mededeeling aan over: *„De onderlinge verhouding der soorten van het geslacht Saturnia, beoordeeld naar de kleurenteekening harer vleugels".*

In zijn handboek der palaearktischen Gross-Schmetterlinge schrijft STANDFUSS op pag. 106 aan het slot zijner paragraaf over „das relative Alter der drei Arten: Saturnia spini, pavonia und pyri": „Würden wir nur die Imagines ins Auge fassen, so spräche zwar sehr viel dafür dass spini älter ist als pavonia. Denn beide Geschlechter von spini ebenso wie die der erst 1882 entdeckten Sat. cephalariae Ch. (von Kasikoparan) und das Weibchen von Sat. pavonia haben einen ausserordentlich ähnlichen Typus. Aus diesem Typus tritt das Männchen von Sat. pavonia schroff heraus, sodass pavonia als die im Falterkleide neuerdings veränderte Art erscheinen muss. Allein ob wir die Entstehung der Sat. pyri vor der Herausbildung dieser kleineren Formen oder nach derselben anzunehmen haben, darüber lässt sich aus der Imago der Sat. pyri ein wirklich sicherer Schluss wohl nicht ziehen.

Anders aber steht es mit dem Raupen- und Puppenstadium. Hier konnte klar nachgewiesen werden, dass S. spini, pavonia und pyri in mehrfacher Beziehung 3 verschiedene Grade des Geschütztseins gewissen feindlichen Faktoren der Aussenwelt gegenüber darstellen. Auf dieser Stufenleiter nimmt spini stets die niedrigste und pyri stets die höchste Stufe ein. Bei der so ausserordentlich engen Verwandschaft und der grossen Aehnlichkeit der biologischen Verhältnisse der 3 Arten sind wir darum zu der Annahme gezwungen, dass spini früher auftrat als pavonia und pavonia früher als pyri. Oder, wenn wir den für dieses Verhältniss wissenschaftlich eingeführten Ausdruck gebrauchen: dass spini die phylogenetisch älteste, pavonia eine jüngere, pyri phylogenetisch die jüngste Form ist. Es würde ja absurd sein, bei so nahestehenden Formen das vollkommenere Lebewesen früher entstanden zu denken als das unvollkommenere".

Deze beschouwingen van STANDFUSS gaven mij aanleiding de vleugelteekening der *Saturninen*-soorten onderling en met die van verwante geslachten te vergelijken, teneinde na te gaan of de daaruit voortvloeiende gevolgtrekkingen zijne meening over het verband tusschen de drie door hem onderzochte soorten al of niet bevestigden.

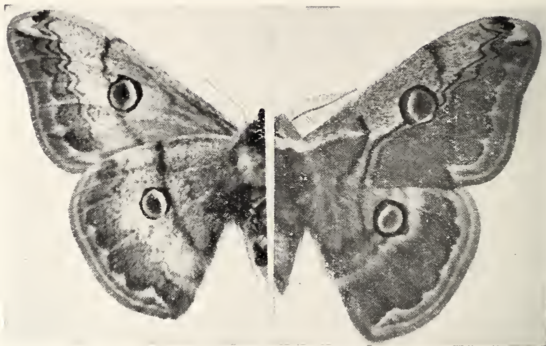


Fig. 1. SATURNIA BOISDUVALII ♂.



Fig. 2. OPHIDERES DIVIDENS ♂.



Fig. 3. NYCTIPAO CREPUSCULARIS ♀.

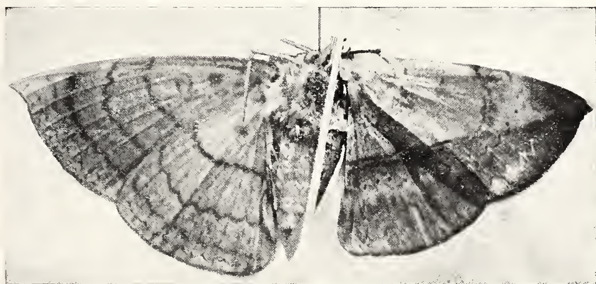


Fig. 4. EMMONDIA PUNCTATA ♀.

E. Theyssen, phot.

Beschouwd in het licht der algemeene regels, die ik voor de beoordeeling van het karakter der vleugelteekening meende te mogen opstellen, en wier toepasselijkheid ik voor Hepialiden, Cossiden, Arctiïden en Sphingiden heb trachten te bewijzen, kom ik tot het besluit, dat niet p y r i, maar p a v o n i a als de oorspronkelijkste vorm beschouwd zou moeten worden. Immers bij deze laatste wijken de gekartelde submarginale dwarslijnen en banden in richting het minst van den buitenomtrek der vleugels af, en bestaat er ook het geringste onderscheid tusschen vóór- en achtereind dier strepen en banden, zoodat de submarginale band bij haar het regelmatigst en eenvoudigst is. Eveneens is het onderscheid tusschen vóór- en achtervleugel zoowel aan boven- als aan onderzijde, en dus ook dat tusschen boven- en onderkant van elk der vleugelparen op zich zelf, bij p a v o n i a nog geringer dan bij de twee andere soorten.

Vergeleken met andere Bombyciden en met de overige families der Heterocera, vertoont de kleurenteekening van p a v o n i a grooter overeenkomst met het voor deze alle door mij aangenomen grondpatroon van zeven donkere dwarslijnen, dan de twee andere Saturniasoorten. Hiertegenover staat wel is waar, dat bij p a v o n i a het mannetje door bontere kleurschakeering en kleineren lichaamsomvang zich op het eerste gezicht sterk van het wijfje onderscheidt, wat blijkbaar op STANDFUSS een grooten indruk heeft gemaakt, maar bij nauwkeurig toezien en overweging is dit verschil niet zoo groot als het lijkt, en behoeft het ook niet van bijzonder gewicht geacht te worden. Het verschil in kleurentint blijkt n.l. in verband te staan met het veelvuldig voorkomend verschijnsel der verkleuring (dus met partieele eenkleurigheid), en wel is het aan de bovenzijde de achtervleugel, aan den onderkant de voorvleugel, die gedeeltelijk vergeeld is, onder eveneens partieele en daarbij zeer geringe verbleeking van het patroon. Bovendien kan nog op goede gronden in twijfel getrokken worden of de gele tint op zichzelf, afgezien van hare uitbreiding over het gebied van vlekken en stippen, die er door worden verflauwd of geheel weggevaagd, wel moet opgevat worden als een secundaire verandering van een meer oorspronkelijke kleur, welke laatste dan op de bovenzijde van den voorvleugel en den onderkant van den achtervleugel bewaard gebleven zou zijn. Immers die bruingele tint is eigen aan een zeer groot aantal Bombyciden uit verschillende geslachten, en maakt daardoor juist den indruk van een zeer oorspronkelijke kleur. Het ware dus denkbaar, dat haar voorkomen bij 't mannetje van p a v o n i a behoorde opgevat te worden als terugkeer van een oude tint, en niet als 't optreden van een nieuwe.

Maar hoe dit ook zij, in allen gevalle behoeven de tinten waarin het patroon is uitgevoerd, hier evenmin als in andere gevallen in aanmerking genomen te worden bij de beoordeeling der teekening van dat patroon. En als men nu de teekeningen van het mannetje nauwkeurig vergelijkt met die van 't wijfje, en daarbij ook let op de onder 't geel een weinig verbleekte merken en vlekken, dan ziet men dat tusschen ♀ en ♂ tot in de kleinste details overeenkomst bestaat.

Evenmin is het noodzakelijk, de sexueele dimorphie op te vatten als een belangrijk progressief kenmerk, waardoor pavonia zich zou onderscheiden van spini en pyri, en zou karakteriseeren als een pas sedert kort sterk gewijzigde vorm, in tegenstelling met de andere, die meer conservatief zouden zijn. Secundaire en tertiaire sexueele verschillen bestaan bij allerlei Lepidoptera, evenals bij andere Insecten. In de groep der Bombyciden komen zij bij een bijzonder groot aantal vormen voor. Moet nu elk dezer gevallen op zichzelf worden beschouwd, en opgevat als een zelfstandige afwijking van den oorspronkelijken toestand, bij welken laatsten mannetje en wijfje in vorm, grootte, kleur en teekening aan elkaar gelijk waren? Of zou ook reeds onder de voorouderlijke Bombycidae, in den tijd toen zij nog meer op elkaar geleken, en in geringer aantal soorten en varieteiten bestonden dan tegenwoordig, reeds het verschijnsel der sexueele dimorphie zich hebben voorgedaan, zoodat naast vormen met aan elkaar gelijke ook zulke met onderling verschillende sexen voorkwamen? In dat geval zou de sexueele dimorphie van pavonia misschien kunnen berusten op het manifest worden of blijven van een zeer ouden erfelijken aanleg.

Maar zelfs onafhankelijk van deze vraag, waaromtrent moeilijk zekerheid is te erlangen, blijft het twijfelachtig of spini en pyri op grond van de gelijkheid hunner sexen wel als primitiever dan pavonia beschouwd zouden mogen worden.

Het lijkt mij n.l. volstrekt niet uitgemaakt dat bij pavonia het in kleur afwijkende mannetje als de gewijzigde, het wijfje, dat zooveel meer gelijkenis met pyri en spini schijnt te bezitten, als de onveranderd gebleven vorm mag opgevat worden.

Bepaalt men zich tot het blindelings toepassen der algemeene regels, dan lijkt weliswaar de zaak eenvoudig genoeg. Bij 't wijfje van pavonia, en de beide sexen van spini en pyri, vertoonen vóór- en achtervleugels aan onder- en bovenzijde dezelfde blanke tint, hier en daar getemperd door een overstrooiing met zwarte korreling, en onderbroken of in fragmenten gedeeld door aderbelijning en gebogen of rechtloopende dwarsmerken. Maar zoowel deze over de

geheele oppervlakte heerschende blanke tint als de gelijksoortige teekening van vóór- en achtervleugels, en van onder- en bovenkant, maakt op mij meer den indruk van een secundair verworven gelijkheid, dan van werkelijke oorspronkelijkheid.

M. i. hebben wij hier te doen met een dergelijk geval als bij de geheel eenkleurige vlinders, zooals de Citroenvlinder (Gonepteryx rhamni) of het Geaderd witje (Aporia crataegi), waar de eenvondigheid wel zonder twijfel berust op vereenvoudiging, onder geheele of gedeeltelijke verdwijning van het kleurenpatroon. Nog treffender is de (zooals van zelf spreekt slechts oppervlakkige) overeenkomst met de Parnassia's of Apollovlinders, omdat bij deze, evenals bij de Saturnidae, hoog gedifferentieerde oogvlekken op de vòòr- maar vooral op de achtervleugels het meest in 't oog loopende deel van 't patroon vormen, terwijl het toch wel als een uitgemaakte zaak mag beschouwd worden, dat de vlekkenteekening der Parnassinen door reductie en differentiatie is ontstaan uit een veel gevulder patroon van meer eenvormige merken, gelijk dat voorkomt bij Thais polyxena en verwanten.

Zoodra wij de gelijkheid van vóór- en achtervleugel, boven- en onderkant bij het wijfje van pavonia en bij beide sexen van spini en pyri als secundair verworven opvatten, bestaat er geen bezwaar meer om de kleurenteekening van het mannetje der eerstgenoemde soort als oorspronkelijker dan die van 't wijfje te beschouwen. Van dat standpunt uit mogen wij dan opmerken, dat de tegenstelling tusschen de vergeelde bovenvlakte van den achtervleugel en de meer in 't grijze spelende van den voorvleugel, op welken laatste de teekening minder onder de grondkleur schuilgaat, beantwoordt aan 't gewone type der vlindervleugelteekening, aangezien bij de overgroote meerderheid der vlinders een diergelijke tegenstelling tusschen voor- en achtervleugel bestaat.

In het feit dat de (in dit geval gele) verkleuring op een gedeelte der *boven*zijde van den *achter*vleugel en der *onder*zijde van den *voor*vleugel voorkomt, stemt het mannetje van pavonia overeen met Smerinthus ocellata en vele andere vlindersoorten. Tot zekere hoogte wordt het veelvuldig voorkomen en de gelijksoortige uitbreiding van deze verkleuring verklaard door de houding in de rust dezer vlinders: de verkleurde gedeelten zijn juist diegene, welke in ruststand door andere vleugelpartijen worden overdekt. In zijne verhandeling: Sur la position de repos des Lépidoptères, heeft J. T. Oudemans hierop de aandacht gevestigd, en als zijne meening uitgesproken, dat bij de ontwikkeling en de vervorming van het kleurenpatroon de bedekte en de onbedekt blijvende gedeelten elk

hun eigen weg zijn gegaan (pag. 81—83), waarbij zoowel het eene als het andere verder van den oorspronkelijken toestand kan afgeweken zijn.

In 't algemeen kan ik mij met deze opvatting wel vereenigen, maar voor 't hier behandelde geval geeft zij weinig licht. Het onderscheid tusschen de in rust bedekte en onbedekte gedeelten der vleugels is bij het mannetje van pavonia reeds gering, en bij 't wijfje niet noemenswaard, evenmin als bij beide sexen van spini en pyri. De teekening schijnt dus hier geen verband te houden met de gewoonte dezer dieren, om de vleugels in rust gedeeltelijk over elkaar heen te schuiven. Dat bij de mannelijke pavonia toch aanduidingen van genoemd onderscheid voorkomen, zou dus een aanwijzing kunnen zijn, dat de oorspronkelijke invloed van genoemde gewoonte op de kleurenteekening bij de Saturnia's weder secundair zijn kracht gaandeweg verliest.

De zoozeer in 't oog loopende oogvlekken moeten zich dunkt mij hand in hand met die verandering in den invloed der rusthouding ontwikkeld hebben uit eenvoudiger discoïdaalvlekken. Dit bewijst reeds hun zeer verschillende graad van ontwikkeling bij de onderscheiden soorten van het geslacht Saturnia en verwante geslachten. Trouwens oogvlekken zijn altijd speciale differentiaties, die zich secundair hebben ontwikkeld op den grondslag van een primitiever en eenvoudiger kleurenpatroon, uit welks elementen zij zijn ontstaan door wijzigingen in den oorspronkelijken vorm, kleur, grootte en richting.

In mijn vorig artikel, over de Vleugelteekening der Sphingiden, heb ik dit trachten te bewijzen voor Smerinthus ocellata, evenals ik het vroeger betoogde voor de Hepialide Zelotypia stacyi. Maar het moet zich evenzeer laten bewijzen voor andere gevallen, b.v. voor Vanessa io en zoovele andere Nymphalidae alsmede Satyridae en Lycaenidae. Bij Cynthia bv. ziet men hoe oog- en gewone vlekken in de reeks der submarginaalvlekken met elkaar afwisselen, en dikwijls ook hoe een oogvlek der bovenzijde aan den onderkant door een gewone is vertegenwoordigd. Het onderscheid tusschen de beide seizoen-vormen is in de eerste plaats een gevolg van het verschil in de ontwikkeling der oogvlekken: bij den droogtevorm zijn zij weinig, bij den regenvorm hoog ontwikkeld.

Geven nu de hybridisatieproeven van Standfuss eenig licht in deze quaesties? Zoover ik zien kan slechts weinig; de hybriden zijn in 't algemeen intermediaire vormen, maar wat de breedte van den submarginalen donkeren zoom aangaat, komen ze meer met pavonia

dan met spini, en zeker in nog hoogere mate dan met pyri, overeen.

Voor de beoordeeling der onderlinge betrekkingen van de kleurenpatronen der Saturnidae is het echter m.i. evenals bij elke andere groep van vlinders gebiedend noodzakelijk om een zoo groot mogelijk aantal vormen met elkaar te vergelijken. Het gaat dus zeker niet aan, uit de beschouwing van een drietal nauw met elkaar verwante soorten op zichzelf, gevolgtrekkingen te maken omtrent den relatieven phylogenetischen ouderdom harer kleurenteekeningen.

Volgen wij nu dezen breederen weg, dan blijkt m. i. ten duidelijkste de gegrondheid der boven uitgesproken bewering, dat nl. het kleurenpatroon der Saturnia's een bijzonder geval is van dat der Bombycidae, en dit laatste weer van dat der Heterocera in 't algemeen.

Om te beginnen staat naast de drie genoemde soorten Saturnia (Caligula Jordan) boisduvalii, bij welke aan de bovenzijde de submarginale donkere zoom zich van voren naar achteren nog sterker verbreedt dan bij pyri, zoodat de mediane, iets lichtere partij onder de oogvlek, die bij pavonia het breedst is, sterk in proximale richting is verdrongen en bijna tot niets is gereduceerd. Op één plaats zijn de twee donkere banden die haar begrenzen, en die ik voor V en VI houd, door een donker bruggetje met elkaar verbonden. Dit gedeelte der teekening van boisduvalii lijkt daardoor het meest op het overeenkomstige deel der teekening bij het mannetje van pavonia, maar hier schijnt het verbindingsbruggetje zich tusschen IV en V te bevinden. Over 't algemeen is het niet gemakkelijk de juiste rangnummers der banden voor elken vorm met zekerheid te bepalen, maar de algemeene indruk, dien men uit de vergelijking van den bovenkant der verschillende soorten verkrijgt, is wel dat de achterwaartsche verbreeding van het donkere submarginale veld teweeggebracht wordt door het veldwinnen der verdonkering in proximale richting, waarbij telkens het gebied van een meer binnenwaarts liggenden dwarsband wordt ingelijfd. Bij 't wijfje van pavonia is de verdonkering (aan den achterrand) tot het gebied van II beperkt, bij 't mannetje, evenals bij beide geslachten van spini, is zij tot III gevorderd, bij pyri tot IV, bij boisduvalii tot V.

Aan den onderkant gaat de verbreeding in langzamer tempo, en meer gelijkmatig over de geheele uitgebreidheid van 't donkere submarginale veld. Dientengevolge gelijkt bv. de onderkant van spini meer op boven- en onderkant van pavonia, dan op zijn eigen bovenkant. Op den achtervleugel is de achterwaartsche verbreeding van den donkeren submarginalen zoom minder sterk dan op den voorvleugel, en wordt deze zoom over zijn geheele lengte door een lichten band

gescheiden van de donkere kartellijn, die distaal langs de oogvlek loopt (IV).

Aan de onderzijde daarentegen (die in de groote plaatwerken niet afgebeeld is) ontmoeten wij weer hetzelfde verschijnsel als daareven voor pavonia, spini en pyri werd vermeld: de loop der dwarsbanden is veel regelmatiger en oorspronkelijker dan op den bovenkant; vóór- en achtervleugel gelijken dientengevolge in veel hoogere mate op elkaar.

Opmerkelijk is een eenvoudige, bijna niet gekartelde, eenigszins uitgewischte, donkere dwarsstreep over 't midden van beide vleugels, op de voorvleugels loopt deze langs de distale zijde van de oogvlek, op de achtervleugels langs de proximale. Niettegenstaande dit onderscheid meen ik dat wij in beide gevallen te doen hebben met sporen van band IV. Hiertoe brengt mij vooral de vergelijking der bovenzijde. Op die van den voorvleugel vindt men n.l. het voorste stuk van dien band tot aan de oogvlek zeer duidelijk, wat een treffend onderscheid vormt tusschen boisduvalii en de drie eerst besproken soorten. Het achterste stuk (voorbij de oogvlek) daarentegen, ontbreekt, maar van den binnen-achterrand dier vlek loopt een zwarte lijn, schuin naar Bd. VI, die zich op de helft van haar verloop omknikt, en dan parallel met VI loodrecht op den achterrand tot aan dezen doorloopt. Dit laatste stuk behoort tot Bd. V, gelijk bewezen wordt door de vergelijking met de bovenzijde van den achtervleugel, waar IV, V en VI volledig, schoon flauw en half verborgen onder de beharing, zijn te zien.

Aan den onderkant van boisduvalii ligt dus de donkere submarginale zoom op beide vleugels tusschen de Banden II en III, aan de bovenzijde is dit slechts op den achtervleugel het geval. Bd. III kan daarbij zelfs als een afzonderlijke zelfstandige streep van den donkeren zoom gescheiden blijven, zooals de figuren van SEITZ dit vertoonen (Vol. II, Taf. 31[a]), terwijl aan het mij ter beschikking staande exemplaar de zwarte binnenrand van den veel breederen zoom niet gescheiden was.

In sommige opzichten komt Saturnia (Neoris Moore) schenkii met boisduvalii overeen, o.a. in de aanwezigheid op den onderkant van een zeer flauwe maar volledige dwarsstreep, die haar weg kiest over de oogvlekken. Hier bestaat evenwel geen verschil in de plaats dier streep op voor- en op achtervleugel, en is de streep ook op de bovenzijde terug te vinden, zij het ook onvolledig en ongelijkmatig.

Het allerduidelijkst en regelmatigst is hier Band V, terwijl VI en VII slechts even te zien zijn.

De oogvlekken zijn buitenwaarts verschoven, en in verband hier-

mede is de donkere submarginaalzoom gereduceerd, en zijn Band III en II niet van elkaar te onderscheiden. Zij worden vertegenwoordigd door één donkere dubbellijn, die in haar voorste gedeelte zeer sterk gekarteld is. Aan den buitenkant van deze dubbellijn loopt een witte baan, en daarop volgt een bijzondere breede lichtmanillakleurige marge. Vergelijking met pavonia ♀ maakt het waarschijnlijk, dat de donkere submarginale zoom zich moest bevinden tusschen de witte baan en de donkere dubbellijn, en dat men dus recht heeft te beweren, dat hij ontbreekt. Toch is dit slechts tot zekere hoogte juist: de verbreeding der donkere submarginale zone is zooals wij boven zagen een gevolg van het veldwinnen der verdonkering over de gebieden tusschen steeds verder naar binnen liggende dwarsbanden, en ditzelfde proces ziet men ook bij schenckii in gang, n.l. op den voorvleugel tusschen de dubbellijn II + III en de donkere streep, die IV vertegenwoordigt.

Aan de onderzijde van schenckii is het patroon eenvoudig, en bovendien verbleekt en gereduceeerd. O.a. is op de achtervleugels de oogvlek veel kleiner, flauwer en onvollediger dan aan de bovenzijde.

Bij de vele verwante geslachten, die zich rondom de Saturniden scharen, kan men nog meerdere argumenten vinden voor de bovenontwikkelde bewering, dat hun kleurenpatroon zich op hetzelfde schema van zeven donkere dwarsbanen laat terugbrengen, dat voor de Arctiïden geldig bleek.

Hier zij slechts gewezen op een vorm als Rhodinia fugax, die vermoedelijk II, III en V of VI vertoont, of Laepa damartis (Seitz II, Taf. 32^{d}) waar op den voorvleugel I, II, III en V of VI, op den achtervleugel I, II, III, IV en V (de laatste twee gedeeltelijk) geteekend staan. Zelfs in een zoo samengesteld en speciaal patroon als dat der Brahmaeïdae vindt men, met eenig opletten, de zeven primaire dwarsbanen betrekkelijk gemakkelijk terug.

Maar niet slechts voor het grondplan der vleugelteekening kan men met groote mate van waarschijnlijkheid aantoonen, dat het gemeenschappelijk is aan allerlei groepen van vlinders; ook de wijzigingen in dit plan schijnen bij de verschillende families van Lepidoptera naar overeenkomstige regels te verloopen. In het thans besproken geval der Saturninen is het de verbreeding van den submarginalen donkeren band naar den achterrand toe, welke het voornaamste onderscheid in patroon tusschen de verschillende hier besproken soorten teweegbrengt en aanleiding geeft om ze te rangschikken in de volgorde: pavonia, spini, pyri, boisduvalii, terwijl schencki meer den indruk maakt, dat de donkere band op zijn voorvleugels weer is achteruitgegaan.

Door deze verbreeding in caudalen zin ontstaat de indruk, dat schuin over den voorvleugel van spits naar wortel een scheidingslijn loopt, die hem verdeelt in een vóór-binnenst lichter en een achter-buitenst donkerder veld. Bestempelt men deze scheidingslijn met den naam V-diagonaal (daar de lijnen van beide vleugels tezamen in uitgespreiden stand de letter V vormen), dan kan men beweren dat de V-diagonaal-teekening bij tal van vlinders uit allerlei families voorkomt, en wel altijd als secundaire wijziging van het oorspronkelijke dwarsbanden-patroon. Bijzonder duidelijk is dit bij de Sphingiden uit de groep der Chaerocampinen, welke ik in een volgende mededeeling hoop te bespreken.

Maar het wordt evengoed aangetroffen in de families der Hepialidae, Noctuidae en Geometridae, en ook bij tal van Microlepidoptera. En bij de overgroote meerderheid dier gevallen is het V-diagonaal-patroon beperkt tot de bovenzijde van den voorvleugel, terwijl de onderzijde de oorspronkelijke dwarsbandenteekening vertoont.

Als bijzonder treffende voorbeelden vermeld ik Noctuiden behoorende tot de geslachten Ophideres, Nyctipao en Emmondia, Bombyciden zooals Eupterote, en ook vele Geometriden.

Naar aanleiding der soorten van Ophideres kan nog opgemerkt worden, dat de scheiding van het voorvleugelvlak in een vóór-binnenst en een achter-buitenst gedeelte, welke door de V-diagonaalteekening wordt teweeggebracht, bij verscheidene vormen, zooals O. tyrannus, salamina en fullonica, (zie Seitz III, Taf. 66) schijnt samen te hangen met de gelijkenis der geheele voorvleugelteekening op een verdord blad, waardoor de genoemde soorten behooren tot de categorie der z.g. blad-vlinders (blattähnliche Schmetterlinge).

Wij hebben dus hier wederom te doen met een kenmerk, dat zich in allerlei verschillende gedaanten kan voordoen; en derhalve in zijn wezenlijke geaardheid blijkbaar onafhankelijk is van de beteekenis, die het in sommige gevallen bezit voor het teweegbrengen van beschermende gelijkenis.

Verder blijkt uit de vergelijking der verschillende soorten met elkaar, dat ook de tegenstelling tusschen het voorste en het achterste deel der voorvleugel-oppervlakte zeer verschillend in aard en mate kan zijn. Bij sommige soorten is het eerste deel licht, het laatste donker, bij andere zijn beide ongeveer aan elkaar gelijk. Bij O. materna breidt zich over beide deelen een dwarsteekening van Cosside-merken (traits effilochés van Botke, Rieselung van Eimer) uit, en vindt men bij de éene sexe (♂) de V-diagonaal aanwezig,

bij de andere (♀) niet, terwijl daarentegen de A-diagonaal als een lichte veeg voor een gedeelte is ontwikkeld.

Naast de V-diagonaal kan men n.l. ook de A-diagonaal-teekening onderscheiden, die van voor-binnen naar achter-buiten schuin over het vleugelvlak loopt, en dikwijls eenig verband schijnt te bezitten met de scheiding van dit vlak in een wiek- en een waaiergedeelte (Spreiten- und Faltenteil), zooals SPULER die van elkaar onderscheiden heeft.

Bij Miniodes discolor, die met ophideres na verwant is, deelt een donkere A-diagonaal het oranje-voorvleugelvlak in twee gedeelten, terwijl op beide deze deelen de Cosside-merken goed ontwikkeld zijn. Opmerkelijk is hier, dat de achtervleugel aan zijn bovenzijde gelijkmatig roze is gekleurd, terwijl aan den onderkant deze eenkleurigheid op den voorvleugel voorkomt, terwijl de achtervleugel voor 't grootste deel de Cosside streepjes vertoont.

Bij Nyctipao crepuscularis ♀ (zie Seitz III, Taf. 58) ziet men op de bovenzijde drieërlei richting van teekening in het vleugelpatroon samenwerken: 1° de dwarsrichting, die vooral in de witte lijn, welke van vóór- naar achterrand over het midden van vóór- en achtervleugel doorloopt, maar ook nabij den vleugelwortel in een donkeren band, die Bd. VI of VII vertegenwoordigt, is te onderkennen; 2° de V-diagonaal-teekening op den voorvleugel; 3° een witte streep, die daarmede een stompen hoek vormt, en evenwijdig loopt aan de V-diagonaal. Binnen den hoek, dien V- en A-diagonaalteekening met elkaar maken, heeft zich uit elementen der dwarsteekening een oogvlek ontwikkeld.

Nog duidelijker staan de drie richtingen in donkere banen op roomwitten ondergrond afgeteekend op de voorvleugels der Arctiide Areas galactina.

Zoo talrijk zijn de gevallen van V- en A-diagonaalteekening, dat ik zelfs geen poging wil doen, om ze op te sommen en met elkaar te vergelijken. Maar als resultaat van mijn vergelijkend onderzoek durf ik beweren, dat overal het secundaire karakter dezer teekening met zekerheid is te constateeren, en dat in de overgroote meerderheid der gevallen de onderkant geen spoor van een dezer beide schuine lijnen vertoont, maar daarentegen bijna altijd min of meer duidelijke resten der zeven oorspronkelijke dwarsbanden, die ook op den bovenkant veelvuldig, zij het ook gedeeltelijk, vertegenwoordigd zijn. Bij Rhopalocera schijnt de V-diagonaalteekening, als zij voorkomt, zich tot den onderkant te bepalen en hier het bladnabootsende karakter teweeg te brengen.

Groningen, April 1919.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan van den Heer FRED. SCHUH: „*Algemeene definitie van limiet met toepassing op limietstellingen* [1]).

(Mede aangeboden door den Heer W. KAPTEYN).

1. We denken ons een verzameling V van reëele of complexe getallen, waarin een zelfde getal meerdere malen mag voorkomen. Dit kan gebeuren doordat van de getallen van V een ontstaanswijze gegeven is en verschillende ontstaanswijzen tot hetzelfde getal voeren. Die gelijke getallen worden dan toch als verschillende elementen van V aangemerkt, zoodat onderscheid gemaakt wordt tusschen een getal op deze wijze en datzelfde getal op gene wijze ontstaan.

2. We denken verder een wet gegeven, *die aan ieder positief getal* δ *een* (*uit minstens één element bestaande*) *deelverzameling* V_δ *van* V *toevoegt*, en wel zoodanig, *dat* $V_{\delta'}$ *een deel is van* V_δ, *zoodra* $\delta' < \delta$ *is*. Is nu L een zoodanig (reëel of complex) getal, *dat er bij ieder positief getal* ε *een positief getal* δ *bestaat van dien aard, dat voor ieder element* E *van* V_δ *aan* $|E-L| < \varepsilon$ *voldaan is*, dan heet L de LIMIET *der getallenverzameling* V *ten aanzien van de wet, die de toevoeging van* V_δ *aan* δ *bepaalt.* Het is duidelijk, dat er hoogstens één getal met genoemde eigenschap zijn kan.

3. De in n°. 2 beschouwde toevoegingswet noemen we GELIJKWAARDIG met een tweede toevoegingswet, die aan een positief getal δ een deelverzameling V'_δ van V toevoegt, *als men bij ieder positief getal* δ *een zoodanig positief getal* δ_1 *bepalen kan, dat* V'_{δ_1} *een deel is van* V_δ *en* V_{δ_1} *een deel van* V'_δ. Het is duidelijk, *dat deze gelijkwaardigheid transitief is.* Verder blijkt gemakkelijk, *dat gelijkwaardige toevoegingswetten òf geen van beide een limiet, òf beide dezelfde limiet opleveren.* Daarom kunnen gelijkwaardige toevoegingswetten als dezelfde limietovergang beschouwd worden, zoodat onder een WIJZE VAN LIMIETOVERGANG te verstaan is een *stelsel van onderling gelijkwaardige toevoegingswetten.*

[1]) Voor meerdere bijzonderheden zij verwezen naar de Hand. van het Nat. en Geneeskundig Congres 1919.

4. *De in n°. 2 genoemde limiet bestaat dan en alleen dan, als bij ieder positief getal* ε *een zoodanig positief getal* δ *is aan te wijzen, dat voor ieder tweetal elementen* E *en* E' *van* V_δ *geldt* $|E-E'|<\varepsilon$ (ALGEMEENE LIMIETSTELLING). Dat deze voorwaarde voor het bestaan van een limiet *noodig* is, is onmiddellijk duidelijk.

Dat deze voorwaarde ook *voldoende* is, blijkt bij reëele getallen door op te merken, dat (als de voorwaarde vervuld is) aan de definitie van limiet voldaan wordt door de bovenste grens der getallen a, waarvoor een V_δ bestaat, waarvan alle elementen $>a$ zijn. Voor complexe getallen bewijst men dan verder de stelling door die voor reëele getallen toe te passen op de reëele deelen en de coëfficiënten van i der complexe getallen.

5. We denken ons twee op elkaar afgebeelde getallenverzamelingen V en W met bijbehoorende toevoegingswetten. Deze wetten onderstellen we zoodanig, dat voor ieder positief getal δ de bijbehoorende deelverzamelingen V_δ en W_δ in de afbeelding van V op W met elkaar correspondeeren.

We vormen nu een verzameling U door correspondeerende elementen van V en W op te tellen, waarbij ook de toevoegingswet op U is over te dragen. *Heeft nu bij deze toevoegingswetten* V *een limiet* L_v *en* W *een limiet* L_w, *dan heeft ook* U *een limiet, en wel* $L_v + L_w$, zooals zonder moeite uit de definitie van limiet is af te leiden.

Ook andere bekende eigenschappen betreffende limieten kunnen op deze wijze algemeen geformuleerd worden.

6. We onderstellen nu, dat de elementen der verzameling V *reëele* getallen zijn, maar laten in het midden of V een limiet bezit. Men kan dan beschouwen de *onderste grens van de bovenste grenzen der deelverzamelingen* V_δ. Deze heet de BOVENSTE LIMIET *der getallenverzameling* V *ten aanzien van de beschouwde toevoegingswet.* De bovenste limiet B is $+\infty$, als alle verzamelingen V_δ naar boven onbegrend zijn, en $-\infty$, als de verzameling van de bovenste grenzen der verzamelingen V_δ naar onderen onbegrensd is.

Evenzoo wordt de *bovenste grens* O *van de onderste grenzen der verzamelingen* V_δ de ONDERSTE LIMIET *van* V *ten aanzien van de beschouwde toevoegingswet* genoemd. Deze onderste limiet kan weer $\pm\infty$ zijn. Het blijkt gemakkelijk, *dat steeds* $O \leq B$ *is.*

De verzameling V heeft dan en alleen dan een limiet L, als O en B gelijk en eindig zijn; men heeft dan $L = O = B$. Zijn O en B beide $+\infty$, dan spreekt men van een ONEIGENLIJKE LIMIET $+\infty$, zijn O en B beide $-\infty$, dan van een ONEIGENLIJKE LIMIET $-\infty$.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan van den Heer FRED. SCHUH: „*Algemeene definitie van gelijkmatige convergentie met toepassing op verwisselbaarheid van limietovergangen.*"

(Mede aangeboden door den Heer W. KAPTEYN.)

1. We denken ons *twee verzamelingen* V *en* W *met bijbehoorende toevoegingswetten* (zie mijn opstel „Algemeene definitie van limiet," blz. 1378). Hierdoor wordt aan ieder positief getal δ een deel V_δ van V en een deel W_δ van W toegevoegd zoodanig, *dat* V_δ *en* W_δ *minstens één element bevatten en* $V_{\delta'}$ *een deel is van* V_δ *en* $W_{\delta'}$ *een deel van* W_δ *voor* $\delta' < \delta$.

Zij VW de *productverzameling*, wier elementen gevormd worden door telkens een element van V met een element van W tot een paar (waarbij niet op de volgorde gelet wordt) te vereenigen. Als de bij VW behoorende toevoegingswet nemen we *die, waarbij aan* δ *de deelverzameling* $V_\delta W_\delta$ *is toegevoegd.*

Vervangt men de bij V en W behoorende toevoegingen door daarmede gelijkwaardige (zie n°. 3 van mijn vorig opstel), dan wordt daardoor ook de bij VW behoorende toevoegingswet door een daarmede gelijkwaardige vervangen.

2. We onderstellen VW *belegd met* (*reëele of complexe*) *getallen*, dus aan ieder element van VW een getal toegevoegd. Hierdoor ontstaat een getallenverzameling K, waarin een zelfde getal meerdere malen kan voorkomen. *Een verzameling van elementen van* K, *die bij een zelfde element van* V *behooren*, gecombineerd met alle elementen van W, zullen we door G aanduiden. Evenzoo ontstaat een verzameling H *door een vast element van* W *te beschouwen.*

De bij VW behoorende toevoegingswet is op de (daarop afgebeelde) getallenverzameling K over te dragen. Evenzoo is de bij V of W behoorende toevoegingswet op iedere getallenverzameling H resp. G over te dragen.

3. Onderstel, dat iedere getallenverzameling G (ten aanzien van de bij W behoorende toevoegingswet) een limiet L_G bezit; bij ieder element van V behoort dan een getal L_G. Men zegt, *dat de getallenverzamelingen* G GELIJKMATIG *tot hun limieten* L_G *convergeeren*, als bij

ieder positief getal ε een zoodanig positief getal δ bestaat, dat ieder element E der deelverzameling G_δ van G voldoet aan $|E - L_G| < \varepsilon$, welk element van V (dus welke getallenverzameling G) men ook kiest; hierbij wordt geeischt, *dat δ van het gekozen element van V onafhankelijk is.*

Uit de algemeene limietstelling (zie n°. 4 van mijn vorig opstel) volgt, dat gelijkmatige convergentie dan en alleen dan aanwezig is, als bij ieder positief getal ε een van G onafhankelijk positief getal δ bestaat zoodanig, dat ieder tweetal elementen E en E' van G_δ aan $|E - E'| < \varepsilon$ voldoet.

4. We nemen nu aan, *dat de in n°. 3 genoemde gelijkmatige convergentie bestaat* en verder, *dat iedere getallenverzameling H (ten aanzien van de bij V behoorende toevoegingswet) een limiet L_H bezit;* hierdoor komt bij ieder element van W een getal L_H te behooren.

We toonen nu vooreerst aan, *dat de verzameling $\{L_G\}$ der getallen L_G (ten aanzien van de bij V behoorende toevoegingswet) een limiet L bezit.* Daarvoor hebben we te bewijzen, dat bij ieder positief getal ε een zoodanige V_δ bepaald kan worden, dat voor ieder tweetal elementen van V_δ geldt $|L_G - L_{G'}| < \varepsilon$, waarin L_G en $L_{G'}$ de bijbehoorende getallen van $\{L_G\}$ zijn. Zijn E en E' elementen van G resp. G', die tot een zelfde verzameling H behooren, dan is:

$$|L_G - L_{G'}| \leq |L_G - E| + |E - E'| + |E' - L_{G'}|.$$

Wegens de gelijkmatige convergentie der verzamelingen G kan men H zoo kiezen, dat $|L_G - E|$ en $|E' - L_{G'}|$ beide $< \frac{1}{3}\varepsilon$ zijn. Daar H een limiet bezit, kan men δ zoo kiezen, dat ieder tweetal elementen E en E' van H_δ aan $|E - E'| < \frac{1}{3}\varepsilon$ voldoet. Voor de getallen L_G en $L_{G'}$, die bij twee elementen van V_δ behooren, geldt dan $|L_G - L_{G'}| < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$.

5. Vervolgens bewijzen we, *dat de verzameling L_H der getallen L_H (ten aanzien van de bij W behoorende toevoegingswet) eveneens L tot limiet heeft.* Daartoe gaan we uit van

$$|L_H - L| \leq |L_H - E| + |E - L_G| + |L_G - L|,$$

waarin E het aan de verzamelingen G en H gemeenschappelijke element is. Nu kan men (wegens de in n°. 3 genoemde gelijkmatige convergentie) het positieve getal δ zoo bepalen, dat aan $|E - L_G| < \frac{1}{3}\varepsilon$ voldaan is, zoo E een element van G_δ is, dus zoo H bij een element van W_δ behoort; hierin is ε een willekeurig gekozen positief getal. Heeft men nu een bepaald element van W_δ (dus ook H en L_H) gekozen, dan kan men δ_1 zoo bepalen, dat $|L_H - E| < \frac{1}{3}\varepsilon$ is, zoo

E een element van H_{δ_1} is, dus bij een element van V_{δ_1} behoort. Verder kan men δ_2 zoo bepalen, dat $|L_G - L| < \frac{1}{3}\varepsilon$ is, als G bij een element van V_{δ_2} behoort. Door de verzameling G bij een gemeenschappelijk element van V_{δ_1} en V_{δ_2} te laten behooren, vindt men $|L_H - L| < \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$ voor iedere verzameling H, die bij een element van W_δ behoort.

6. Ten slotte bewijzen we, *dat de getallenverzameling* K (*ten aanzien van de bij* $V\,W$ *behoorende toevoegingswet*) *eveneens het getal* L *tot limiet heeft.* Men heeft:

$$|E - L| \leq |E - L_G| + |L_G - L|,$$

waarin E een element van G is. Wegens de gelijkmatige convergentie kan men δ_1 zoo bepalen, dat $|E - L_G| < \frac{1}{2}\varepsilon$ is, als E een element van G_{δ_1} is, dus bij een element van W_{δ_1} behoort. Ook kan men δ_2 zoo bepalen, dat $|L_G - L| < \frac{1}{2}\varepsilon$ is, als G bij een element van V_{δ_2} behoort. Is nu δ het kleinste der getallen δ_1 en δ_2, dan is aan $|E - L| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ voldaan, als E bij een element van V_δ en bij een element van W_δ (dus bij een element van $V_\delta\, W_\delta$) behoort dus als E een element van K_δ is.

7. Resumeerend vinden we:

Is de productverzameling $V\,W$ *met getallen belegd en convergeeren de verzamelingen* G *der getallen, die bij een zelfde element van* V *behooren, gelijkmatig tot hun limieten* L_G (*ten aanzien van de bij* W *behoorende toevoegingswet*), *terwijl de verzamelingen* H *der getallen, die bij een zelfde element van* W *behooren, limieten* L_H *hebben* (*ten aanzien van de bij* V *behoorende toevoegingswet*), *dan bezitten de getallen* L_G (*ten aanzien van de bij* V *behoorende toevoegingswet*) *een limiet, die tevens de limiet is der getallen* L_H (*ten aanzien van de bij* W *behoorende toevoegingswet*) *en de limiet van de geheele getallenverzameling* (*ten aanzien van de bij* $V\,W$ *behoorende toevoegingswet*).

De gelijkheid der beide eerstgenoemde limieten beteekent *verwisselbaarheid van twee limietovergangen.* De eene limietovergang heeft betrekking op de bij W behoorende toevoegingswet, de andere op de bij V behoorende toevoegingswet.

Wiskunde. — De Heer LORENTZ biedt een mededeling aan van de Heer H. B. A. BOCKWINKEL: *„Opmerkingen over de ontwikkeling van een funksie in een fakulteitreeks."* III.

(Mede aangeboden door de Heer KLUYVER).

10. We willen deze derde mededeling beginnen met definitief te bewijzen dat het teorema van NIELSEN onjuist is. Daartoe tonen we eerst de volgende hulpstelling aan:

Als de reeks $\sum_{n}\limits_{0}^{\infty} a_n$ *divergeert, zodanig dat de bovenste limiet van de grootheid*

$$s_n = \sum_{m}\limits_{0}^{n} a_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

voor $n = \infty$ *equivalent is met* n^θ, *waarin* θ *zeker pozitief getal is, dan konvergeert of divergeert de reeks.*

$$\sum_{n}\limits_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n^\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

al naarmate men heeft $\alpha > \theta$ *of* $\alpha < \theta$.

Partiele sommatie geeft

$$\sum_{m}\limits_{0}^{n} \frac{a_m}{m^\alpha} = \frac{s_n}{n^\alpha} + \sum_{m}\limits_{0}^{n-1} s_m \left(\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Voor $\alpha > \theta$ is, volgens de onderstelling, de limiet van de grootheid s_n/n^α gelijk aan nul voor $n = \infty$. Verder is de bovenste limiet van de algemene term van de reeks in het rechterlid voor $m = \infty$ equivalent met $m^{-(1+\delta)}$, als δ zeker pozitief getal is; hieruit volgt dat die reeks konvergeert voor $n = \infty$. Dus konvergeert ook de reeks in het linkerlid voor $n = \infty$.

Eveneens vindt men, als men stelt

$$s_{\alpha,n} = \sum_{m}\limits_{0}^{n} \frac{a_m}{m^\alpha}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36')$$

door partiele sommatie

$$\sum_{0}^{n} {}_m a_m = \sum_{0}^{n} {}_m m^\alpha \frac{a_m}{m^\alpha} = n^\alpha s_{\alpha\, n} - \sum_{0}^{n-1} {}_m s_{m,\alpha} \left[(m+1)^\alpha - m^\alpha\right] \quad . \quad (38)$$

Uit deze gelijkheid volgt dat voor $\alpha < \theta$ de bovenste limiet voor $n = \infty$ van $s_{\alpha,n}$ oneindig groot is, en wel zo dat die minstens equivalent is met $n^{\theta-\alpha}$. Was dit niet zo, en was $s_{n,\alpha}$ eindig of zijn bovenste limiet voor $n = \infty$ equivalent met een kleinere pozitieve macht van n, zeg $n^{\theta-\alpha-\delta}$, dan zou de eerste term van het rechterlid van de orde $n^{\theta-\delta}$ zijn, terwijl de termen van de reeks in dat lid van de orde $m^{\theta-\delta-1}$, hun som dus insgelijks hoogstens van de orde $n^{\theta-\delta}$ zou zijn. Dit is in strijd met de aanvankelike onderstelling dat het linkerlid van de gelijkheid van de orde n^θ is.

De stelling is hiermee bewezen. Een gevolg dat vermelding verdient is dat de reeks (36) voor $\alpha < \theta$ zodanig divergeert dat de bovenste limiet van de som (36′) voor $n = \infty$ *presies* equivalent is met $n^{\theta-\alpha}$ (in het tweede deel van ons bewijs vonden we dat hij er *minstens* equivalent mee was). Immers, was die limiet equivalent met een hogere macht van n, zeg $n^{\theta-\alpha+\delta}$, dan zou de grens van konvergentie en divergentie van de reeks

$$\sum_{0}^{\infty} {}_n \frac{a_n}{n^\beta} = \sum_{0}^{\infty} {}_n \left(\frac{a_n}{n^\alpha}\right) \frac{1}{n^{\beta-\alpha}}$$

volgens de zo juist bewezen stelling geleverd worden door $\beta = \theta + \delta$, en niet door $\beta = \theta$. Men kan ditzelfde gevolg trouwens ook afleiden door op te merken dat uit de gelijkheid (37) volgt dat voor $\alpha < \theta$ het linkerlid *hoogstens* equivalent is met $n^{\theta-\alpha}$.

Dezelfde hulpstelling als boven bewezen is geldt voor de fakulteitreeks

$$\sum_{0}^{\infty} {}_n \frac{n!\, a_n}{\Gamma(\alpha + n + 1)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

zoals men op volkomen analoge manier bewijzen kan. Beide stellingen vloeien trouwens uit elkaar voort, omdat de reeksen (38) en (39) tegelijkertijd konvergeren en divergeren, tenminste zolang α niet juist de grenswaarde θ tussen konvergentie en divergentie heeft.

11. We konstrueren nu een rij van koeffisienten

$$a_0, \quad a_1, \; . \; . \; . \; a_n, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

waarvan de bovenste limiet voor $n = \infty$ equivalent is met n^ρ, terwijl de bovenste limiet van de som (35) equivalent is met n^θ, waarin θ

nu een pozitief getal *kleiner dan* 1 voorstelt. Het is niet moeilik dit op allerlei wijzen te doen; we zullen er evenwel bovendien voor trachten te zorgen dat ook de *tweede* somreeks

$$s_n^{(2)} = \sum_0^n s_m \qquad \ldots\ldots\ldots (41)$$

minder dan één orde hoger wordt dan de voorgaande, minder dus dan de orde $n^{\theta+1}$. We doen dat op de volgende manier. Uitgaande van zekere waarde $n = p$ van n, waarvoor we aannemen

$$s_p = \underline{p}^{\theta},$$

met deze notatie hetzelfde bedoelende als $E(p^{\theta})$, dat is het grootste gehele getal dat in p^{θ} bevat is, laten we nu de sommen naar rechts zo schielik mogelik afnemen door de eerstvolgende koëffisienten a_n alle gelijk aan -1 te kiezen. Als we zo $\underline{p}^{\theta}$ termen in de rij verder zijn, is s_n gelijk aan nul geworden. Gaan we nog $\underline{p}^{\theta}$ termen verder, dan is s_n gelijk aan $-\underline{p}^{\theta}$; het rangnummer n is dan gelijk aan $p + 2\underline{p}^{\theta}$. Het kan zijn dat hiervoor $\underline{n}^{\theta}$ nog gelijk is aan $\underline{p}^{\theta}$ [1]). In dat geval kunnen we zeggen dat we met $|s_n|$ weer de benodigde bovenste grenswaarde bereikt hebben en nemen we nu de eerstvolgende koeffisienten alle gelijk aan $+1$ aan. Is echter $\underline{n}^{\theta}$ voor $n = p + 2\underline{p}^{\theta}$ grooter dan $\underline{p}^{\theta}$ dan gaan we door met de a's gelijk aan -1 te nemen, net zo lang totdat s_n zoveel afgenomen is dat $|s_n|$ weer gelijk is aan $\underline{n}^{\theta}$. Een dergelijke n-waarde *moet* bereikt worden, als $\theta < 1$, want op de duur zou, als men maar steeds $a_n = -1$ nam, $|s_n|$ van de orde n worden. Ook nu nemen we, als de bedoelde n-waarde bereikt is, daarna de eerstvolgende koeffisienten a_n gelijk aan $+1$ en gaan daarmee door totdat s_n opnieuw gelijk aan $\underline{n}^{\theta}$ geworden is, enz. De bovenste limiet voor $n = \infty$ van de sommen s_n is dan equivalent met n^{θ} en die van de koeffisienten a_n met n^{o}. De waarden van n waarvoor s_n gelijk wordt aan $\underline{n}^{\theta}$ noemen we *kritiese* waarden en duiden we aan door de notatie n_k. Als we een bepaalde waarde $n = p$ als kritiese waarde willekeurig aannemen, dan zijn daardoor zoals uit de beschouwing van zo even volgt, alle volgende kritiese waarden bepaald. We zouden dezelfde konstruksie ook naar de kant van de kleinere n-waarden kunnen voortzetten, maar dit is onverschillig, aangezien het op het azimptotiese gedrag van de betreffende grootheden aankomt. De grafiese voorstelling van de koeffisient a_n,

---

[1]) We kunnen schrijven $(p + 2\underline{p}^{\theta})^{\theta} = p^{\theta} + 2\theta p^{2\theta-1}(1-\varepsilon)$, waarin $\lim\limits_{p=\infty} \varepsilon = 0$. Hieruit volgt dat voor $\theta < \frac{1}{2}$, en grote p, $E(\underline{p}^{\theta} + 2\underline{p}^{\theta})$ *in 't algemeen* gelijk is $E(p^{\theta})$.

beschouwd als funksie van n, bestaat uit een aantal lijnsegmenten evenwijdig de horizontale as, afwisselend daar boven en daar beneden, op de afstand 1; de wisselingen hebben plaats in de kritiese punten n_k. De grafiese voorstelling van de sommen s_n bestaat in aaneensluitende lijnsegmenten die afwisselend hoeken van $+\frac{\pi}{4}$ en $-\frac{\pi}{4}$ met de n-as maken; en de afwisseling vindt weer in de kritiese punten plaats, waar de toppen van de lijnsegmenten op een afstand kleiner dan de eenheid *binnen* de paraboolachtige kromme $y = \pm n^{\theta}$ liggen.

We zullen nu echter aantonen dat de bovenste limiet voor $n = \infty$ van de tweede sommen (41) equivalent is met $n^{2\theta}$. De sommen

$$\sum_{m}^{n_k} {}_{n_k - \underline{n_k^{\theta}}} s_m \quad \text{en} \quad \sum_{m}^{n_k + \underline{n_k^{\theta}}} {}_{n_k + 1} s_m$$

zijn rekenkundige reeksen, die uit louter termen van gelijk teken bestaan; hun gezamenlike waarde is, zoals men gemakkelijk verifieert, juist gelijk aan $\pm (\underline{n_k^{\theta}})^2$. Men krijgt zo, afgezien van een konstante, waarvan de waarde er, voor het azimptoties gedrag van deze sommen, niet toe doet,

$$\sum_{m}^{n_k + \underline{n_k^{\theta}}} {}_{0} s_m = (\underline{n_1^{\theta}})^2 - (\underline{n_2^{\theta}})^2 + \ldots \pm (\underline{n_k^{\theta}})^2$$

Daar de termen van deze som in absolute waarde hetzij toenemen, hetzij over enige rangnummers konstant blijven, is de som zelf in absolute waarde kleiner dan de laatste plus de eerste term. Men heeft dus

$$\left| s^{(2)}_{n_k + \underline{n_k^{\theta}}} \right| < (\underline{n_k^{\theta}})^2 + (\underline{n_1^{\theta}})^2 < (\underline{n_k^{\theta}})^2 (1 + \varepsilon)$$

waarbij ε een pozitief bedrag is met nul tot limiet voor $k = \infty$. Verder is voor een waarde van n gelegen in het interval tussen $n_k - \underline{n_k^{\theta}} = n_{k-1} + \underline{n_{k-1}^{\theta}}$ en $n_k + \underline{n_k^{\theta}}$ de waarde van $s^{(2)}_n$ gelegen *tussen* de beide waarden die voor deze uitersten gelden, omdat s_n tussen deze twee hetzelfde teken houdt en $s^{(2)}_n$ dus *monotoon* verandert. Men heeft dus ook voor alle n-waarden van het genoemde interval

$$\left| s^{(2)}_n \right| < (\underline{n_k^{\theta}})^2 (1 + \varepsilon) \overline{<} n_k^{2\theta} (1 + \varepsilon).$$

Voor het deel van de n-waarden groter dan n_k geldt dus *a fortiori*

$$\left| s^{(2)}_n \right| < n^{2\theta} (1 + \varepsilon). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Voor het andere deel heeft men

$$n > n_k - n_k^{\theta}.$$

Nu is

$$n_k^{2\theta} = (n_k - n_k^{\theta} + n_k^{\theta})^{2\theta} = (n_k - n_k^{\theta})^{2\theta}(1 + \varepsilon)$$

waarbij weer ε willekeurig klein is bij genoegzaam grote k. Dus is ook voor de laatstbedoelde n-waarden

$$\left|s_n^{(2)}\right| < n_k^{2\theta}(1 + \varepsilon) < (n_k - n_k^{\theta})^{2\theta}(1 + \varepsilon) < n^{2\theta}(1 + \varepsilon). \quad . \quad (42')$$

De ongelijkheden (42) tonen aan dat de bovenste limiet van $s_n^{(2)}$ voor $n = \infty$ inderdaad *hoogstens* equivalent is met $n^{2\theta}$. Aan de andere kant is het gemakkelik in te zien dat $n^{2\theta}$ *presies* de macht van n is waarmee de bovenste limiet van $s_n^{(2)}$ voor $n = \infty$ equivalent is, maar dit laatste is voor ons doel van geen belang.

Konstrueren we nu een funksie $\varphi(t)$ met behulp van de aldus bepaalde koeffisientreeks (40)

$$\varphi(t) = \sum_0^{\infty} {}_n \, a_n t^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Hiervoor kunnen we ook schrijven

$$\varphi(t) = (1-t) \sum_0^{\infty} {}_n \, s_n t^n = (1-t)^2 \sum_0^{\infty} {}_n \, s_n^{(2)} t^n \quad . \quad . \quad (43)$$

Het laatste lid van deze gelijkheid toont aan van welke orde van grootte $\varphi(t)$ hoogstens is voor $t = 1 - \delta$. Daar we zo juist gezien hebben dat de bovenste limiet van $s_n^{(2)}$ voor $n = \infty$ hoogstens equivalent is met $n^{2\theta}$, is de funksie

$$\sum_0^{\infty} {}_n \, s_n^{(2)} t^n$$

voor $t = 1$ hoogstens van de orde $1/(1-t)^{1+2\theta}$. Dus is $\varphi(t)$ voor $t = 1$ gelijk aan nul, indien $\theta < \frac{1}{2}$, en voor $\theta > \frac{1}{2}$ hoogstens van de orde $1/(1-t)^{2\theta-1}$. Men heeft dus

$$\lambda = 0 \quad \text{voor} \quad \theta \overline{<} \tfrac{1}{2}$$

$$\lambda = 2\theta - 1 \quad \text{voor} \quad \theta > \tfrac{1}{2}.$$

Daar $2\theta - 1 = \theta - (1 - \theta)$ en $\theta < 1$, is echter in beide gevallen

$$\lambda < \theta.$$

Uit de in het vorige nummer bewezen hulpstelling volgt nu, daar de bovenste limiet van s_n voor $n = \infty$ equivalent is met n^{θ}, de *divergentie* van de fakulteitreeks

$$\Gamma(x) \sum_{0}^{\infty} n \frac{n!\, a_r}{\Gamma(x+n+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

voor $R(x) < \theta$. *Dus is het hier niet waar dat deze reeks konvergeert voor* $R(x) > \lambda'(=0)$ en $R(x) > \lambda$, *laat staan dat zekere integraal van de vorm* (1) *voor al zulke waarden van* x *in die reeks ontwikkeld kan worden. Het teorema van* NIELSEN *is dus onjuist.*

12. We maken van de gelegenheid gebruik om op te merken dat met behulp van de stelling van N°. 10 uit het eerste deel van formule (43) valt af te leiden dat nooit konvergentie van de fakulteitreeks (6) plaats vindt voor $R(x) < \lambda$, een waarheid die we in N°. 9 van de vorige mededeling al langs andere weg hebben aangetoond.

Immers, is de bovenste limiet van s_n voor $n = \infty$ equivalent met n^θ, dan is de funksie, voorgesteld door de reeks

$$\sum_{0}^{\infty} n\, s_n\, t^n$$

voor $t = 1$ hoogstens van de orde $1/(1-t)^{1+\theta}$, en dus $\varphi(t)$ hoogstens van de orde $1/(1-t)^\theta$, zodat het getal λ niet groter is dan θ, terwijl de grens van konvergentie en divergentie van de fakulteitreeks (6) volgens de bedoelde hulpstelling door $R(x) = \theta$ wordt geleverd.

13. Aan het slot van de eerste mededeling zeiden we dat, als zekere, daar vermelde en door NIELSEN gebezigde redenering niet onjuist was, door die redenering nog een zeer algemeen geval van ontwikkelbaarheid van de integraal (1)

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t)\,(1-t)^{x-1}\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

in een fakulteitreeks bewezen zou zijn, nl. altijd dan, wanneer de met die integraal korresponderende fakulteitreeks konvergeert. We willen nu aantonen dat dit geval, hoewel dus door NIELSEN niet bewezen, inderdaad juist is. Daartoe hebben we nog een paar hulpstellingen nodig.

1. *Konvergeert de fakulteitreeks* (6) *voor zekere waarde* $x = c$, *dan konvergeert hij voor iedere waarde van* x *met een reeel deel* $R(x)$ *groter dan dat van* c.

Stellen we

$$\sum_{n}^{l} m \frac{m!\, a_m}{\Gamma(c+m+1)} = s_{n,l}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

dan vinden we door partiele sommatie

$$\sum_{n}^{l}{}_m \frac{m!\,a_m}{\Gamma(x+m+1)} = \sum_{n}^{l}{}_m \frac{m!\,a_m}{\Gamma(c+m+1)} \cdot \frac{\Gamma(c+m+1)}{\Gamma(x+m+1)} =$$

$$= \frac{s_{n,l}\,\Gamma(c+l+1)}{\Gamma(x+l+1)} - (x-c) \sum_{n}^{l-1}{}_m \frac{s_{n,m}\,\Gamma(c+m+1)}{\Gamma(x+m+2)}.$$

Wegens de onderstelde eindigheid van $s_{n,\infty}$ is, indien $R(x) > R(c)$ de limiet van de eerste term van het tweede lid gelijk aan nul, als l onbepaald toeneemt, en konvergeert de reeks in dat lid absoluut. De reeks in het eerste lid konvergeert dus ook en men heeft

$$\sum_{n}^{\infty}{}_m \frac{m!\,a_m}{\Gamma(x+m+1)} = (x-c) \sum_{n}^{\infty}{}_m \frac{s_{n,m}\,\Gamma(c+m+1)}{\Gamma(x+m+2)} \quad . \quad . \quad (45)$$

De stelling is hiermee bewezen. Er volgt uit dat *de grens van het konvergentiegebied en het divergentiegebied van een fakulteitreeks gevormd wordt door een rechte lijn evenwijdig aan de imaginaire as.*

Uit de gelijkheid (45) volgt tevens onmiddellik deze andere stelling: II. *In elk eindig deel S van het halfvlak $R(x) \geq R(c) + \delta$, waarin δ een vast maar willekeurig klein reeel en pozitief getal is, konvergeert de fakulteitreeks uniform.*

Immers, men kan n zo groot kiezen, bij willekeurig klein voorgeschreven ε, dat voor alle $m \geq n$

$$\left| \frac{s_{n,m}\,\Gamma(c+m+1)}{\Gamma(x+m+2)} \right| < \frac{\varepsilon}{m^{R(x-c)+1}}$$

en dus

$$\left| (x-c) \sum_{n}^{\infty}{}_m \frac{s_{n,m}\,\Gamma(c+m+1)}{\Gamma(x+m+2)} \right| < \frac{\varepsilon\,|x-c|}{R(x-c)\,n^{R(x-c)}} \quad . \quad . \quad (46)$$

Daar $R(x-c) \geq \delta$ is het rechterlid van deze ongelijkheid voor een genoegzaam grote waarde van n, *die onafhankelik is van de waarde van x in het gebied S,* kleiner dan ε. Dit was te bewijzen.

Uit de ongelijkheid (46) volgt ook deze stelling: II*a*. *Indien de fakulteitreeks* (6) *konvergeert voor zekere waarde $x = c$, dan konvergeert hij u n i f o r m op de halfrechte die begint bij $x = c$ en de richting heeft van het pozitieve deel van de reele as.*

Hiervoor is nl. $R(x-c) = x-c$; het rechterlid van (46) gaat dus over in $\varepsilon / n^{R(x-c)}$, en dit is, onafhankelik van het punt x op de genoemde halfrechte, kleiner dan ε. De stelling beantwoordt aan een bekende stelling van ABEL over de *uniforme* konvergentie van een

machtreeks op een straal van zeker punt van de konvergentiesirkel, indien die machtreeks in dat punt konvergeert.

Uit stelling II volgt, in verband met het feit dat de termen van de fakulteitreeks (6) *kontinue* funksies van x zijn, dat die reeks in het gebied S een *kontinue* funksie van x voorstelt, ook dan als S geheel of gedeeltelik in de strook van eventueel slechts *voorwaardelike* konvergentie ligt; mits natuurlik op een van nul verschillende afstand van de linkergrensvertikaal van die strook. We willen nu nog aantonen dat die fakulteitreeks in zo'n gebied ook een *analitiese* funksie voorstelt. Daartoe zullen we bewijzen, wat voldoende is, dat de reeks gevormd door de differentiaalquotienten naar x van de termen van de eerste reeks in hetzelfde gebied als deze konvergeert, en wel eveneens uniform in ieder eindig deel S als bovenaangegeven.

De reeks van de differentiaalquotienten kan worden voorgesteld door

$$-\Gamma(x)\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\frac{n!\,a_n}{\Gamma(x+n+1)}\left[\psi(x+n+1)-\psi(x)\right]. \quad . \quad (47)$$

waarbij, in de notatie van NIELSEN [1]), $\psi(x)$ het logaritmiese differentiaalquotient van de Gammafunksie voorstelt:

$$\psi(x)=\frac{d\log\Gamma(x)}{dx}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Partiele sommatie geeft, als men weer gebruik maakt van de notatie (44)

$$\sum_{n}^{l}{}_{m}\frac{m!\,a_m\,\psi(x+m+1)}{\Gamma(x+m+1)}=\sum_{n}^{l}{}_{m}\frac{m!\,a_m}{\Gamma(c+m+1)}\cdot\frac{\Gamma(c+m+1)\,\psi(x+m+1)}{\Gamma(x+m+1)}=$$

$$=\frac{s_{n,l}\,\Gamma(c+l+1)\,\psi(x+l+1)}{\Gamma(x+l+1)}-\sum_{n}^{l-1}{}_{m}\frac{s_{n,m}\Gamma(c+m+1)}{\Gamma(x+m+2)}\left[(x-c)\psi(x+m+2)-1\right],$$

waarbij gebruik is gemaakt van de differentievergelijking waaraan $\psi(x)$ voldoet:

$$\psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}.$$

Daar $\psi(x)$ voor $x=\infty$ in hoofdzaak gelijk is aan $\log x$, is, indien $R(x-c)\gtrless\sigma$, de eerste term van het tweede lid gelijk aan nul voor $l=\infty$, terwijl de reeks in dat lid absoluut konvergeert. De reeks in 't eerste lid konvergeert dus ook en men heeft

$$\sum_{n}^{\infty}{}_{m}\frac{m!\,a_m\,\psi(x+m+1)}{\Gamma(x+m+1)}=\sum_{n}^{\infty}{}_{m}\frac{s_{n,m}\Gamma(c+m+1)}{\Gamma(x+m+2)}\left[1-(x-c)\,\psi(x+m+2)\right].$$

[1]) Handbuch der Gammafunktion, p. 15, Leipzig, Teubner.

Uit deze gelijkheid volgt gemakkelik dat er bij iedere ε een van x onafhankelik getal N is zodanig dat voor $n > N$, en voor alle x in het gebied S,

$$\left| \sum_{n}^{\infty} {}_m \frac{m!\, a_m \psi(x+m+1)}{\Gamma(x+m+1)} \right| < \frac{\varepsilon \log n}{\delta n^{\delta}}$$

of ook $< \varepsilon$, daar $\log n/n^{\delta}$ nul tot limiet heeft voor $n = \infty$. Hiermee is de konvergentie van het eerste deel van de differentiaalquotientenreeks (47) bewezen en tevens de *uniforme* konvergentie in S. Het tweede deel behoeft niet nader onderzocht te worden, want dit vormt een reeks die op de van het rangnummer n onafhankelike faktor $\psi(x)$ na gelijk is aan de fakulteitreeks zelf.

Wegens de in S uniforme konvergentie van de reeks van differentiaalquotienten en de kontinuiteit van de afzonderlike termen van deze reeks, stelt hij in het genoemde gebied het differentiaalquotient voor van de funksie die door de fakulteitreeks wordt bepaald. Dit differentiaalquotient is dus in ieder punt van S bepaald, en onafhankelik van de richting: *de fakulteitreeks stelt dus in S een analitiese funksie voor.*

14. Om nu het in 't begin van het voorgaande nummer aangeduide vraagpunt te beslissen, denken we ons vooreerst weer het geval dat $\lambda' = 0$ is, dus dat de bovenste limiet van a_n voor $n = \infty$ equivalent is met n^0; verder dat de grens van konvergentie en divergentie van de fakulteitreeks (6) gegeven wordt door

$$R(x) = \theta,$$

waarbij θ een pozitief getal kleiner dan 1 is. We hebben nu bewezen dat het getal λ in ieder geval niet groter is dan θ. M.a.w. men heeft

$$\lim_{t=1} (1-t)^x \varphi(t) = 0 \quad \text{voor} \quad R(x) > \theta .$$

Hieruit volgt dat de integraal (1) absoluut konvergeert voor $R(x) > \theta$. Tevens is die konvergentie *uniform* in ieder gebied S dat geheel ligt in het eindige deel van het halfvlak $R(x) > \theta + \delta$, waarin δ weer een willekeurig klein pozitief getal is. Hetzelfde geldt van de integraal

$$\int_0^1 \varphi(t)\,(1-t)^{x-1} \log(1-t)\, dt,$$

die men uit (1) kan afleiden door onder het integraalteken naar x te differentieren. Deze integraal stelt dus het differentiaalquotient

naar x van de integraal (1) voor, zodat laatstgenoemde een in dat gebied *analitiese* funksie van x is. [1])

Nu zijn de twee analitiese funksies, voorgesteld door de integraal (1) en de reeks (6), zooals is aangetoond, aan elkaar gelijk in het *absolute* konvergentiegebied van die reeks, gevormd door het halfvlak $R(x) > 1$. Volgens een bekende stelling uit de funksieteorie *kunnen ze dus ook in het gebied van voorwaardelike konvergentie*

$$\theta < R(x) \overline{<} 1$$

niet van elkaar verschillen. De bedoelde stelling is hiermee in het bepaalde geval $\lambda' = 0$ aangetoond. Denken we ons vervolgens $\lambda' > 0$ en de grens van konvergentiegebied en divergentiegebied van de reeks (6) gegeven door

$$R(x) = \lambda' + \theta,$$

dan is weer $\lambda \overline{<} \lambda' + \theta$, zoals insgelijks in de vorige mededeling bewezen is, en dan gelden analoge waarheden als zo even met betrekking tot de integraal (1), die dus ook dan in het voorwaardelik konvergentiegebied

$$\lambda' + \theta < R(x) \overline{<} \lambda' + 1$$

van de fakulteitreeks aan deze gelijk is. Is eindelik $\lambda' < 0$ en evenzo de grens $\lambda' + \theta$ tussen kon- en divergentiegebied van de reeks, dan bestaat de integraal (1) in 't algemeen slechts voor $R(x) > 0$, maar dan vormt de reeks in de konvergentiestrook

$$\lambda' + \theta < R(x) \overline{<} 0$$

de analitiese voortzetting van de integraal. Ook kan men zeggen dat dan een zeker restdeel van de reeks (6) in het hele konvergentiegebied van die reeks door een integraal van de vorm (8)

$$\int_0^1 \varphi^{(p)}(t)\,(1-t)^{x+p-1}\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wordt voorgesteld.

Rezumerende vinden we dus de stelling: *Een fakuleitreeks waarvan het konvergentiegebied het halfvlak rechts van de lijn $R(x) = \xi$ is, wordt, als $\xi \overline{>} 0$, in een eventueel bestaande strook van voorwaardelike konvergentte door dezelfde integraal van de vorm* (1) *voorgesteld als in het gebied van absolute konvergentie. Is $\xi < 0$, dan geldt hetzelfde verband ten aanzien van zeker restdeel van de reeks en een integraal van de vorm* (8).

[1]) De hier in 't kort vermelde waarheden zijn door Pincherle bewezen in zijn verhandeling „Sur les fonctions déterminantes". Ann. Éc. Norm. (3) XXII, 1905, p. 13—17. Hun analogie met degene die wij in 't vorig nummer vermeld hebben, springt in 't oog.

15. Ten slotte willen we een kleine verbetering en aanvulling geven van de twee slotalineas van N°. 6 in de tweede mededeling. De zinsnede: „is een funksie op de konvergentiesirkel kontinu en van eindig écart, *of heeft een afgeleide van zekere negatieve orde die eigenschap*" bevat een onjuistheid, omdat daaruit te lezen is, als zou het wel voor kunnen komen dat *niet* zekere afgeleide die eigenschap had. Dit is niet het geval; zodra de door (14) bepaalde karakteristiek λ' van de koeffisienten a_n in de machtreeksontwikkeling van een funksie $\varphi(t)$ eindig is, heeft die funksie steeds een afgeleide van zekere orde $-\omega$, die de bedoelde eigenschap heeft, en wel is altijd

$$\omega = \lambda' + 1.$$

Verder kan, zoals HADAMARD aantoont[1]), een funksie $\varphi(t)$ die op de *hele* sirkelomtrek van de orde ω is, en op een deel daarvan dat het punt $t = 1$ bevat van *lagere* orde ω_0, steeds gesplitst worden in twee funksies $\varphi_1(t)$ en $\varphi_2(t)$, waarvan de eerste *regulier* is in $t = 1$ (en van de orde ω op de hele sirkelomtrek), en de andere van de orde ω_0 op de hele sirkelomtrek. Volgens de stelling die we in het onderhavige nummer 6 bewezen hebben kan nu de integraal

$$\int_0^1 \varphi_1(t)\, t^{x-1}\, dt,$$

c.q. een integraal met $\varphi_1^{(p)}(t)$ voor $R(x) > \omega - 1 = \lambda'$ in een fakulteitreeks worden ontwikkeld. Verder kan de integraal.

$$\int_0^1 \varphi_2(t)\, t^{x-1}\, dt$$

c.q. een integraal met $\varphi_2^{(q)}(t)$ in ieder geval voor $R(x) > \omega_0$ in een fakulteitreeks worden ontwikkeld. Dus kan de integraal (1), die de som is van deze twee integralen, of een integraal met $\varphi^{(r)}(t)$ in een zodanige reeks worden ontwikkeld voor

$$R(x) > \omega_0 \quad \text{of} \quad R(x) > \lambda',$$

al naarmate het eerste of het tweede getal de grootste waarde heeft. In het eerste geval konvergeert de reeks *voorwaardelik* voor

$$\omega_0 < R(x) < \lambda' + 1,$$

in 't laatste voor

$$\lambda' < R(x) < \lambda' + 1.$$

In alle gevallen kunnen we dus deze stelling uitspreken:

Is ω de orde van $\varphi(t)$ op de hele konvergentiesirkel, dus $\lambda' = \omega - 1$

[1]) „Essai sur l'étude des fonctions", Journ. de Math., 1892, p. 172.

de karakteristiek van zijn koeffisienten, en ω_0 *de orde in het punt* $t = 1$ *van die sirkel, dan kan de integraal* (1) (*resp. de integraal* (8)) *in een fakulteitreeks worden ontwikkeld voor zodanige waarden van* x *dat tegelijkertijd aan de beide voorwaarden*

$$R(x) > \lambda' \quad \text{en} \quad R(x) > \omega_0$$

voldaan is.

We kunnen echter niet zeggen dat deze stelling *in de plaats komt* van die van NIELSEN, omdat het niet waar is dat nooit konvergentie van de fakulteitreeks plaats vindt voor $R(x) < \omega_0$. Beschouw bv. de funksie van WEIERSTRASS

$$\varphi(t) = 1 + t^2 + t^4 + t^8 + \ldots + t^{2^k} + \ldots$$

Deze heeft de konvergentiesirkel als coupure, en wel omdat feitelik alle boogdelen daarvan gelijkwaardig zijn, zoals blijkt uit de substitutie

$$t = t' e^{\frac{2\pi i h}{2^k}},$$

waarin k en h willekeurige gehele getallen zijn. De orde ω_0 in het punt $t = 1$ kan dus geen andere zijn dan die op de hele sirkelomtrek en deze is gelijk aan 1, omdat de karakteristiek λ' van de koeffisienten nul is. De grootheid λ is echter eveneens gelijk aan nul en de met $\varphi(t)$ korresponderende fakulteitreeks konvergeert ook voor $R(x) > 0$, en is voor al deze waarden van x gelijk aan de integraal (1) [1]).

---

[1]) De konvergentie van de fakulteitreeks is in dit geval ook in de strook $0 < R(x) < 1$ *absoluut*, wegens de grote afstand tussen de koeffisienten die van nul verschillen. Als we dus in 't voorgaande voortdurend gesproken hebben van eventueel *voorwaardelike* konvergentie voor $R(x) < \lambda' + 1$, dan is dit *in 't algemeen* bedoeld.

Wiskunde. — De Heer LORENTZ biedt een mededeling aan van de Heer H. B. A. BOCKWINKEL: *„Over de noodzakelike en voldoende voorwaarde voor de ontwikkeling van een funksie in een Binomiaalkoeffisientenreeks".*

(Mede aangeboden door den Heer KLUYVER).

PINCHERLE heeft een noodzakelike en voldoende voorwaarde voor de ontwikkeling van een funksie in een binomiaalkoeffisientenreeks (B. K. R.) gegeven [1]). Deze luidt als volgt:

Zal eèn analitiese funksie $\omega(x)$ *in een B. K. R. te ontwikkelen zijn, d. i. in een reeks van de gedaante*

$$\omega(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_n \; c_n \binom{x-1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dan moet $\omega(x)$ *koeffisientfunksie (fonction coefficiente) zijn van een andere analatiese funksie* $\varphi(t)$, *die voor* $t = \infty$ *regulier en gelijk nul is en waarvan de singulariteiten binnen een sirkel* (1,1), *met middelpunt* $t = 1$ *en straal* 1, *of op de omtrek daarvan liggen, mits in 't laatste geval de orde van* $\varphi(t)$ *op genoemde omtrek, in de door* HADAMARD *gedefinieerde zin, eindig of negatief oneindig is* [2]).

Onder een koeffisientfunksie $\omega(x)$ van een analitiese funksie $\varphi(t)$ van de aangegeven aard verstaat PINCHERLE een funksie die, al naar de orde van $\varphi(t)$, op min of meer eenvoudige wijze uit deze laatste kan worden afgeleid. De betrekking tussen beide funksies is echter altijd zó dat omgekeerd $\varphi(t)$, die door PINCHERLE de *voortbrengende funksie* (fonction génératrice) van $\omega(x)$ genoemd wordt, uit $\omega(x)$ volgt door de vergelijking

$$\varphi(t) = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{\omega(n+1)}{t^{n+1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dat wil zeggen: de *koeffisienten* van de reeks naar negatieve gehele machten van t, waarin $\varphi(t)$ in de omgeving van $t = \infty$ kan

[1]) S. PINCHERLE, „Sur les fonctions déterminantes", Annal. de l'Ecole Normale, 1905.

[2]) Een sirkel met middelpunt α en straal r duiden we aan door (α, r).

ontwikkeld worden, zijn gelijk aan de waarden van $\omega(x)$ voor gehele pozitieve waarden van x.

De vraag is nu, hoe men van een *gegeven* funksie $\omega(x)$ uitmaken zal of hij in een B. K. R. ontwikkeld kan worden. *Deze vraag wordt door de stelling van* PINCHERLE *niet beantwoord*, tenminste niet op enigermate eenvoudige wijze, zoals uit het volgende blijkt. Men zal vooreerst uit de gegeven funksie $\omega(x)$ de reeks (2) afleiden. Daarna moet men onderzoeken of de hierdoor voorgestelde funksie $\varphi(t)$ de vereiste eigenschappen heeft: regulier te zijn buiten de sirkel (1,1) en op de omtrek daarvan van eindige orde. Men zal dus de genoemde reeks trachten te transformeren in een andere naar negatieve gehele machten van $t-1$

$$\varphi(t) = \sum_{0}^{\infty} {}_n \frac{c_n}{(t-1)^{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Het verband tussen de koeffisienten van beide reeksen wordt, zoals bekend is, geleverd door de beide vergelijkingen

$$c_n = \omega(n+1) - \binom{n}{1}\omega(n) + \ldots + (-1)^n \omega(1) = \Delta^n [\omega(1)]^{1)} \quad . \quad (4)$$

en

$$\omega(n+1) = c_0 + \binom{n}{1} c_1 + \ldots + c_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

Met behulp van (4) moet men nu nagaan of de reeks (3) buiten de sirkel (1,1) konvergeert, en of verder de *karakteristiek* λ' van de koeffisienten c_n, die bepaald wordt door de gelijkheid

$$\lambda' = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |c_n|}{\log n}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

niet pozitief oneindig groot is; het laatste is nl. de voorwaarde er voor dat $\varphi(t)$ op de omtrek van (1,1) van eindige orde is.

De relatie (4) is echter tamelik ingewikkeld, zodat het heel lastig, zo niet ondoenlik kan worden, het laatstgenoemde onderzoek uit te voeren. Maar gesteld al dat dit nog gaat, en dat λ' van $+\infty$ verschilt. Dan moet nog worden nagegaan of de gegeven funksie $\omega(x)$ nu werkelik ook de koeffisientfunksie van $\varphi(t)$ is. Want er zijn talrijke funksies $\Omega(x)$ die tot *dezelfde* voortbrengende funksie $\varphi(t)$ aanleiding geven, nl. al degene die bevat zijn in de vergelijking

$$\Omega(x) = \omega(x) + F(x)$$

waarin $F(x)$ een funksie is die voor gehele pozitieve waarden van

[1]) Hiermee wordt het n^e verschil van $\omega(x)$ op de plaats $x=1$, bij argumenttoename $\Delta x = 1$, bedoeld.

x nul wordt. Het is dus nodig, de definitie van PINCHERLE voor de koeffisientfunksie te raadplegen, en deze op de verkregen $\varphi(t)$ toe te passen en te zien of $\omega(x)$ er weer uitkomt. Maar ook dit is gemakkeliker gezegd dan gedaan. Als de door (5) bepaalde karakteristiek λ' kleiner is dan -1, dan is $\varphi(t)$ ook op de omtrek van de sirkel (1,1) eindig en doorlopend. De koeffisientfunksie wordt dan gedefinieerd door de integraal

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(1,1)} \varphi(t)\, t^{x-1}\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

langs de omtrek van genoemde sirkel, en in het halfvlak van x rechts van de imaginaire as is deze integraal bij bepaalde afspraken omtrent de waarde van t^{x-1}, gelijk aan de B. K. R. (1). Men moet dus onderzoeken of hij tevens gelijk is aan $\omega(x)$. Dit kan wel weer lastig zijn. Maar bepaald moeilik wordt het, als $\lambda' > -1$ is, vooral als het verschil met -1 wat erg groot is. Want de koeffisientfunksie van $\varphi(t)$ wordt in dat geval door middel van een veelterm, die uit een zeer groot aantal termen bestaat, in verband gebracht met die van een andere voortbrengende funksie, waarvoor $\lambda' < -1$ is.

Men is dus wel gerechtigd tot de vraag, of het mogelik is, eenvoudiger karaktereigenschappen te vinden die *voldoende* zijn voor de ontwikkeling van een funksie in een B. K. R. Dit is inderdaad het geval en zelfs kan van de gevonden eigenschappen wel zo ongeveer gezegd worden dat ze *noodzakelik* zijn [1]). We kunnen n.l. de volgende stelling bewijzen:

Is een funksie $\omega(x)$ in het eindige deel van een halfvlak $R(x) > \gamma$ [2]) *(γ = reëel) regulier, en voldoet hij in dat hele gebied, dus ook in 't oneindige, aan de voorwaarde*

$$|\omega(x)| < M\, |(x+b)^l\, a^{x-\gamma}|\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

[1]) Ter vergelijking merken we op dat voor de ontwikkelbaarheid in *fakulteitreeksen*

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{n!\, a_n}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

een door NIELSEN opgestelde en door PINCHERLE vereenvoudigde noodzakelike en voldoende voorwaarde geldt, die veel overeenkomst heeft met degene die PINCHERLE voor de B. K. R. heeft gegeven. Maar voor fakulteitreeksan lukt het niet, om *eenvoudige* karaktereigenschappen aan te geven, die voldoende en ook noodzakelik zijn, om een funksie er in te kunnen ontwikkelen. De enige eenvoudige *voldoende* voorwaarde hiervoor is, dat een funksie in het oneindige regulier en gelijk nul is. Maar deze voorwaarde is verre van noodzakelik.

[2]) $R(x)$ betekent het reële deel van x.

waarin M een pozitief, l en b reële getallen zijn, het laatste zodanig dat $b+\gamma>0$ [1]), *en a een kompleks getal op de omtrek van de sirkel* (1,1), *veranderlik met het argument* ψ *van* $x-\gamma$, *zodanig dat het argument* α *van* a *gelijk is* $-\psi$ *en men dus heeft*

$$a = 2 \cos\psi\, e^{-i\psi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

dan kan $\omega(x)$ *stellig in het gebied*

$$R(x) > l + \beta - \tfrac{1}{2}, \qquad (\beta = \text{reëel} > \gamma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

in de B. K. R.

$$\omega(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\, c_n \binom{x-\beta}{n} \text{ [2])} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ontwikkeld worden, indien $l+\beta-\frac{1}{2} \overline{>} \gamma$, *en anders in het gebied* $R(x) \overline{>} \gamma$.

De spesiale waarde $-\psi$ van het argument α van a is zó, dat de uitdrukking $a^{x-\gamma}$, bij gegeven $x-\gamma$, een zo groot mogelike modulus heeft, vergeleken met die voor andere a-waarden op de omtrek van de sirkel (1,1). *Wanneer de ongelijkheid* (7) *geldt bij* v a s t e *a op deze omtrek, dan is ontwikkeling mogelik in het gebied*

$$R(x) > l + \beta - 1 \;, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

indien $l+\beta-1 \overline{>} \gamma$, *en anders weer in* $R(x) \overline{>} \gamma$.

De in bovenstaande stelling bevatte voldoende voorwaarde voor de ontwikkeling van een funksie in een B. K. R. schijnt inderdaad zeer eenvoudig. Neemt men een funksie die voorgesteld kan worden door de gelijkheid

$$\omega(x) = (x+b)^k c^x \mu(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

waarin c een vast getal is *binnen* de sirkel (1,1) en $\mu(x)$ een funksie die in $R(x) \overline{>} \gamma$ binnen eindige grenzen blijft, dan is aan de ongelijkheid (7) voor een algebraïes willekeurig kleine waarde van l voldaan en dus ontwikkeling van $\omega(x)$ in een B. K. R. mogelik in het gebied $R(x) \overline{>} \gamma$. Voor $c=1$ levert (11) een uitdrukking die doet zien, dat alle in $R(x) \overline{>} \gamma$ reguliere funksies, die in 't oneindige verdwijnen, in dat gebied in een B. K. R. kunnen worden ontwikkeld; verder alle funksies die voor $x=\infty$ oneindig groot worden van lagere orde dan zekere eindige macht van x, dus ook alle wortel- en logaritme uitdrukkingen.

De manier waarop we tot bovengenoemde stelling gekomen zijn is in beginsel analoog met die waarop men in de funksieteorie de

[1]) Dit dient om er voor te zorgen dat $(x+b)^l$ niet eventueel een singulier punt heeft in $R(x) \overline{>} \gamma$.

[2]) Deze reeks is ter wille van de algemeenheid in plaats van (1) genomen.

ontwikkeling van een funksie in een machtreeks afleidt; hij berust op toepassing van de integraalstelling van CAUCHY. Volgens deze heeft men

$$\omega(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W}\frac{\omega(z)\,dz}{z-x}\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (12)$$

waarbij de integraal genomen wordt langs een gesloten kromme W, waarbinnen en waarop $\omega(x)$ regulier is, en die het punt $z=x$ insluit. Wanneer men uit deze integraal een ontwikkeling naar pozitieve gehele machten van $x-a$ wil afleiden, waarin a een getal binnen W is, dan gaat men uit van de *bekende* ontwikkeling met *bekende* restterm van $\frac{1}{z-x}$ in zulk een reeks. Zo bereikt men ook het hier gestelde doel, wanneer men gebruik maakt van de bekende B.K.R. met bekende restterm waarin men de laatstgenoemde funksie kan ontwikkelen, nl.

$$\frac{1}{z-x}=\sum_{0}^{n-1}{}_m\frac{(x-\beta)\ldots(x-\beta-m+1)}{(z-\beta)\ldots(z-\beta-m)}+\frac{(x-\beta)\ldots(x-\beta-n+1)}{(z-\beta)\ldots(z-\beta-n+1)}\cdot\frac{1}{z-x}.$$

Substitueert men deze uitdrukking in de integraal (12) en laat men de integratieweg, behalve om $z=x$, ook om de punten $z=\beta$, $\beta+1,\ldots\beta+n-1$, heen lopen, [1]) dan vindt men de uitkomst

$$\omega(x)=\sum_{0}^{n-1}{}_m\binom{x-\beta}{m}\Delta^m\omega(\beta)+R_n\quad .\quad .\quad .\quad .\quad (13)$$

met

$$R_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{W}\omega(z)\frac{(x-\beta)\ldots(x-\beta-n+1)}{(z-\beta)\ldots(z-\beta-n+1)}\cdot\frac{dz}{z-x}\quad .\quad .\quad (13')$$

Formule (13) is de gewone interpolatieformule van NEWTON, met toevoeging van een restterm en geldig voor alle komplekse x-waarden die binnen W liggen.

Wil men aan de eis voldoen dat alle punten $z=\beta,\beta+1,\ldots,\beta+n-1$, binnen de integratiekromme W vallen, dan zal deze in 't algemeen met toenemende waarden van n gewijzigd moeten worden. Het is nu de vraag om W zo gunstig mogelik te kiezen, d.w.z. zó, dat de

[1]) Sluit men enige punten β, $\beta+1,\ldots$, uit, dan krijgt men een uitkomst waar van de nadere beschouwing tot de zogenaamde *nul*ontwikkelingen in B. K. R. aanleiding geeft, die door PINCHERLE op elementaire wijze in Rendic. d. R. Accad. d. Lincei, 1902, 2e Sem. behandeld zijn.

restterm (13') bij toenemende n tot nul nadert, maar toch het funksionele ensemble van funksies $\omega(x)$ waarvoor dat nul worden plaats vindt, zo uitgebreid mogelik is. Gaat men nu van de ongelijkheid (7) als norm voor deze funksies uit, waarbij het getal a voorlopig als onbekend beschouwd wordt en het getal γ, om een bepaald geval te hebben, gelijk aan nul genomen (zodat $\beta > 0$ is), dan vindt men ten slotte na een tamelik uitgebreid maar prinsipieel niet moeilik onderzoek: 1°. dat de gunstigste integratieweg een sirkel is, die door de oorsprong gaat en tot middelpunt $z = n$ heeft; 2°. dat voor a een kompleks getal genomen kan worden gelegen op de omtrek van de sirkel (1,1), met de biezonderheden over de geldigheidsgebieden die al in de uitgesproken stelling vermeld zijn.

Op te merken valt nog dat, in geval in formule (11) het getal c reëel en gelijk aan of kleiner dan 1 is, een *vaste* integratieweg voor de restintegraal (13') kan worden aangenomen, zodra het getal n een zekere grootte bereikt, en wel de imaginaire as. Het bewijs dat $\lim R_n = 0$, voor $n = \infty$, is dan zeer gemakkelik, zodat de boven afzonderlik vermelde gevallen van ontwikkelbaarheid in een B.K.R. op *korte* wijze uit de integraal van CAUCHY kunnen worden afgeleid.

Wat nu verder de vraag betreft, in hoeverre de ongelijkheid (7) *noodzakelik* is voor de ontwikkeling van een funksie in een B.K.R., door de manier, waarop de *voldoende* voorwaarde is afgeleid, heeft men wel de overtuiging verkregen dat het door deze voorwaarde omvatte ensemble van ontwikkelbare funksies zo groot mogelik is. Om dienaangaande zekerheid te krijgen is het nodig te onderzoeken, hoe een funksie, die door een B.K.R. wordt voorgesteld, zich in het konvergentiegebied van die reeks gedraagt. Dit onderzoek kan worden uitgevoerd met behulp van de in de stelling van PINCHERLE bevatte uitspraak dat een B.K.R. noodzakelik een *koeffisientfunksie* voorstelt, tenminste in het gebied van *absolute* konvergentie van die reeks, want daarvoor alleen bewijst PINCHERLE zijn stelling.

We nemen eenvoudigheidshalve voor de B.K.R. de oorspronkelike, door PINCHERLE beschouwde vorm (1) aan. Is de karakteristiek λ' van de reekskoeffisienten c_n kleiner dan -1, dan kan, zoals gezegd is, de B.K.R. in het halfvlak $R(x) > 0$ door de integraal (6) worden voorgesteld. Men kan nu bewijzen dat deze integraal in het genoemde gebied aan de voorwaarde (7), met $\gamma = 0$ voldoet, en dat daarbij de eksponent l de voorwaarde

$$l < -\tfrac{1}{2} + \sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

bevredigt, waarin σ een *willekeurig klein* pozitief getal is. Deze voorwaarde kan nog gepresizeerd worden, wanneer men een eigenschap

van de funksionele operatie I, waardoor, naar de opvatting van PINCHERLE, de voortbrengende funksie $\varphi(t)$ in de koeffisientfunksie $\omega(x)$ overgaat, enigszins uitbreidt, we bedoelen de eigenschap

$$I\,[\varphi^{(r)}(t)] = \frac{(-1)^r\,\Gamma(x)}{\Gamma(x-r)}\,I\,[t^{-r}\,\varphi(t)]\,,$$

die PINCHERLE (l.c. p. 30) vermeldt voor het geval dat r geheel, pozitief is. Stelt men $r = -\alpha$ en vervangt men $\varphi(t)$ door $\varphi(t):(t-1)^\alpha$, dan gaat deze formule over in

$$I\left[(-1)^\alpha\,D^{-\alpha}\,\frac{\varphi(t)}{(t-1)^\alpha}\right] = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)}\,I\left[\frac{t^\alpha\,\varphi(t)}{(t-1)^\alpha}\right]. \quad . \quad . \quad (15)$$

De laatste gelijkheid blijkt nu werkelik te gelden voor *willekeurige pozitieve* waarden van α[1]), indien men voor de afgeleide van willekeurige negatieve orde $-\alpha$ van een funksie de definitie van RIEMANN aanneemt, die men voor het hier aanwezige geval dat een omgeving van $t = \infty$ beschouwd wordt, kan uitdrukken door de identiteit

$$(-1)^\alpha\,D^{-\alpha}\,\frac{\varphi(t)}{(t-1)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty \frac{(u-t)^{\alpha-1}}{(u-1)^\alpha}\,\varphi(u)\,du\,. \quad . \quad . \quad (16)$$

Aangezien als gebied van t en u beschouwd wordt het deel van het komplekse vlak buiten zekere sirkel met middelpunt 1, doet men het beste, als integratieweg tussen $u = t$ en $u = \infty$ te denken de halfrechte, met beginpunt $u = t$, waarvan het verlengde door $u = 1$ gaat. De grootheden $u-t$ en $u-1$ hebben dan hetzelfde argument en $(u-t)^\alpha : (u-1)^\alpha$ is reëel. Bij deze afspraken heeft men de reeksontwikkeling

$$(-1)^\alpha\,D^{-\alpha}\,\frac{\varphi(t)}{(t-1)^\alpha} = \sum_0^\infty{}_n \frac{\Gamma(n+1)\,c_n}{\Gamma(n+1+\alpha)\,(t-1)^{n+1}} \quad . \quad . \quad (17)$$

zodat de afgeleide van negatieve orde $-\alpha$ van de uitdrukking $\varphi(t):(t-1)^\alpha$, evenals $\varphi(t)$ zelf, regulier en gelijk aan nul is voor $t = \infty$. De karakteristiek is echter een bedrag α kleiner en dit maakt dat men met behulp van formule (15) de koeffisientfunksie $\omega(x)$ van een voortbrengende funksie $\varphi(t)$ met karakteristiek $\lambda' < -1$ kan uitdrukken in een voortbrengende funksie $\varphi_1(t)$ waarvan de karakteristiek *willekeurig weinig* kleiner is dan -1. Men konstrueert daartoe $\varphi_1(t)$ zodanig dat de gegeven funksie $\varphi(t)$ de afgeleide van zekere negatieve orde $-\alpha$ van $\varphi_1(t):(t-1)^\alpha$ is, en het getal α kiest men in een verzameling van pozitieve waarden waarvan de bovenste grens gelijk is aan het bedrag dat λ' kleiner is dan -1. M. a. w. is $\varphi(t)$ weer door (3) gegeven, dan stelt men

[1]) Het bewijs hiervoor zal worden medegedeeld in het Verslag van de a.s. September vergadering.

$$\varphi_1(t) = \sum_{0}^{\infty} {}_n \frac{c'_n}{(t-1)^{n+1}}$$

waarin de betekenis van c'_n gegeven wordt door

$$c_n = \frac{\Gamma(n+1)\, c'_n}{\Gamma(n+1+\alpha)}$$

met

$$\alpha = -1 - \lambda' - \delta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

als δ_1 een willekeurig klein pozitief getal is. Men heeft dan blijkens (17)

$$\varphi(t) = (-1)^{\alpha} D^{-\alpha} \frac{\varphi_1(t)}{(t-1)^{\alpha}}$$

en dus volgens (15)

$$\omega(x) = I[\varphi(t)] = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\alpha)}\, I\left[\frac{t^{\alpha}\varphi_1(t)}{(t-1)^{\alpha}}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Niet alleen voor $\varphi_1(t)$, maar ook voor de funksie

$$\psi(t) = \frac{t^{\alpha}\varphi_1(t)}{(t-1)^{\alpha}}$$

geldt de eigenschap dat toepassing van de operatie I daarop een koeffisientfunksie geeft die voldoet aan de voorwaarde (7) met behoud van de ongelijkheid (14) voor l. Alleen is nu $\gamma = -\alpha$, in plaats van gelijk aan 0 en het geldigheidsgebied wordt bepaald door $R(x) > -\alpha$, of volgens (18), door

$$R(x) > \lambda + \delta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

als men heeft

$$\lambda = \lambda' + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Dat wil zeggen: het geldigheidsgebied van de ongelijkheid (7) is op willekeurig weinig na het halfvlak van *absolute* konvergentie van de reeks (1).

Voor het hele rechterlid van (19), d. i. voor $\omega(x)$, volgt hieruit de ongelijkheid

$$|\omega(x)| < M\,|(x+b)^l\, a^{x-(\lambda+\delta_1)}|\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

met

$$l < \lambda - \tfrac{1}{2} + \delta_1 + \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Is eindelik de karakteristiek λ' van $\varphi(t)$ groter dan -1 of gelijk daaraan, dan kan men volgens PINCHERLE de koeffisientfunksie uitdrukken in die van een andere voortbrengende funksie $\varphi_1(t)$, met karakteristiek kleiner dan -1. Zij ten eerste

$$-1 \leq \lambda' < 0,$$

dan beschouwt PINCHERLE als hulpfunksie

$$\varphi_1(t) = -D^{-1}\left(\frac{\varphi(t)}{t-1}\right),$$

die een karakteristiek $\lambda' - 1$ kleiner dan -1 heeft, zodat de bijbehorende koeffisientfunksie $\omega_1(x)$ in het gebied $R(x) > \lambda - 1 + \delta_1$ aan de ongelijkheid

$$|\omega_1(x)| < M\,|(x+b)^l\, a^{x-(\lambda-1+\delta_1)}|$$

met

$$l < \lambda - \tfrac{3}{2} + \delta_1 + \delta$$

voldoet. De koeffisientfunksie $\omega(x)$ van $\varphi(t)$ staat met laatstgenoemde in verband door middel van de formule [1])

$$\omega(x) = \Delta\,[(x-1)\,\omega_1(x-1)]$$

en daaruit volgt dat $\omega(x)$ juist weer in het gebied (20) aan de ongelijkheid (22) met voor l de ongelijkheid (23) voldoet. Op deze manier kan men achtereenvolgens voor de intervallen $(0,1)$, $(1,2)\ldots$ van λ' dezelfde ongelijkheid aantonen.

Bevredigt $\omega(x)$ deze ongelijkheid voor zekere waarde van l, dan blijkbaar voor alle grotere waarden. Er is dus een benedenste grens l_0 van zulke waarden, maar het kan zijn dat deze l_0 niet voor l in (22) gesubstitueerd mag worden. In plaats daarvan kunnen we evenwel schrijven

$$\omega(x) \sim (x+b)^{l_0}\, a^{x-(\lambda+\delta_1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

met de betekenis dat de ongelijkheid (22) geldt voor iedere $l > l_0$; we kunnen (24) een equivalentievergelijking noemen, en zeggen dat $\omega(x)$ equivalent is met het rechterlid daarvan. De eksponent l_0 voldoet dan, daar δ en δ_1 willekeurig klein waren, aan de voorwaarde

$$l_0 \leqq \lambda - \tfrac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

De stelling, die op de *noodzakelike* voorwaarde voor ontwikkelbaarheid in een B. K. R. betrekking heeft, kan dus als volgt in woorden gebracht worden:

Een B. K. R. van de vorm (1) *stelt in ieder halfvlak binnen het gebied van zijn* absolute *konvergentie:* $R(x) > \lambda$, *een funksie* $\omega(x)$ *voor die de equivalentievergelijking* (24) *bevredigt; de eksponent* l_0 *voldoet daarbij aan de ongelijkheid* (25).

Vergelijkt men nu deze stelling met degene die op de *voldoende* voorwaarde betrekking heeft, dan ziet men vooreerst tussen de majorantwaarden (7) en (22) een volkomen overeenstemming in vorm. *Deze majorantwaarden zijn dus zowel noodzakelik als voldoende.* Wat verder meer presies de geldigheidsgebieden betreft, de ongelijkheid (9) gaat hier, daar $\beta = 1$ is, over in $R(x) > l + \frac{1}{2}$, of ook in

[1]) PINCHERLE, l. c, p. 64.

$$R(x) > l_0 + \tfrac{1}{2},$$

als we l_0 weer de benedenste grens van l-waarden noemen, die voor de gegeven funksie in aanmerking komen. Uit (25) volgt voor het *absolute* konvergentiegebied presies dezelfde ongelijkheid. Daar het gebied van eventueel voorwaardelike konvergentie zich hoogstens over een strook ter breedte 1 links van het absolute konvergentiegebied uitstrekt, laat het door ons uitgevoerde onderzoek de mogelikheid open dat een B. K. R. soms ook nog in een strook bepaald door

$$l_0 - \tfrac{1}{2} < R(x) < l_0 + \tfrac{1}{2}$$

of in een onderdeel daarvan een funksie voorstelt die aan de voorwaarde (24) voldoet. Om dienaangaande zekerheid te krijgen, zou men een onderzoek moeten instellen naar de wijze waarop een funksie die door een B. K. R. wordt bepaald zich gedraagt in het gebied van eventueel voorwaardelike konvergentie. Tot zo'n onderzoek zijn we nog niet gekomen, maar nu kunnen we alvast wel inzien dat dit de kloof, die, wat de geldigheidsgebieden betreft, alsnog tussen voldoende en noodzakelike voorwaarde bestaat, niet geheel zou dempen. Ten eerste: Voldoet een funksie $\omega(x)$ aan equivalentievergelijking (24) bij *vaste* a op de omtrek van de sirkel (1,1), en met een zekere minimumeksponent l_0, dan voldoet hij, wegens hetgeen omtrent de uitdrukking $\overset{s}{\underset{\gamma}{\Sigma}}\, a^{x-\gamma}$ onmiddellik na formule (10) is opgemerkt, ook aan diezelfde ongelijkheid, wanneer a op de aangegeven manier met het argument ψ van x langs genoemde omtrek *verandert*. De eksponent l_0 kan daarbij echter niet verkleind worden, want die komt in ieder geval voor $\psi = -\alpha$ te pas, als α het argument van het oorspronkelike vaste getal a is. De uitspraak die bij de ongelijkheid (9′) behoort leert evenwel, dat in dit geval ontwikkeling van $\omega(x)$ in een B. K. R. mogelik is voor $R(x) > l_0$. De funksie

$$2^x = \sum_{0}^{\infty}{}_n \binom{x-1}{n},$$

waarvoor $a = 2$, en $l_0 = 0$ is, levert hiervan een voorbeeld, want de ontwikkeling geldt inderdaad voor $R(x) > 0$, en deze is voorwaardelik konvergent zolang $R(x) \overline{<} 1$. Hieruit volgt dat men nooit als *noodzakelike* voorwaarde $R(x) > l_0 + \frac{1}{2}$ zou kunnen vinden, terwijl onze stelling over de *voldoende* voorwaarde het, zonder nadere spesializatie, niet verder brengt dan tot de uitspraak dat ontwikkeling mogelik is in het gebied dat door die ongelijkheid bepaald wordt.

In de tweede plaats geldt laatstgenoemde uitspraak ook nog slechts als $\omega(x)$ in het gebied $R(x) > l_0 + \frac{1}{2}$ geen singuliere punten in het

eindige heeft; anders komt voor dit laatste gebied datgene in de plaats waar $\omega(x)$ regulier is en dat we bepaald hebben door de ongelijkheid $R(x) > \gamma$. Dus leert de stelling over de *noodzakelike* voorwaarde dat in het absolute konvergentiegebied $R(x) > l_0 + \frac{1}{2}$ is, maar omgekeerd is het niet waar dat in het door deze ongelijkheid bepaalde gebied ook *stellig* absolute konvergentie van de betreffende B.K.R. plaats vindt. Een eenvoudig voorbeeld hiervan levert de funksie

$$\omega(x) = \frac{1}{x}$$

op. Hiervoor is $l_0 = -\infty$, terwijl de funksie toch slechts in het regulariteitsgebied $R(x) > 0$ in een B.K.R. van de vorm (1) kan ontwikkeld worden.

Uit deze opmerkingen blijkt wel dat men de kloof, die tussen de hier gegeven noodzakelike en voldoende voorwaarde nog blijkt te bestaan, slechts zou kunnen dempen, door voor beide voorwaarden meer gedetailleerde stellingen uit te spreken. M.a.w. het zou moeten gelukken het funksionele ensemble van alle funksies die aan (24) voldoen door *spesiale karakterizeringen* te splitsen in groepen; evenzo het ensemble van binomiaalkoeffisientreeksen, zodanig dat tussen beide kategorieën van groepen een één-aan-éénkorrespondentie bestond, waarbij funksies van de groep k ontwikkelbaar waren in reeksen van de groep k en in geen andere. Maar het probleem, om zulke karakterizeringen te vinden, zal wel zeer moeilik zijn, aangezien er toe behoort, om uit het karakter van de reekskoeffisienten het karakter van de door die reeks voorgestelde funksie af te leiden, iets wat voor de meer bekende machtreeksen pas in de laatste tijd enigermate gelukt is.

Scheikunde. — De Heer BÖESEKEN biedt eene mededeeling aan van den heer H. P. BARENDRECHT: „*Urease en de stralingstheorie van enzymwerking.*"

(Mede aangeboden door den Heer KUENEN.)

III

8. *De invloed van vreemde stoffen op de werkzaamheid van urease.*

De vraag rees, of in deze geconcentreerde oplossingen van ureum de H-ionen concentratie wellicht verminderd was door de geringe alkaliteit van de ureum zelf.

De electrometrische bepaling van de p_H in de 8°/₀ phosphaat oplossingen vertoonde inderdaad een duidelijke toename na toevoeging van 8°/₀ ureum. Het werd echter spoedig vastgesteld, dat deze toename niet te wijten was aan een verschuiving van de ware reactie naar de alkalische zijde, maar aan een vermindering van zoowel H als OH ionen, of, in andere woorden, aan een verminderde dissociatie van H_2O in deze geconcentreerde oplossingen van ureum.

Deze conclusie was het resultaat van de volgende experimenten.

De p_H werd wederom bepaald in 8°/₀ phosphaat oplossingen. Daarna een tweede keer in dezelfde oplossingen na toevoeging van 8°/₀ ureum en een derde maal na toevoeging van een kleine hoeveelheid ammonia (1 c.c. van $\frac{1}{10}$N). Voor elk van deze bepalingen werd 10 c.c. van 9,6°/₀ phosphaat met water of verdunde ammonia tot 12 c.c. gebracht.

De resultaten waren de volgende:

p_H in:				
Phosphaat + 8 °/₀ ureum	Verschil	Phosphaat alleen	Verschil	Phosphaat + 1 c.c. $NH_3 \frac{1}{10} N$
6.79	0.11	6.68	0.03	6.71
6.97	0.08	6.89	0.03	6.92
7.59	0.10	7.49	0.07	7.56
7.93	0.10	7.83	0.18	8.01
8.20	0.10	8.10	0.34	8.44

Zooals blijkt uit SÖRENSEN's bepalingen van p_H in zijn standaard

phosphaat mengsels, neemt de buffer-waarde van deze oplossingen belangrijk af, als p_H tot 8 nadert. Daarom zal dezelfde kleine hoeveelheid alkalie, die een p_H van matige hoogte praktisch onveranderd laat, een merkbare rijzing in een p_H van ongeveer 8 veroorzaken. Dit komt duidelijk uit in de resultaten, verkregen bij toevoeging van ammonia.

De ureum echter doet de p_H met een gelijk bedrag toenemen, wat ook zijn oorspronkelijke waarde zij.

Deze toename is dus blijkbaar niet toe te schrijven aan een alkaliteit van de ureum. Een stof echter, die geen alkaliteit bezit, kan de H-ionen concentratie slechts verlagen, indien het de OH-ionen concentratie juist evenveel verlaagt.

Dit effect kan verwacht worden van alle neutrale stoffen, toegevoegd in zulk een bedrag, dat de concentratie van H_2O aanmerkelijk verlaagd wordt, mits hun ioniseerend vermogen veel kleiner zij dan dat van water. In zulk een geval zal het dissociatieproduct $C_H \times C_{OH}$ of, zooals het gewoonlijk genoemd wordt, de dissociatie constante van water, k_w, een vermindering vertoonen.

Dergelijke veranderingen van de dissociatie constante van water zijn reeds vroeger bestudeerd, b.v. door LÖWENHERTZ [1]) in een verhandeling over „De invloed van de toevoeging van ethylalcohol op de electrolytische dissociatie van water".

Met het oog op dezen invloed op k_w beloofde de studie van urease werking in oplossingen, gemengd met alcohol, interessante resultaten.

De alcohol, gebruikt in deze experimenten, was bevrijd van koolzuur door koken in een kolf aan een terugvloeikoeler.

Dezelfde 8°/₀ phosphaat buffer-mengsels en Soja extract werden gebruikt als vroeger bij de bepaling van m. Het bedrag aan alcohol, dat van te voren met het phosphaat gemengd moest worden, werd zoo berekend, dat ten slotte in de oplossing een concentratie van 5°/₀ bereikt zou worden. Ten einde te kunnen vergelijken werd hetzelfde Soja-meel gebruikt als in de vroegere experimenten. Die boonen waren ruim een jaar geleden gemalen en het meel had al eenige teekenen van verslapping getoond. Speciaal in alkalische oplossing bleek de constantheid van activiteit verminderd te zijn. Daarom werd in de alcohol experimenten met hooge p_H de m van de eerste periode genomen in plaats van het gemiddelde. Deze waarde werd dan vermenigvuldigd met de verhouding van de activiteiten bij dezelfde p_H, vroeger en thans gevonden.

De zoo verkregen resultaten zijn grafisch voorgesteld in figuur 6*l*,

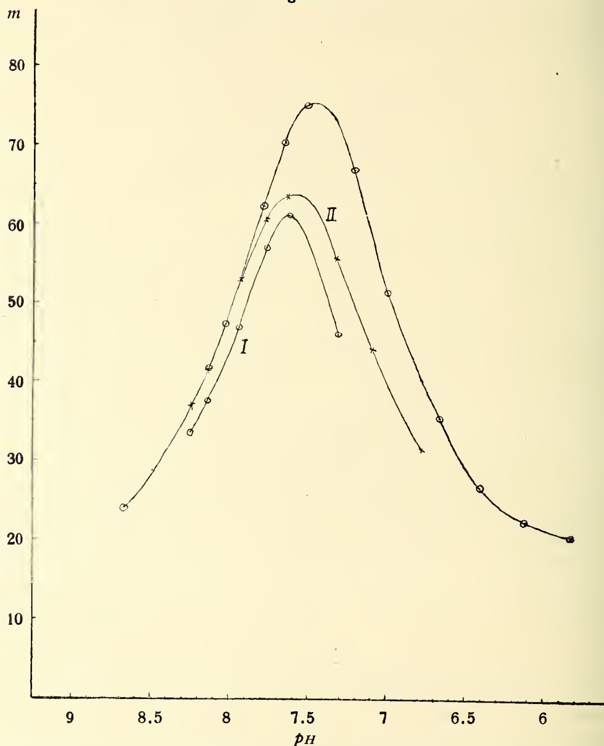
---

[1]) Zeitschr. physik. Chem. 1896, 20, 283.

waarin ter vergemakkelijking van de vergelijking ook de oorspronkelijke lijn voor m van figuur 3 is weergegeven.

De derde lijn II van deze figuur heeft de volgende beteekenis:

Figuur 6.



Volgens onze interpretatie van het toenemen van p_H met 0,10 door 5°/₀ alcohol, was k_w toegenomen met 0,20, p_{HO} met 0,10.

Zooals in het 5e deel dezer verhandeling is aangetoond, kan m als functie van p_H voorgesteld worden door:

$$m = 18 + \frac{4828}{1 + \frac{132,6 \times 10^{-8}}{(H)} + \frac{2170 \times 10^{-8}}{k_w}(H)}$$

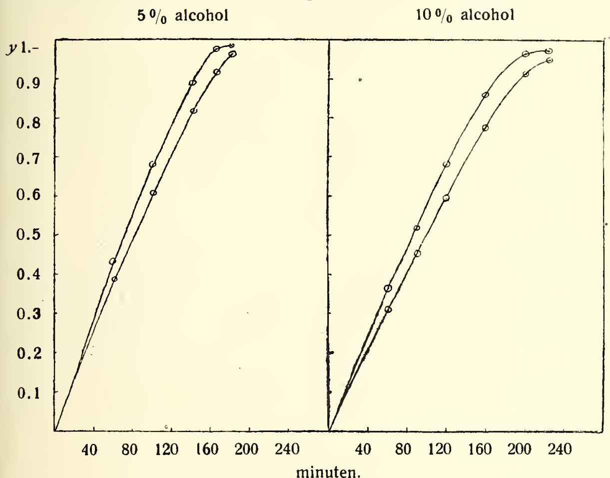
Nu k_w door de alcohol verminderd was van $10^{-13,78}$ tot $10^{-13,98}$, was het mogelijk door middel van deze formule een nieuwe kromme

II voor m te berekenen. Het verschil tusschen I en II kan, althans ten deele, toegeschreven worden aan de waarnemingsfouten, die zeer groot waren bij het gebruik van dit oude Soja-meel.

In een vroeger stadium dezer onderzoekingen was de invloed van neutrale stoffen als alcohol op de ureasewerking reeds onderzocht met behulp van het mengsel van ammonium-carbonaat + koolzuur als buffer, door proeven als die, welke beschreven zijn in deel 6.

Zoo gaf b.v. de proef van 25 Mei 1916, waarin 0,5 °/₀ ureum in ammonium-carbonaat (= 2 °/₀ ureum), met en zonder 5 °/₀ alcohol onderzocht werd, de resultaten, voorgesteld in figuur 7. Het gemid-

Figuur 7.



delde van m zonder alcohol was 0,00381, met 5 °/₀ alcohol 0,00335. Voor de berekening van m werd aangenomen, dat de p_H door 5 °/₀ alcohol evenveel verhoogd werd in dit geval als in de phosphaat-oplossingen.

Uit figuur 6 blijkt, dat tusschen $p_H = 7$ op de oorspronkelijke kromme en $p_H^{\cdot} = 7,1$ op de kromme II, de theorie een afname in m zou voorspellen van 51,3 tot 44,5, dat is van 1 tot 0,87.

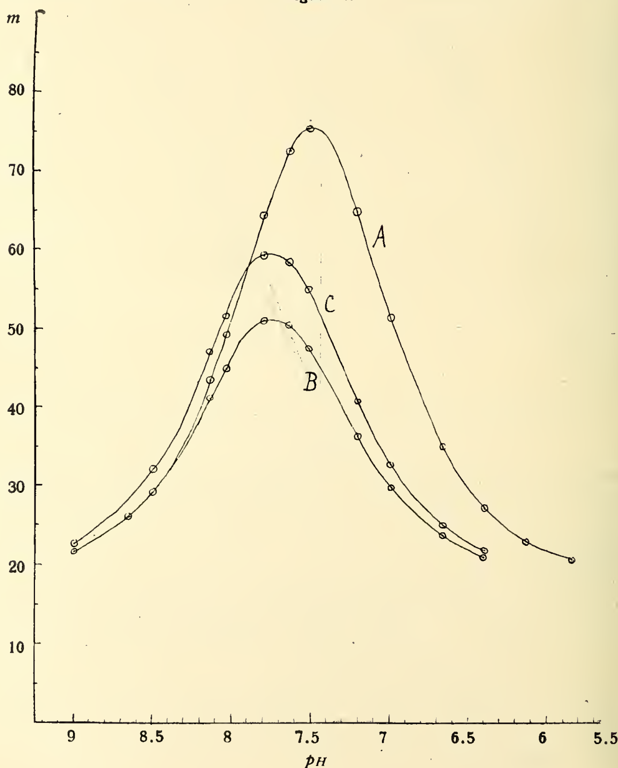
Volgens bovenstaande resultaten werd een afname gevonden van 38,1 tot 33,5, dat is van 1 tot 0,88.

Nadere overweging zoowel als verder experimenteel onderzoek toonde echter, dat het probleem gecompliceerder is dan het tot nu toe is voorgesteld.

Alcohol vermindert niet alleen de dissociatie-constante van water door vermindering van de concentratie C_{H_2O} in $C_H C_{OH} = k C_{H_2O}$, maar daar zijn ioniseerend vermogen veel kleiner is dan dat van water, zal hij ook de dissociatie-constante van een opgelosten electrolyt verminderen. Daarom moet men verwachten, dat de dissociatie-constanten van de amphotere electrolyt urease ook verminderd worden door alcohol.

De gevolgen van den eerstgenoemden invloed vau alcohol zijn, als aangetoond in figuur 6, een verlaging van de kromme en een verschuiving van het maximum naar links; het gevolg van den tweeden invloed, de vermindering van k_a en k_b in dezelfde mate,

Figuur 8.



is blijkbaar een vermeerdering van m, de ongedissocieerde fractie, zonder verandering van de abscis van het maximum.

Wat wij waarnemen is daarom de opeenstapeling van een positief en een negatief effect, waarbij in dit geval de afname van de dissociatie constante van water de bovenhand heeft.

Herhaling van het experiment van 25 Mei 1916, maar nu met 10 °/₀ alcohol, gaf op 30 Mei de resultaten, weergegeven in figuur 7. Zonder alcohol was $m = 0,00326$, met 10 °/₀ alcohol $m = 0,00267$.

De elektrische bepaling van de p_H in 8 °/₀ phosphaat-oplossingen met 10 °/₀ alcohol had gegeven

met 10 °/₀ alcohol	7,13	7,53
zonder alcohol	6,89	7,29
verschil	0,24	0,24

dus een constante toename, die beteekent een verandering in k_w van $10^{-13,78}$ tot $10^{-14,26}$.

Figuur 8 vertoont, tegelijk met de oorspronkelijke kromme van figuur 3, de kromme B, berekend voor

$$m = 18 + \frac{4828}{1 + \frac{132,6 \times 10^{-8}}{(H)} + \frac{2170 \times 10^{-8}}{k_w}(H)}$$

met de waarde $10^{-14,26}$ voor k_w.

De resultaten van deze berekening zijn samengebracht in kolom 3 van de volgende tabel.

TABEL 19.

p_H	$10^8\, C_{OH}$	m	m (indien k_a en k_b 20 °/₀ kleiner waren)
8.13	74.13	41	46.8
8.03	58.88	44.8	51.4
7.80	34.67	50.8	59.—
7.64	23.99	50.3	58.3
7.52	18.20	47.4	54.7
7.21	8.90	36.1	40.7
7.—	5.495	29.8	32.7
6.67	2.57	23.7	25.—
6.40	1.38	21.—	21.8
8.5	173.8	29.2	32.—
9.—	1660.—	21.6	22.5

Deze tabel en kromme B van figuur 8 zouden een afname in m voorspellen van 51,3 voor $p_H = 7$ tot 37,1 voor $p_H = 7,24$, dat is van 1 tot 0,725, terwijl experimenteel gevonden werd een afname van 1 tot 0,82.

De interpretatie van dit verschil is, dat de k_a en k_b ook aanmerkelijk verlaagd zijn door 10 % alcohol, dat daarom de „rest-kromme" van urease in deze oplossing geplaatst moet worden boven de kromme B van figuur 8.

De kromme C in figuur 8 en de vierde kolom van tabel 19 stellen voor de waarden, die m zou hebben, indien k_a en k_b beide 20 % waren afgenomen, terwijl k_w evenals in de kromme B de waarde $10^{-14.26}$ zou hebben.

Er moge hier de aandacht gevestigd worden op het feit, dat, indien een neutrale stof als alcohol de dissociatie constanten van urease zoowel als van water verlaagt, de nieuwe kromme voor m de oorspronkelijke snijdt, wat beteekent, dat in zulk een geval een duidelijke afname van activiteit te verwachten is bij lage p_H (in het onderhavige geval beneden $p_H = 7,85$) en door dezelfde oorzaak, een toevoeging van alcohol, een toename bij hooge p_H.

De invloed van neutrale zouten moge duidelijk gemaakt worden door het voorbeeld van 5 % KCl. Hier, als in alle vorige gevallen beteekent 5 % 5 gram in 100 c.c. van de oplossing.

In 8 % phosphaat-oplossingen bleek de p_H niet verhoogd, maar verlaagd te worden met een constant bedrag door 5 % KCl.

	p_H		
zonder KCl	6,13	6,89	7,29
met 5 % KCl	6,00	6,79	7,19
verschil	0,13	0,10	0,10

Niettemin had KCl in de ammonium-carbonaat oplossing een aanmerkelijke afname van de urease-activiteit teweeggebracht. Zonder KCl was hier $m = 0,0031$, met 5 % KCl $m = 0,0022$.

De conclusie, die uit die feiten getrokken moet worden, is, dat een neutraal zout als KCl alle dissociatie-constanten doet toenemen, zoowel die van urease als van water.

Wij hebben hier dus weer, en wel in sterke mate, een verandering in de natuur van de urease, een algemeene afname van zijn activiteit, teweeggebracht door een toename van zijn dissociatie-constanten.

Het toenemen van de dissociatie-constante van water door zouten was reeds waargenomen in deze studie bij de bepaling der hydroxylionen concentratie in 8 % phosphaat-oplossingen, waar de dissociatie-

constante van water bevonden is $10^{-13,78}$ te zijn, in plaats van $10^{-13,825}$, als in zuiver water.

Daarenboven wordt de gunstige werking van neutrale zouten op de catalytische activiteit van waterstof-ionen al sinds lang toegeschreven aan een verhooging van de dissociatie-constanten van zuren door zouten.

Een ander voorbeeld van zulk een effect is onlangs gegeven door KOLTHOFF [1]), die aantoonde, dat de dissociatie-constanten van indicatoren verhoogd worden door de toevoeging van neutrale zouten.

Manniet gedroeg zich evenzoo als kalium chloride.

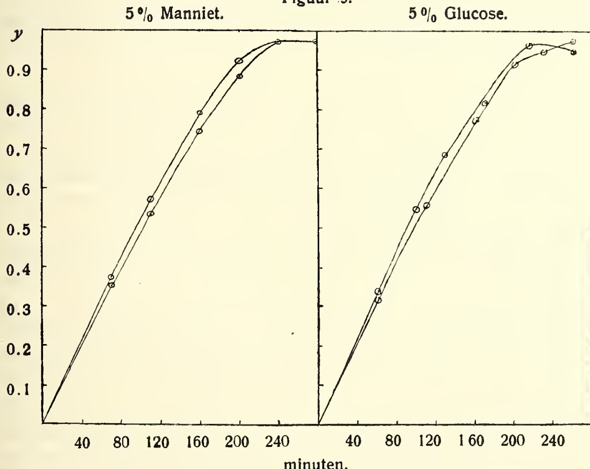
In 8 °/₀ phosphaat-oplossingen werden de volgende waarden voor p_H bepaald

zonder manniet	6,89	7,29
met 5 °/₀ manniet	6,84	7,24
verschil	0,05	0,05

Dus weder een constante afname van p_H, dat is een toename van de dissociatie constante van water.

In ammonium-carbonaat oplossing veroorzaakte 5 °/₀ manniet een geringe afname van de activiteit van urease (m nam af van 0,0029 tot 0,00275), waaruit is af te leiden, dat de dissociatie constanten van urease ook door deze neutrale stof verhoogd worden.

Figuur 9.



[1]) Chem. Weekblad 1918, 394.

Glucose, tot een bedrag van 5 %, toegevoegd aan ammonium-carbonaat oplossing, gaf slechts een zeer geringe afname van urease activiteit. De gevallen van manniet en glucose zijn weergegeven in figuur 9.

Men ziet, dat de algemeene aard van de kromme niet veranderd is door de toevoeging van neutrale stoffen, waaruit de gevolgtrekking gemaakt kan worden, dat alleen m in onze grond-vergelijking:

$$-dx = m \frac{x}{x+nc} dt$$

gewijzigd wordt.

Indien andere stoffen de straling absorbeerden evenals waterstof-ionen, zou de loop der krommen veranderd zijn, en wel zoo, dat met toenemende omzetting de logarithmische kromme genaderd werd.

De hierboven medegedeelde feiten en theoretische afleidingen zouden, althans voor een deel, een verklaring kunnen geven van de waarnemingen van ONODERA [1]), dat alcoholen de werking van urease zoowel kunnen verhoogen als verminderen. De experimenten van dezen auteur echter werden uitgevoerd zonder buffermengsels en zonder eenige bepaling van de p_H, die bij afwezigheid van buffers zeer sterk zich gewijzigd zal hebben. Daar de lange duur van de urease-werking in deze onbepaalde, maar stellig wel alkalische condities een schadelijke werking op de urease moet gehad hebben, des te meer naar mate de p_H hooger was, is het onmogelijk verder een scherpe interpretatie van deze resultaten te geven.

9. *Omkeering van de hydrolytische werking van urease op ureum.*

De algemeen aangenomen opvatting van de synthetische werking van enzymen, ook door schrijver dezes gedeeld, is, dat een en hetzelfde enzym het werkzame agens is bij het ontleden zoowel als bij het opbouwen van zijn specifiek substraat.

De omstandigheden echter, die een van de twee tegengestelde werkzaamheden de overhand doen krijgen, zijn tot nu toe nog niet duidelijk geworden.

Eenige waarnemingen, gemaakt in den loop van deze studie, tezamen met een algemeene beschouwing van de werkzaamheid van enzymen in levende weefsels, brachten schrijver dezes er toe de volgende hypothese op te stellen:

Rondom een enzym-molecuul wordt het substraat ontleed zoover de werking, uitstralende van het enzym, krachtig genoeg is. Verzwakt

[1]) Biochem. J. 1915, 563.

door verspreiding of door andere oorzaken, veroorzaakt dezelfde enzym-straling het omgekeerde verschijnsel, de synthese.

In levende planten en dieren gaan beide werkzaamheden van de enzymen voortdurend voort onder gewone condities, wat betreft concentratie van het substraat, temperatuur en zuurgraad. Zoodra echter het weefsel door mechanische middelen in een homogeen mengsel of oplossing is overgevoerd, verdwijnt nagenoeg alle synthetische kracht van het enzym. Zoo als b.v. wel bekend is, is het bij de extractie van glucosiden uit planten noodig eerst de enzymen te dooden door zaden of bladen in kokend water te dompelen, vóór dat de cellen verbrijzeld worden ter extractie. De glucosiden en hun enzymen zijn bevat in verschillende naast elkaar liggende cellen, zooals GUIGNARD reeds heeft aangetoond. De hypothese, dat enzymen hun synthetisch vermogen slechts op een zekeren afstand uitoefenen, geeft dadelijk een verklaring van deze feiten. Door de celwanden heen veroorzaakt de straling synthese in de nabijliggende cellen; zoodra enzym en substraat tezamen gebracht zijn, overheerscht de hydrolytische werking bijna uitsluitend.

Deze opvatting van de werkzaamheid van enzymen wordt door het experiment bevestigd op verschillende wijzen.

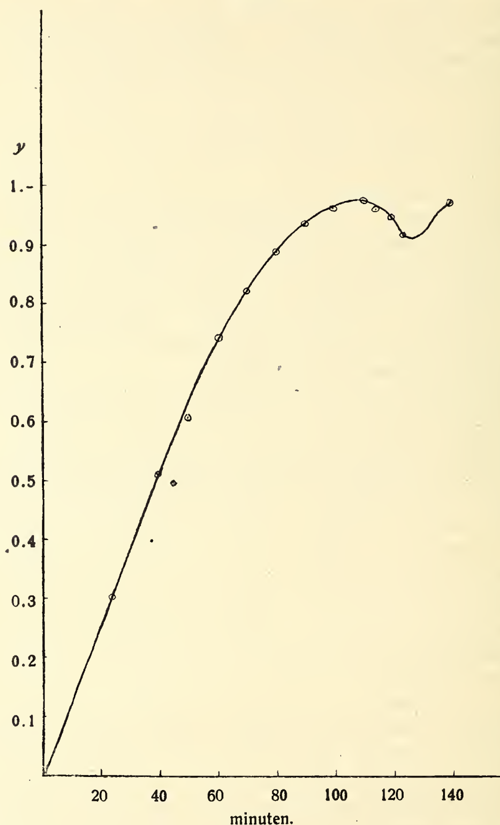
De verzwakking der straling kan, als boven opgemerkt, veroorzaakt worden, niet alleen door verspreiding, maar ook door andere factoren, b.v. de nadeelige werking van temperatuur en zuren of alkaliën in korter of langer tijd. Zooals zal blijken uit het volgende werd meermalen een omkeer van de hydrolyse van ureum waargenomen, die verklaard kan worden door een verval van de urease.

Den 18^{en} Nov. 1915 werd een experiment uitgevoerd met ammoniumcarbonaat als buffer, waarbij die terugloop van de omzetting op het einde zeer duidelijk voor den dag kwam. (Zie figuur 10 op de volgende pagina).

Het is te verwachten, dat de enzymmoleculen niet alle op denzelfden tijd in verval zullen komen. Op het einde der hydrolyse, wanneer de inwerking op de rest van de ureum zeer langzaam geworden is, en aan de andere zijde de concentratie van de reactieproducten overeenkomstig is toegenomen, kan het voorkomen, dat een voldoende gedeelte der enzymmoleculen in het stadium van verval is om aan de synthetische werking, daar die nu een hooger concentratie van substraat ter beschikking heeft, de bovenhand te geven over de langzame werking van het onveranderde enzym op de betrekkelijk zeer verdunde ureumoplossing. Gedurende zulk een periode zal het totale effect omgekeerd zijn en pas tot zijn normalen loop terugkeeren zoodra de onveranderde enzymmoleculen de ver-

vallende overtreffen, wat veroorzaakt kan worden door een verdere verzwakking of door totaal verval.

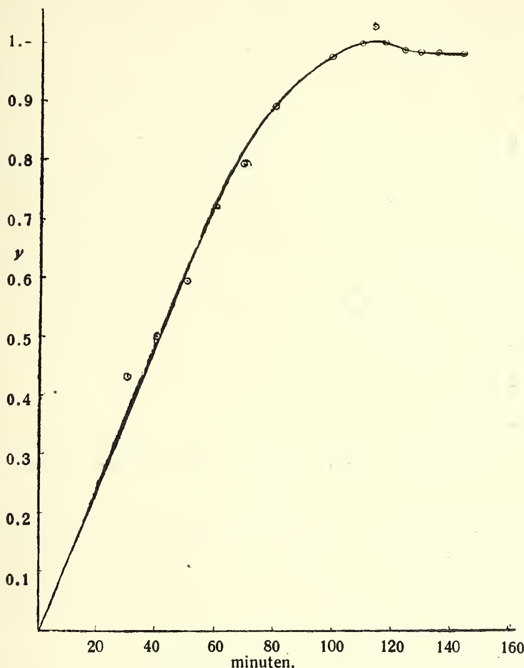
Figuur 10.



Figuur 11 geeft de resultaten van de proef van 2 Jan. 1916, op dezelfde wijze uitgevoerd als die van 28 Nov. 1915, die hetzelfde verschijnsel vertoont in wat kleinere mate. (Zie figuur 11 op de volgende pagiga).

In de phosphaatoplossingen van hooge p_H kwam soms ook die omkeering voor den dag.

Figuur 11.



Eerst moet vermeld worden een experiment van 6 April 1917, dat regelmatig verliep.

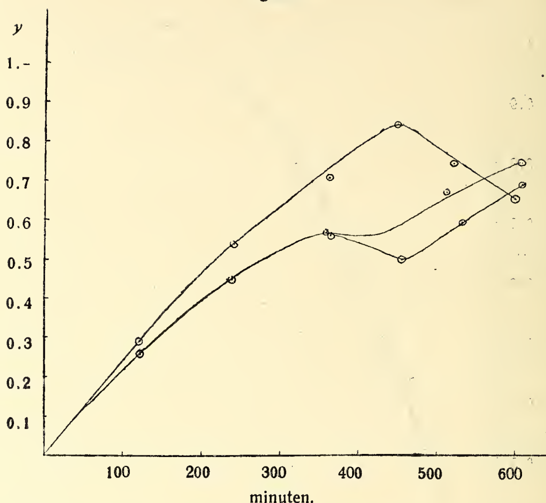
TABEL 20.

0.25 gr. Soja + 50 c.c. water + 3.64 op Na_2HPO_4 2 aq. + 1.16 gr. KH_2PO_4
10 c.c. filtraat gemengd met 11.52 gr. Na_2HPO_4 2 aq. + 120 c.c. water.

$p_H = 8.13$ 0.01 % ureum

t (minuten)	y	$m = \frac{0.0073 \log \frac{1}{1-y} + 0.01y}{t}$
80	0.17	0.000029
140	0.305	0.000030
200	0.39	0.000027
260	0.52	0.000028
321	0.625	0.000030

Figuur 12.



In dit geval had weinig of geen vernietiging van enzym plaats gegrepen gedurende dit interval; want 10 c.c. van het extract, gedurende 320 minuten in het bad van 27° gelaten en dan gemengd met 2 c.c. ureum (0.06 %) gaven in 80 min. 0.3 c.c. NH_3 $\frac{1}{50}$ N, wat beteekent $m = 0.000026$.

10 April 1917. Dezelfde opzet als 6 April, maar nu met langeren reactietijd. Een gedeelte van hetzelfde mengsel werd in het bad van 27° gelaten tot den volgenden dag, toen 10 c.c. met 2 c.c. ureum-oplossing (0.06 %) in 260 minuten slechts $y = 0.1$ gaven (tegen y ongeveer 0.45 oorspronkelijk). Dus duidelijk had een aanmerkelijk verval van het enzym plaats gegrepen.

16 April en 23 April 1917. Herhalingen van het experiment van 10 April. De resultaten van deze drie experimenten zijn weergegeven in figuur 12. Zooals duidelijk blijkt, is er in de krommen van 10 en 23 April eerst een afname, waarna de reactie weer normaal gaat loopen. Als boven aangestipt is de verklaring hiervan deze, dat gedurende eenigen tijd de vervallende enzym moleculen, die de synthese veroorzaken, de bovenhand kunnen hebben en dat na hun totaal verval (of misschien herstel) de normale enzym werking weer optreedt.

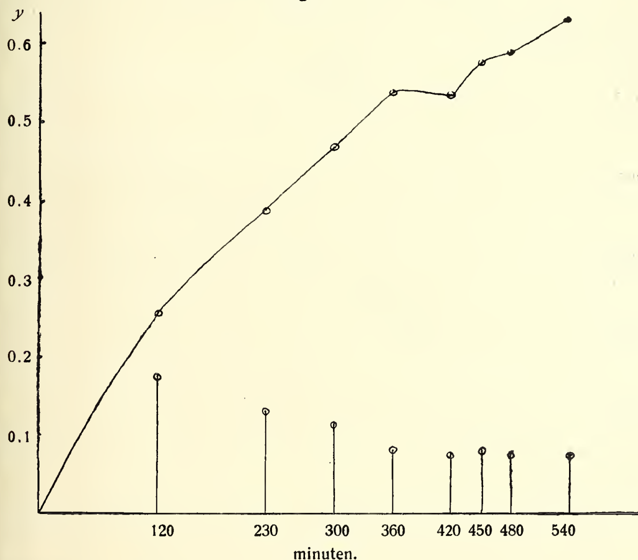
Om deze opvatting meer direct te toetsen werd het volgende experiment uitgevoerd.

In één rij reageerbuizen werd het verloop der hydrolyse van een 0.01 °/₀ ureum oplossing in 8°/₀ phosphaat van $p_H = 8.13$ onderzocht als te voren.

Een tweede rij buizen, elk ook met 10 cc. van dezelfde soja-extract-phosphaat-oplossing was met al die andere buizen terzelfder tijd in hetzelfde bad van 27° geplaatst. Onmiddellijk na het uitnemen van een buis der eerste rij voor de analyse, werden 2 c.c. ureum oplossing van 0.06°/₀ in een buis van de tweede rij gebracht en der reactie hierin 120 minuten haar loop gelaten. Op deze wijze was het mogelijk eenige inlichting te krijgen over de snelheid van verval van het enzym.

In figuur 13 ziet men, dat het nagenoeg horizontale deel van de kromme samenvalt met de T's van afnemende activiteit volgens

Figuur 13.



tabel 21. Tusschen $T = 120$ en $T = 230$ schijnt er in het begin een andere periode van eenig verval geweest te zijn, gevolgd door een normaal verloop van $T = 230$ tot $T = 360$.

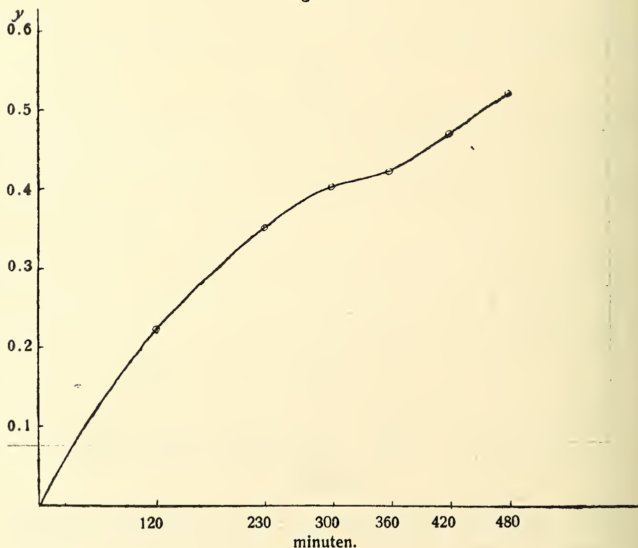
Dit eigenaardige type van kromme, eerst een vertraging en dan weer een normale loop, werd meermalen opgemerkt bij herhaling

TABEL 21.

T (minuten)	y	y (in 120 minuten na het tijdstip T)
120	0.255	0.175
230	0.385	0.130
300	0.465	0.115
360	0.535	0.08
420	0.53	0.075
450	0.575	0.08
480	0.585	0.075
540	0.625	0.075

van hetzelfde experiment bij $p_H = 8.13$. Bijvoorbeeld den 19den Juli 1917, figuur 14.

Figuur 14.



10. *Invloed van de concentratie van het enzym.*

Bij voortzetting van de onderzoekingen, vermeld in Deel 4 dezer

studie, met kleinere enzym-concentraties werd al dadelijk opgemerkt, dat in dezelfde condities dezelfde hoeveelheid Soja-meel niet altijd hetzelfde resultaat gaf. Bij de bereiding van de noodige oplossingen was het gedistilleerde water bevrijd van koolzuur door koken in een vertinde koperen kruik. Nadat deze zuiveringsmethode vervangen was door overdistilleeren van het water in een Jena-kolf met glazen koeler, waarbij het eerste deel van het distillaat weggeworpen werd, bleek grootere regelmatigheid bereikt te zijn. Toch scheen, afgewogen in zoo kleine hoeveelheden, het Soja-meel niet geheel homogeen te zijn. Een verklaring hiervan zal verderop gegeven worden.

Niettemin konden op dezen weg belangrijke nieuwe resultaten verkregen worden.

De concentratie van de ureum in deze experimenten was weer ter wille van de noodzakelijke onveranderlijkheid van de p_H slechts 0,01 $^0/_0$.

De concentratie der urease, uitgedrukt in onze vroegere maateenheid, was $\frac{3}{26}$.

Om zooveel mogelijk zeker te zijn van vergelijkbare enzymconcentraties in de oplossingen werd ook twee keer een serie van 4 experimenten bij verschillende p_H op denzelfden dag uitgevoerd met één zelfde Soja-meel-extract.

De geringe enzymconcentratie bracht natuurlijk de noodzakelijkheid mee van lange reactie-tijden (tot 3200 minuten).

Om te onderzoeken of gedurende de zoo lange blootstellingen aan de H-ionen concentraties dezer proeven bij 27° eenige verzwakking van de activiteit van het enzym had plaats gegrepen, werden de overblijvende deelen van de vier phosphaat-enzym-oplossingen 24 uur in het bad van 27° bewaard. Op den volgenden dag werden hiermee de noodige proeven herhaald.

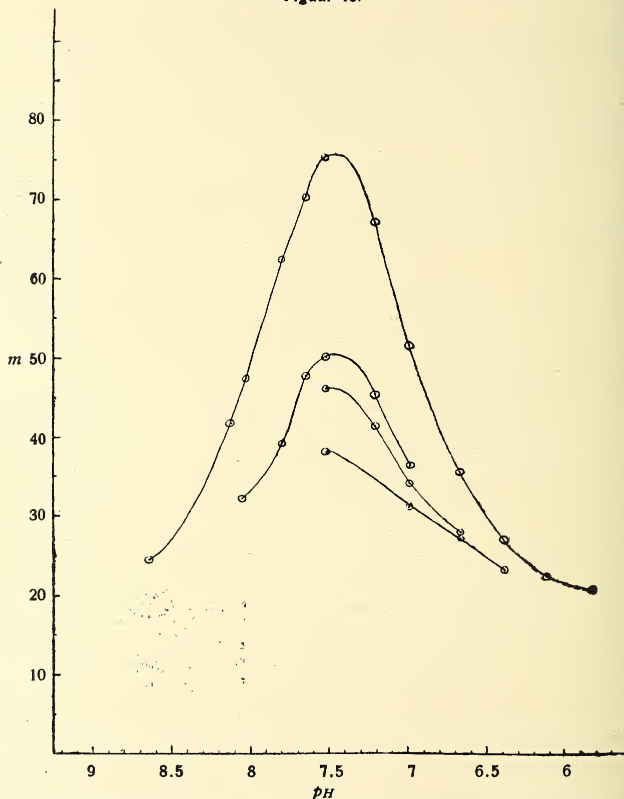
Het bleek zoo, dat de gezamenlijke invloed van H-ionen-concentratie, temperatuur en tijd hier, binnen de grenzen van de experimenteele fouten, geen merkbaar effect had gehad op urease in de zure oplossingen. Indien echter de H-ionen-concentratie bij 27° aan de andere zijde van het neutrale punt gehouden was, was de activiteit langzaam maar onmiskenbaar afgenomen. In de alkalische oplossingen moesten dus ter berekening van m, evenals vroeger, weer alleen de metingen van de eerste intervallen gebruikt worden.

De zuurgraad, in deze experimenten aangewend, had zelf geen hydrolytische werking op ureum, zooals werd vastgesteld door monsters van 10 c.c. van de vloeistoffen met $p_H = 6{,}67$ en $p_H = 7{,}52$ te koken, gedurende 24 uur in het bad van 27° te plaatsen, dan aan elk toe te voegen 2 c.c. van 0,06 $^0/_0$ ureum en daarna deze

mengsels weer 24 uur bij 27° te laten staan. Er bleek geen ammoniak gevormd te zijn.

De resultaten, verkregen voor de specifieke activiteit m van lage urease-concentraties zijn bijeengebracht in figuur 15, waarin ter vergelijking ook de kromme van figuur 3 is weergegeven.

Figuur 15.



De interpretatie van deze resultaten, gebaseerd op de theorie, ontwikkeld in deel 9, is de volgende:

Overwegende dat een enzym-molecuul het middelpunt is van twee concentrische bollen, een binnenste, waarin het substraat wordt afgebroken en een buitenste spherische schaal, waarin de omge-

keerde werking teweeggebracht wordt, is het duidelijk, dat, indien de concentratie van het enzym groot genoeg is om de binnenste bollen elkaar te doen snijden, er geen plaats in de oplossing is, waar de voorwaarde voor synthese, dat is verzwakte straling, verwezenlijkt is; ten minste, zoo lang het enzym zijn oorspronkelijke activiteit behouden heeft.

Een voldoende verdunning van de urease zal echter tusschen de enzym moleculen een afstand scheppen, groot genoeg om de buitenste schaal vrij te maken voor de omgekeerde werking. Het totale vermogen van urease om ureum in ammonium-carbonaat om te zetten, voorstellende het verschil tusschen de hydrolyse en de synthese, die het veroorzaakt, moet daarom verwacht worden verminderd te zijn door de urease concentratie te doen afnemen beneden een zekere waarde.

De waargenomen feiten zijn duidelijk in overeenstemming met deze theorie. Boven een zekere hoogte van urease concentratie constante specifieke activiteit, daar beneden een afname.

De bizonderheid, vermeld in den aanvang van dit gedeelte, dat kleine concentraties van urease minder constant van vermogen bleken te zijn dan grootere, wordt nu niet alleen verklaarbaar, maar geeft zelfs nieuwe bevestiging van de theorie.

Want het is duidelijk, dat in regionen, waar de specifieke activiteit aan het afnemen is, een geringe verandering in de concentratie van de urease veel grooter effect zal hebben dan bij hoogere concentraties, waar de specifieke activiteit constant is.

(*Wordt vervolgd*).

Scheikunde. — De Heer van Romburgh biedt eene mededeeling aan van Dr. A. W. K. de Jong, Correspondent te Buitenzorg, over „*De truxillzuren*".

Scheiding der truxillzuren van kaneelzuur. Daar bij het belichten van de zouten van kaneelzuur mengsels van dit zuur en de truxillzuren verkregen worden, was het noodig een goede scheidingsmethode te bezitten.

Volgens den natten weg is deze scheiding tot nu toe niet quantitatief gelukt, ofschoon verschillende pogingen hiertoe werden aangewend. De oorzaak hiervan ligt voor een deel in de vergrooting van de oplosbaarheid van de truxillzuren door de aanwezigheid van andere truxillzuren en vooral door kaneelzuur en voor een ander deel in de geringe hoeveelheid van de truxillzuren t.o.v. het kaneelzuur. Zoo kan men met benzine, zeker een van de beste scheidingsvloeistoffen, geen quantitatieve scheiding krijgen, omdat β-cocazuur en δ-truxillzuur zeer merkbaar oplossen en des te meer naarmate er meer kaneelzuur aanwezig is en ook de anderen dit, ofschoon in mindere mate, doen.

Ook werd getracht de scheiding door het in alcohol moeilijk oplosbare zure kaliumzout van kaneelzuur te bereiken, hetgeen niet mogelijk bleek, daar sommige truxillzuren ook gedeeltelijk neergeslagen werden.

Er blijft dus voor het oogenblik alleen de scheiding door middel van sublimatie over. Met het toestel van Rimber gaat dit echter zeer langzaam, waarom het sublimeeren bij gewonen druk in een luchtstroom bij 130° werd uitgevoerd. Hiertoe werd de stof in een schuitje gebracht en dit in een glazen buis geplaatst, die zich in een zandbad van 130° bevond. Het sublimeeren had zoo lang plaats tot de rest een constant gewicht vertoonde.

Scheiding der truxillzuren onderling. Zij worden opgelost in de berekende hoeveelheid KOH $^1/_{10}$ normaal bij verhitten en bij deze oplossing wordt watervrij calciumchloride gevoegd n.l. 1.5 gr. voor elke 10 cM^3 oplossing. Na 24 uur wordt het neerslag, dat de calciumzouten van β-, δ- en ε-truxillzuur kan bevatten, gefiltreerd en met een calciumchloride oplossing (1.5 gr. per 10 cM^3) uitgewasschen.

Uit het filtraat worden de zuren door middel van HCl en aether afgezonderd en gewogen. Zij worden nog eens in de berekende

hoeveelheid KOH $^1/_{10}$ n. opgelost en hieraan weer calciumchloride, n.l. 1.5 gr. voor elke 10 cM³, toegevoegd Na 24 uur wordt het neerslag gefiltreerd en gewasschen met weinig calciumchloride oplossing (1.5 gr. per 10 cM³). Het neerslag wordt bij het reeds verkregene gevoegd.

Scheiding van β-, δ- en ε-truxillzuur. De calciumzouten worden met HCl en aether behandeld en de zuren in de berekende hoeveelheid KOH $^1/_{10}$ n. opgelost. Hieraan voegt men het dubbele volume water toe en evenveel $BaCl_2$ $^1/_{10}$ n. als KOH $^1/_{10}$ n. gebruikt werd. Na 24 uur wordt het neerslag gefiltreerd en uitgewasschen met water; het bestaat uit bariumzouten van β- en ε-truxillzuur.

Uit het filtraat worden met HCl en aether de zuren afgezonderd: zij worden nog eens in KOH $^1/_{10}$ n. opgelost, hieraan het dubbele volume water toegevoegd en evenveel $BaCl_2$ $^1/_{10}$ n. als KOH $^1/_{10}$ n. gebruikt werd. Men krijgt zoodoende nog een weinig β- en ε-truxillzuur als bariumzouten.

Het nu verkregen filtraat geeft met HCl en aether δ- truxillzuur, dat zoo noodig door omkristalliseeren uit kokend water gezuiverd kan worden.

De neergeslagen bariumzouten worden met water gekookt, afgekoeld en koud gefiltreerd. Aan het filtraat wordt zoutzuur gevoegd; ontstaat er een neerslag dan worden deze bewerkingen herhaald tot dit niet meer het geval is. De filtraten leveren met HCl en aether ε-truxillzuur, dat zoo noodig uit kokend water wordt omgekristalliseerd.

Het in water niet opgeloste bariumzout geeft met HCl en aether β-truxillzuur.

Scheiding van α-, γ-truxillzuur en β-cocazuur. Aan het filtraat van de neergeslagen calciumzouten voegt men nog 8.5 gr. watervrij calciumchloride per 10 cM³ toe, filtreert het neerslag na 24 uur af en wascht het uit met een calciumchlorideoplossing, verkregen door in water evenveel $CaCl_2$ in grammen op te lossen als er cM³'s water zijn. Uit het filtraat worden de zuren afgezonderd en deze ondergaan nog eens overeenkomstige bewerkingen om een geringe hoeveelheid β-cocazuur als calciumzout af te zonderen.

Het neergeslagen calciumzout geeft met HCl en aether β-cocazuur, dat zoo noodig uit kokend water wordt omgekristalliseerd.

Het filtraat van het neergeslagen calciumzout geeft met HCl en aether α- en γ-truxillzuur. Om hen te scheiden wordt het zuurmengsel met water (25 cM³ per 0.1 gr.) aan een opgaanden koeler gedurende $^1/_2$ uur gekookt en daarna kokend gefiltreerd.

De rest bestaat uit α-truxillzuur. Het filtraat levert bij afkoelen γ- truxillzuur, dat zoo noodig nog eens uit kokend water wordt omgekristalliseerd.

Om de bruikbaarheid van de scheidingsmethode na te gaan werd een mengsel van de 6 truxillzuren op de aangegeven wijze behandeld met het volgend resultaat.

	Gebruikte hoeveelheid in gr.	Gevonden hoeveelheid in gr.	Smeltpunt.	Smeltpunt na omkrist. uit water.
α-truxillzuur	0.119	0.086	even 270°	—
β "	0.100	0.096	202° — 204°	—
γ "	0.134	0.099	200° — 215°	220° — 226°
δ "	0.106	0.132	gomachtig	172° — 174°
ε "	0.078	0.079	208° — 220°	230°
β-cocazuur	0.106	0.120	165° — 175°	189° — 190°
Totaal . .	0.643	0.612		

Voor de som van α- en γ- truxillzuur werd 0.224 gr. gevonden. De methode is dus in staat de verschillende truxillzuren naast elkander aan te toonen. Zijn er maar 2 truxillzuren in het mengsel dan gelukt het tot op zekere hoogte een vrijwel quantitatieve scheiding te bereiken.

Uit de gegeven scheidingsmethode volgen reeds enkele eigenschappen van de truxillzuren. Hieraan mogen nog de volgende toegevoegd worden.

β-cocazuur [1]) vormt met kaneelzuur een goed gekristalliseerd *dubbelzuur* bestaande uit gelijke hoeveelheden van de componenten. Men verkrijgt het bijvoorbeeld door een bij gewone temperatuur met kaneelzuur verzadigde benzineoplossing met een weinig β-cocazuur te koken tot dit opgelost is (op 500 cM. 0.1 gr. β-cocazuur). Na afkoelen zondert het zich dikwijls eerst na eenige dagen in lange naalden af die bij 139° smelten. Het filtraat levert opnieuw dubbelzuur wanneer er 0.1 gr. van elk der zuren kokend in opgelost wordt. Door sublimatie bij 130—140° werd de samenstelling bepaald.

De oplosbaarheid van γ-truxillzuur in chloroform wordt zeer merkbaar vergroot door de aanwezigheid van β-cocazuur.

De ammoniumzouten van de truxillzuren verliezen bij uitdampen van hun waterige oplossingen op een waterbad langzamerhand hun ammonia en gaan over in de vrije zuren. Het ammóniumzout van kaneelzuur vertoont deze eigenschap ook.

[1]) Het vroeger uit de splitsingszuren der cocaalkaloiden afgescheiden zuur van 190° smeltpunt is gebleken β-cocazuur te zijn.

Plantkunde. — De Heer WENT biedt een mededeeling aan van den Heer H. L. VAN DE SANDE BAKHUYZEN: „*Fotogroeireactie en lichtstemming bij Avena sativa*".

(Mede aangeboden door den Heer J. W. MOLL.)

In de laatste jaren is onze kennis over den invloed van het licht op den lengtegroei der planten aanmerkelijk uitgebreid en verdiept. Waar men zich vroeger er meestal mee tevreden stelde, zijn eerste waarneming pas eenige uren na het begin der belichting te doen, zijn in de laatste jaren onderzoekingen gedaan, waarbij getracht werd, van het begin der inwerking af, de veranderingen, die de groei ondergaat, zoo nauwkeurig mogelijk te bestudeeren.

In 1914 publiceerde BLAAUW zijn onderzoekingen over de „Photogroeireactie" bij Phycomyces[1]), terwijl VOGT in 1915 een dergelijke reactie bij de coleoptielen van Avena[2]) vond. Daarna verschenen er van BLAAUW nog twee stukken over deze reacties bij kiemplantjes van Helianthus[3]) en bij eenige wortels[4]).

Deze onderzoekingen werden alle uitgevoerd onder den invloed van de nieuwe gezichtspunten die BLAAUW en FRÖSCHEL in 1909 geopend hadden op het gebied der fototropie; er werd dus niet uitsluitend gelet op de intensiteit, doch er werd een bepaalde lichtenergie toegediend, in sommige gevallen werd er doorbelicht. Terwijl VOGT niet ingaat op de theoretische waarde van zijn resultaten, legt BLAAUW zijn fotogroeireactie ten grondslag aan de verschijnselen, die we bij de fototropie waarnemen. Nu was het vroeger wel bekend, dat de fototropische krommingen tot stand kwamen, doordat de groei op de een of andere wijze veranderd werd door het eenzijdig invallende licht, doch daar men niet wist, dat een kortdurende alzijdige belichting invloed had op den lengtegroei, kon men zich geen voorstelling maken van de veranderingen, die de groei direct na de eenzijdige belichting onderging. Dit was een van de redenen, waarom men de fototropie als iets op zich zelf staands beschouwde.

---

[1]) A. H. BLAAUW. Licht und Wachstum. I. Zeitsch. f. Botanik. 1914.

[2]) E. VOGT. Uber den Einflusz des Lichts auf das Wachstum der Koleoptile von Avena sativa. Zeitschrift f. Botanik. 1915.

[3]) A. H. BLAAUW. Licht und Wachstum. II. Zeitschr. f. Botanik. 1915.

[4]) A. H. BLAAUW. Licht und Wachstum. III. Mededeelingen van de Landbouwhoogeschool. Deel XV. 1918.

Blaauw nu verdedigt de oude theorie van De Candolle weer en vat de eenzijdige belichting op als een bijzonder geval van alzijdige belichting; de eenzijdige zou dus geen specifieke werking hebben. Geeft een alzijdige belichting een alzijdig gelijke fotogroeireactie, een eenzijdige belichting zal hiervan alleen daarin verschillen, dat ze een ongelijke fotogroeireactie geeft aan voor- en achterkant. Hierbij oefent niet het lichtverschil, maar het licht zelf, als energie, een invloed uit op den lengtegroei van elke cel; doch daar de voorkant anders belicht wordt dan de achterkant, zullen beide ongelijke groeiveranderingen vertoonen. Het gevolg van deze ongelijke groeiveranderingen aan voor- en achterkant zal zijn, dat er een kromming op kan treden naar de lichtbron toe of daarvan af. Dit is de fototropische kromming.

Door deze beschouwingen is de fototropie uit haar isolement verlost en toegankelijk geworden voor dieper en nauwkeuriger analyse. Een belangrijk punt is ook, dat Blaauw den achterkant een rol laat spelen, die geheel overeenkomt met die van den voorkant. Niet de achterkant of voorkant alleen veroorzaken de kromming actief, doch beide doen mee: het verschil in groeiverandering aan voor- en achterkant is het, dat de plant fototropisch doet krommen.

Waar de mogelijkheid aan de hand werd gedaan, dat de eenzijdige belichting een bijzonder geval van de alzijdige zou zijn, d. w. z. elke lengtestrook van de plant onafhankelijk van de rest van den omtrek een fotogroei-inductie ontving en een fotogroeireactie uitvoerde, lag het voor de hand na te gaan of dit eenig licht kon werpen op verschillende fototropische verschijnselen, die in de literatuur bekend waren. Het bleek mij nu, dat de fotogroeireactie ons het middel geeft, vele schijnbaar tegenstrijdige verschijnselen bevredigend te verklaren. Daar de fototropie van Avena sativa het uitvoerigst onderzocht is en bovendien Vogt hierbij een fotogroeireactie heeft gevonden, heb ik over dit object een literatuurstudie gemaakt. Terwijl ik bezig was deze beschouwingen om te werken voor een voorloopige mededeeling, verscheen een publicatie van Bremekamp [1]), die mij geen aanleiding gaf mijn meening te wijzigen; ik hoop hierop in een later stuk uitvoeriger terug te komen.

Vogt heeft coleoptielen van Avena van boven belicht met bepaalde intensiteiten gedurende verschillenden tijd. Hierdoor zijn echter zijn energiegetallen niet te vergelijken met licht, dat horizontaal invalt. De planten zullen op de eerste manier veel minder licht ontvangen,

---

[1]) C. E. B. Bremekamp. Eine Theorie des Phototropismus. Recueil des Travaux bot. néerlandais. V. Vol. XV. 1918.

daar het absorbeerende oppervlak veel geringer is. We zullen, indien het licht horizontaal invalt, veel minder lichtenergie behoeven toe te voeren, om dezelfde reactie te verkrijgen, dan wanneer het licht verticaal van boven invalt. De intensiteits- en ook de energie-getallen moeten dus door een bepaalden coëfficient gedeeld worden.

Vogt vond nu, dat reeds na eenige minuten de groeisnelheid begon te dalen. Dit voerde na ongeveer 25 min. tot een minimum, terwijl na 30—40 min. het 0-punt weer gepasseerd werd. Hierna trad er een groeiversnelling op, de groei steeg tot een maximum, zoodat ongeveer 60 min. na het begin der belichting de eerste groeisnelheid weer bereikt werd. Daarna schommelde de groei nog langen tijd met eerst nog sterke, doch langzamerhand geringer wordende minima en maxima.

Ik heb nu uit de tabellen van Vogt [1]) uitgerekend, hoeveel μ's de planten gedurende de eerste vertragingsperiode minder gegroeid zijn, dan wanneer ze in het donker waren blijven doorgroeien. De volgende cijfers geven dus weer, hoeveel μ's de groei in het geheel vertraagd is, totdat het 0-punt weer bereikt wordt en de groeiversnelling begint, waarbij steeds in het oog gehouden moet worden, dat de intensiteitsgetallen door een coëfficient gedeeld moeten worden, wil men ze vergelijken met horizontaal invallend licht.

TABEL I.

Intensiteit.	Belichtingsduur.			
	1 min.	3 min.	15 min.	doorbelicht.
16 M.K.		39		83
64 M.K.	53			
100 M.K.	102	104	90?	
500 M.K.			122	123
1000 M.K.		294	76	147
1500 M.K.			89	

Daar nu bij eenzijdige belichting de voorkant steeds sterker belicht wordt dan de achterkant, zal, indien de groeivertraging met toenemende intensiteit grooter wordt, de voorkant sterker vertraagd worden dan de achterkant. Het gevolg hiervan zal zijn, dat een positief fototropische reactie optreedt, als het groeivertragings-

[1]) Vogt l.c. Tabel 8, 9 en 11.

verschil maar aanmerkelijk genoeg is om een zichtbare kromming te geven. Indien evenwel de groeivertraging met toenemende intensiteit weer afneemt, zal er een negatieve reactie optreden, daar in dit geval de achterkant sterker vertraagd wordt dan de voorkant. Men ziet uit de tabel, dat de eerste en tweede verticale kolom positieve krommingen zullen geven. Uit de derde kolom is moeilijk op te maken of de getallen stijgen of dalen, ze zijn daarvoor niet zeker genoeg. Wanneer we de eerste en tweede kolom echter rangschikken volgens de hoeveelheden energie, stijgen de getallen; we zouden in de derde kolom dus veel hoogere getallen verwachten. Waarschijnlijk bevinden we ons hier voorbij het maximum der groeivertraging. Daarentegen stijgen de getallen bij doorbelichting weer met de intensiteiten; dit komt volkomen overeen met het feit, dat belichtingen, langer dan 25 min., steeds positieve krommingen geven. Daar nu bekend is, dat de fototropische kromming reeds binnen 25 min. met een microscoop zichtbaaar wordt[1]), moet dus reeds na 25 min. een zoo groot groeiverschil tusschen voorkant en achterkant opgetreden zijn, dat een microscopisch zichtbare kromming kan resulteeren. Indien dus de fotogroeireactie te beschouwen is als basis der fototropische kromming, moeten de getallen, die de groeivertraging tot ongeveer 30 min. na het begin der belichting weergeven, hierover uitsluitsel geven[2]). Het optreden van krommingen aan den uitersten top binnen 25—30 min. kan dus voldoende verklaard worden door de groeivertraging alleen. Er zijn echter nog meer punten, die er op wijzen, dat de groeiversnelling, die op de groeivertraging volgt, niets te maken heeft met het tot stand komen der kromming.

Als de groeiversnelling is afgeloopen, vertoont de groeikromme nog sterke stijgingen en dalingen. Deze zijn echter zeker niet te beschouwen als schommelingen om een evenwichtstoestand op dezelfde plaats, te vergelijken met het uitschommelen van een slinger, doch moeten stellig beschouwd worden als de reacties van lager gelegen zones. Evenals bij een fototropische kromming de eerste reactie aan den uitersten top zichtbaar wordt, moet ook de eerste groeivertragingsperiode de reactie van den uitersten top voorstellen; later pas zal de fotogroeireactie bij de lager gelegen zones optreden. Dit

---

[1]) E. Pringsheim. Studiën zur heliotropischen Stimmung und Präsentationszeit. Zweite Mitteilung. Cohn's Beiträge zur Biologie der Pflanzen. Bd. IX. 1909.

W. H. Arisz. Onderzoekingen over Fototropie, Diss. Utrecht. 1914; Rec. trav. bot. Néerlandais. Vol. XII. 1915.

[2]) Ik zie hier af van de negatieve krommingen, die soms na eenigen tijd op de positieve volgen; deze kunnen, zooals ik in mijn uitvoerige mededeeling uiteen zal zetten, op een geheel andere wijze verklaard worden.

is dus geheel te vergelijken met het voortschrijden der fototropische kromming van den top naar lager gelegen zones. De grootte van de latere groeivertragingen is evenwel uit de tabellen niet te berekenen, daar de gemiddelde groeisnelheid niet constant blijft, hetgeen ten deele op rekening komt van de groote periode, die buitendien zelf ook door het licht beïnvloed wordt [1]). We hebben hier dus te doen met een prikkelgeleiding van de fotogroeireactie; de grootte van de groeivertraging in de lager gelegen zones zal eveneens afhankelijk moeten zijn van de toegevoerde energie.

De kromme nu, die weergeeft de afhankelijkheid van de groeivertraging (ordinaat) ten opzichte van de energie, binnen 5 min. toegevoerd, (abscis) noemen we *groeivertragingskromme*. Uit de getallen van Tabel I kunnen we deze kromme niet goed construeeren, daar hiervoor te weinig gegevens zijn en bovendien de tijd, waarin de energie is toegevoerd, nogal sterk wisselt. Er is echter alle reden om aan te nemen, dat er een stijgend deel is, dat positieve krommingen en dat er daarna een dalend deel is, dat negatieve krommingen kan teweegbrengen. Er is dus ergens een maximum; de ligging hiervan zullen we later op andere wijze bepalen. Daar nu de productregel binnen zekere grenzen ook voor de fotogroeireactie zal gelden, behoort bij elke energie (x) een bepaalde groeivertraging (y).

Nu ontvangt bij eenzijdige belichting de voorkant de volle energie [2]); de achterkant, die met een veel geringer intensiteit belicht wordt, krijgt dus minder energie. Bevinden we ons nu op het stijgende deel der kromme, is dus de groeivertraging aan den voorkant (y_v) grooter dan aan den achterkant (y_a), dan zal er alleen een positieve kromming op kunnen treden. Nu is 20 M. K. S. de practische drempelwaarde voor een gemakkelijk zichtbare kromming; wanneer men deze energie dus toedient, zal er een verschil in groeivertraging aan voor- en achterkant optreden, dat juist groot genoeg is, om een macroscopisch gemakkelijk zichtbare kromming te veroorzaken. De drempelwaarde 20 M. K. S. geldt echter alleen voor planten, die in het donker gegroeid zijn, dus een lichtenergie 0 ontvangen hebben.

Dit wordt anders, indien de planten alzijdig voorbelicht zijn. Men kan dit nu doen, door de planten te laten draaien voor de lichtbron, zoodat successievelijk alle kanten belicht worden (1 omdraaiing in eenige secunden); hierdoor ontvangen dus alle punten van den omtrek evenveel licht. Indien men hierna eenzijdig belicht, ziet men, dat de

---

[1]) H. Sierp. Ein Beitrag zur Kenntnis des Einflusses des Lichts auf das Wachstum der Koleoptile von Avena sativa. Zeitschr. f. Botanik. 1918.

[2]) De reflexie enz. laat ik hier buiten bespreking.

drempelwaarde voor een positieve kromming veel hooger wordt. Ik zal hier nu proeven bespreken, die ARISZ[1]) over de zoogenaamde „lichtstemming bij de haver" uitgevoerd heeft en behandel in de eerste plaats de alzijdige voorbelichtingen met minder dan 2000 M.K.S., toegediend binnen 3 minuten met een intensiteit beneden 25 M.K. De eenzijdige nabelichting heeft steeds oogenblikkelijk na het einde der alzijdige voorbelichting plaats gehad.

Het bleek mij, dat alle veranderingen, door de alzijdige voorbelichting teweeggebracht, voldoende kunnen verklaard worden door aan te nemen, dat op ieder punt van den omtrek de energie van de eenzijdige nabelichting eenvoudig gesommeerd wordt bij die van de alzijdige voorbelichting. De groeivertraging op een bepaald punt van den omtrek zal dus afhangen van de som der energie, die het bij de voor- en nabelichting samen ontvangen heeft. Indien het energieverschil van voor- en achterkant dan aanmerkelijk genoeg is, om zulk een groeivertragingsverschil te geven, dat een zichtbare kromming resulteert, zal de drempelwaarde bereikt zijn. Ik heb hier nergens een verandering van gevoeligheid aangenomen, in tegenstelling met BREMEKAMP[2]), die het stijgen der drempelwaarde wil verklaren door de hypothese, dat de plant door de alzijdige voorbelichting ongevoeliger zou geworden zijn en daarbij denkt aan een verandering van perceptiebasis.

Indien we eenzijdig b M.K.S. toedienen, zal de voorkant b, de achterkant hiervan $\frac{b}{m}$ M.K.S. ontvangen; m is grooter dan 1, daar de achterkant minder krijgt dan de voorkant. Zoo we echter met a M.K.S. alzijdig voorbelicht hadden, zou de latere voorkant hiervan $\frac{a}{n}$ M.K.S., de latere achterkant eveneens $\frac{a}{n}$ M.K.S. gekregen hebben; belichten we nu eenzijdig na, dan ontvangt de voorkant er b M.K.S. bij, ontvangt dus in het geheel $\frac{a}{n} + b$ M.K.S., de achterkant in het geheel $\frac{a}{n} + \frac{b}{m}$ M.K.S. In beide gevallen blijft het absolute energieverschil aan voor- en achterkant even groot n.l. $b - \frac{b}{m} = b\,\frac{m-1}{m}$ M.K.S. Nu is de kromming, die er zal optreden, geheel afhankelijk van het groeivertragingsverschil, dat met

[1]) ARISZ l.c. Tabel 24 en 25; zie ook ARISZ. Lichtstemming bij de haver. Versl. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam. 1913.

[2]) BREMEKAMP l.c.

een energieverschil $b \frac{m-1}{m}$ M. K. S. overeenkomt. Indien de groeivertragingskromme een rechte lijn was, zou met een energieverschil $b \frac{m-1}{m}$ M.K.S. steeds eenzelfde groeivertragingsverschil overeenkomen, waar we ons ook op de abscis bevonden; de drempelwaarde zou dan steeds gelijk moeten blijven. Indien echter de groeivertragingskromme een kromme lijn is met afnemende helling, zal het groeivertragingsverschil, overeenkomende met een abscissenverschil van $b \frac{m-1}{m}$ M.K.S., des te kleiner worden, naarmate de helling van de kromme geringer wordt, d. w. z. hoe grooter de x wordt.

We noemen de energie aan voor- en achterkant x_v en x_a, de groeivertragingen y_v en y_a.

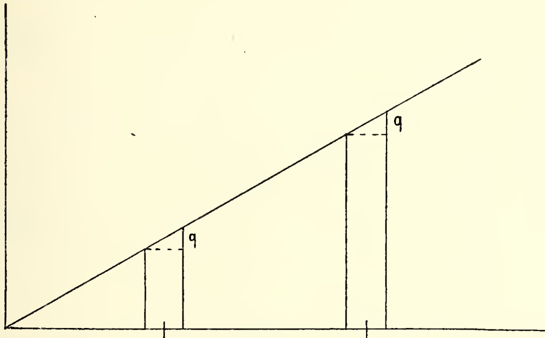


Fig. 1.

Bij een rechte lijn blijft, indien $x_v - x_a$ constant $= b \frac{m-1}{m}$ M.K.S. is, het groeivertragingsverschil $y_v - y_a$ steeds gelijk $= q$ (Fig. 1).

Bij een kromme lijn met afnemende helling, wordt, indien $x_v - x_a$ constant $= b \frac{m-1}{m}$ M.K.S. is, het groeivertragingsverschil $y_v - y_a$ kleiner, naarmate x_v grooter is. (Fig. 2).

Nu zal x_v grooter worden, als de voorbelichtingsenergie a grooter wordt, immers $x_v = \frac{a}{n} + b$ M.K.S. Het absolute energieverschil $b \frac{m-1}{m}$ M.K.S. of wel de eenzijdig toegevoerde energie b M.K.S. zal dus een

des te kleiner groeivertragingsverschil en ook des te kleiner kromming geven, naarmate de voorbelichtingsenergie a grooter is. Om in dat geval toch een constant groeivertragingsverschil te krijgen, dat een juist zichtbare kromming geeft, zal $b\frac{m-1}{m}$ en dus ook b grooter moeten worden..

Indien de voorbelichtingsenergie grooter wordt, zal de drempelwaarde stijgen, zoodra de groeivertragingskromme een kromme lijn is met afnemende helling. Hierbij behoeft nog niets gezegd te worden over het verdere verband tusschen de grootte der helling en x.

In ons geval kunnen we echter nog nauwkeuriger het verloop van de groeivertragingskromme nagaan door n.l. te zien, of we de functie van de drempelwaarde ten opzichte van de voorbelichting

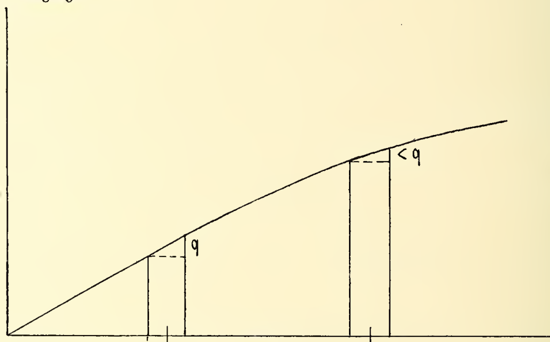


Fig. 2.

kunnen opsporen. Indien we uit de genoemde tabellen van Arisz de verhouding van de eenzijdige nabelichting ten opzichte van de alzijdige voorbelichting uitrekenen, vinden we, dat, als nabelichting: voorbelichting = 1 : 11, er geen kromming optreedt;

is de verhouding = 1 : 10,9.9, of 9.2, dan krommen zich eenige planten zwak positief,

is de verhouding = 1 : 7.2, dan krommen alle planten zich positief.

Dit gaat, zooals boven reeds gezegd is, alleen op voor een voorbelichting van minder dan 2000 M.K.S., toegediend binnen 3 min. met een intensiteit beneden 25 M.K. We moeten dit echter omrekenen op de hoeveelheden, die de voor- en achterkant krijgen. Waar we

zien, dat er een zwakke positieve kromming optreedt, wanneer de verhouding van nabelichting : voorbelichting ($b : a$) een bepaalde grootte, n.l. 1 : 9.7, bereikt heeft, moet dus ook de verhouding van het energieverschil $b\frac{m-1}{m}$ ten opzichte van de energie van den voorkant $\frac{a}{n} + b$ constant zijn, welke waarden m en n ook hebben. Om dit nu aan getallen te kunnen demonstreeren, ga ik veronderstellingen maken betreffende m en n; principieel doet het er niet toe, welke waarden wij m en n toekennen. Voor m heb ik 4 aangenomen; de achterkant wordt dus met $\frac{1}{4}$ van de intensiteit, die de voorkant krijgt, belicht, ontvangt dus bij de eenzijdige nabelichting $\frac{b}{4}$ M.K.S. Daar de alzijdig toegevoerde energie a M.K.S. over den geheelen omtrek gelijkmatig verdeeld is, zal iedere helft van den omtrek, resp. latere voorkant of achterkant, ten eerste de helft der energie ontvangen: $\frac{1}{2}$ a M.K.S. Bovendien krijgt elk punt, dat van de lichtbron afgekeerd is, gedurende de rotatie nog $\frac{1}{4}$ van de energie van de belichte zijde erbij; iedere helft krijgt dus tenslotte $\frac{5}{4} \times \frac{1}{2} a = \frac{5}{8} a$ M.K.S.

Hier volgt een tabel, overgenomen uit de tabellen 24 en 25 van

TABEL II.

Energie van de alzijdige voorbelichting in M. K. S.	Energie van de eenzijdige nabelichting in M. K. S.					
	22	44	60	120	500	1000
0 = 0	75 +	75 ++	75 ++	75 ++	75 ++	75 ++
10 × 5.5 = 55	29.5 +	42.3 ++	47.9 ++	58.4 ++	70.2 ++	72.5 ++
10 × 12.1 = 121	17 +	27.7 +	33.3 ++	46.2 ++	65.2 ++	69.8 ++
36 × 12.1 = 435	5.6 0	10.4 +?	13.6 +	23 +	48.6 ++	58.9 ++
100 × 5.5 = 550	4.5 0	8.5 0	11.1 +?	19.4 +	44.4 ++	55 8 ++
100 × 12.1 = 1210	2.1 0	4.1 0	5.1 0	10.3 +?	30 ++	42.7 ++

Verklaring: ++ alle planten-sterk positief gekromd.
\+ alle planten duidelijk positief gekromd.
+? enkele planten zwak positief gekromd.
0 alle planten niet gekromd.
10 × 5.5 gedurende 10 sec. met 5.5 M.K. alzijdig voorbelicht.

$$29.5 = 100 \times \frac{b\frac{m-1}{m}}{\frac{a}{n} + b} = 100 \times \frac{\frac{3}{4} \times 22}{\frac{5}{8} \times 55 + 22}.$$

Arisz; hieraan heb ik toegevoegd de getallen, die weergeven $100 \times \frac{\text{energieverschil voor- en achterkant}}{\text{energie voorkant}} \left(= 100 \times \frac{x_v - x_a}{x_v}\right)$.

Ik neem hier + ? als drempelwaarde aan. We zien nu, dat voor deze het quotient $100 \times \frac{x_v - x_a}{x_v} = 10.4, 11.1$ en 10.3, dus voldoende constant is. Dan is $y_v - y_a$ zoo groot geworden, dat er een zwak positieve kromming optreedt. Wanneer men dus veronderstelt, dat de kromming kan worden voorgesteld door $f(x_v) - f(x_a)$ en ook door $\varphi\left(\frac{x_v - x_a}{x_v}\right)$, dan is f noodzakelijk $c \log x$, gelijk door een eenvoudige mathematische beschouwing gemakkelijk kan worden aangetoond. Daar de energiezone, waarover de cijfers uitsluitsel geven, loopt van ± 300—900 M.K.S., mogen we zeggen, dat dit deel van de groeivertragingskromme logarithmisch loopt. Indien het quotient $\frac{x_v - x_a}{x_v}$ voor de drempelwaarde niet constant was gevonden, hadden we alleen mogen concludeeren, dat de groeivertragingskromme een kromme lijn met afnemende helling was, daar immers de drempelwaarde grooter wordt met stijgende x. Ook dan hadden we misschien iets naders omtrent de functie kunnen te weten komen. Ik leg er hier den nadruk op, dat aan het logarithmisch verloopen van dit deel tusschen 300 en 900 M.K.S. in het geheel geen principieele beteekenis te hechten is. Bovendien loopt de kromme van 0—100 M.K.S. zeker niet logarithmisch; in een volgend stuk hoop ik hierop uitvoeriger terug te komen.

Arisz vat de alzijdige voorbelichting, gevolgd door een eenzijdige, op als een combinatie van eenzijdige belichtingen, een kortere aan den achterkant (voorbelichting) en een langer voortgezette aan den voorkant (voorbelichting + nabelichting). Daar dus de latere achterkant gedurende de voorbelichting ook energie ontvangen heeft, zou er een tegengestelde krommingsneiging overwonnen moeten worden: „Het is geenszins verwonderlijk, dat het surplus, dat aan een der zijden moet gegeven worden, om een kromming naar dezen kant te verkrijgen, grooter moet zijn, naarmate de prikkeling van den anderen kant sterker is." Arisz verklaart dus het stijgen van de drempelwaarde eveneens zonder een verandering van gevoeligheid aan te nemen. Echter, zooals we boven uiteengezet hebben, bestaat deze „tegengestelde krommingsneiging" ook bij zuiver eenzijdig belichte planten, immers de kromming hangt af van het verschil in groeivertraging aan voor- en achterkant; daar nu bij een gecombineerde alzijdige voor- en eenzijdige na-belichting de groeivertraging aan den

achterkant relatief grooter wordt, wordt het groeivertragingsverschil en dus tevens de resulteerende kromming kleiner (Fig. 2). ARISZ beschouwt de fototropische inductie en dus ook de krommingsneiging als een primaire reactie, doch daar volgens de theorie van BLAAUW, die hier door mij verder uitgewerkt is, de groeivertraging primair is en de krommingsneiging secundair, is het beter dit laatste woord niet te gebruiken, maar te spreken van een grootere of kleinere groeivertraging. De eenzijdige belichting is een bijzonder geval van de alzijdige en niet omgekeerd.

We zien dus, dat het van groot belang is, het verloop van de groeivertragingskromme vast te stellen. Uit de getallen van tabel I konden we dit niet goed doen; bovendien moesten de energiegetallen door een coëfficient gedeeld worden, wilden ze vergelijkbaar zijn met horizontaal invallend licht. We zullen nu trachten op een andere wijze de ligging van het maximum van de groeivertragingskromme op te sporen.

Een tweede verschijnsel, dat zich voordoet bij de combinatie van een alzijdige voorbelichting en een eenzijdige nabelichting, is dat, wat CLARK[1]) noemt: het gevoeliger worden voor de negatieve reactie. Ook hiervoor kunnen we een eenvoudige verklaring vinden, als we aannemen, dat de groeivertragingskromme een dalend deel bezit. Indien de voorkant bij eenzijdige belichting een lichtenergie ontvangt, die juist over het maximum heen is, zal de achterkant, die $\frac{1}{4}$ deel hiervan krijgt, nog op het stijgende deel liggen. De ordinaat van den voorkant is hier echter nog grooter dan die van den achterkant, er treedt nog een positieve kromming op. Wanneer we nu méér energie eenzijdig toevoeren, zullen we de punten, die de energie aan voor- en achterkant voorstellen, langs de groeivertragingskromme moeten schuiven, zóó, dat steeds $x_v = 4x_a$. Er zal dan pas veel verder een negatieve kromming kunnen optreden, door den betrekkelijk grooten afstand, die er tusschen x_v en x_a bestaat d. w. z. x_v zal het maximum ver gepasseerd moeten zijn, voordat de y_v kleiner wordt dan de y_a; de x_a behoeft het maximum dan nog niet voorbij te zijn. Wanneer dan het negatieve groeivertragingsverschil $y_v - y_a$ groot genoeg is, om in een kromming zichtbaar te worden, zal er een negatieve kromming optreden (± 5000 M.K.S., indien deze binnen 5 minuten toegediend zijn). Indien beide op het dalende deel liggen, zal er, zoodra x_a het maximum voorbij is, een negatieve kromming op kunnen treden, ook al liggen de x_v en x_a minder ver van elkaar verwijderd; de voorkant behoeft hierbij veel minder dan

[1]) O. L. CLARK. Über negativen Phototropismus bei Avena sativa. Zeitsch. f. Botanik. 1913.

$4x_a$ te ontvangen, om toch nog een zichtbare negatieve kromming mogelijk te maken. We kunnen nu door een kunstgreep maken, dat x_v en x_a, ofschoon beide op het dalende deel, toch dicht bij elkaar komen te liggen. Deze bestaat hierin, dat we alzijdig voorbelichten met een lichthoeveelheid, die zoo groot is, dat voor- en achterkant daardoor beide een energie ontvangen, die overeenkomt met het maximum van de groeivertragingskromme. Indien we daarna een energie eenzijdig toevoeren, die alleen toegediend, een sterk positieve kromming zou gegeven hebben, zal er nu, indien althans $x_v—x_a$ zoo groot is, dat $y_a—y_v$ een zichtbare kromming kan geven, een negatieve kromming optreden. Ook hier zal de grootte van het groeivertragingsverschil, dus de drempelwaarde voor de negatieve kromming, afhangen van de helling van de groeivertragingskromme, evenals dit bij de positieve kromming het geval was. Hier volgen eenige gegevens uit de tabellen 25 en 26 van Arisz; ik heb hieraan toegevoegd de getallen, die de lichthoeveelheden in M.K.S. weergeven, welke de voor- en achterkant ontvangen bij de alzijdige voorbelichting + eenzijdige nabelichting.

TABEL III.

Energie der eenzijdige nabelichting in M. K. S.	Alzijdige voorbelichting.					
	12.1 M. K. ged. 180 sec.			25 M. K. ged. 100 sec.		
	Energie voorkant in M. K. S.	Energie achterkant in M. K. S.	Reactie.	Energie voorkant in M. K. S.	Energie achterkant in M. K. S.	Reactie.
44	1405	1372	0	1606	1573	0
60	1421	1376	0	1622	1577	0
120	1481	1391	?	1682	1592	0
500	1861	1486	?	2062	1687	?
1000				2562	1812	?

Verklaring:

Energie voorkant 1405 M.K.S. is berekend uit $\left(\frac{a}{n}+b\right)=\left(12.1\times 180\times\frac{5}{8}+44\right)$ M. K. S.

Energie achterkant 1372 M.K.S. is berekend uit $\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{m}\right)=\left(12.1\times 180\times\frac{5}{8}+11\right)$ M. K. S.

Arisz bedoelt met „?": „sommige planten krommen zich zwak positief, maar steeds zijn er enkele, die zich negatief krommen", dit is met proeven op den klinostaat gecontroleerd. Hij brengt dit verschijnsel van het „gevoeliger worden voor de negatieve reactie" in direct verband met het feit, dat na 300—600 M.K.S. de sterkte

van de maximale kromming vermindert en acht het mogelijk, dat „door combinatie van een lichthoeveelheid, die een kromming geeft, die over de grootste maximale krommingssterkte heen is en een, die maximaal of vrijwel maximaal is, een kromming naar de zwakste belichting te verkrijgen" is. Maar evenmin als we het „ongevoeliger worden voor de positieve reactie" in direct verband mochten brengen met de tegengestelde krommingsneiging, mogen we hier het „gevoeliger worden voor de negatieve reactie" in direct verband brengen met de sterkte van de maximale kromming, doch moeten dit verklaren uit den loop der groeivertragingskromme. Immers de maximale kromming zal dàn het sterkst zijn, wanneer het verschil der ordinaten, die bij x_v en $\frac{1}{4}\,x_v$ behooren, maximaal is. Het dalen van de grootte van dit verschil hangt primair samen met de vermindering van de helling van de groeivertragingskromme en alleen de snelheid, waarmee de kromming bij hoogere energie afneemt of het negatief worden van de kromming, hangt samen met het feit, of de groeivertragingskromme een maximum heeft of niet. De groeivertragingskromme zal dus nog blijven stijgen, hoewel de sterkte der kromming (d.i. het verschil der ordinaten, die bij x_v en $\frac{1}{4}\,x_v$ behooren) al bezig is te dalen; het maximum zal dus veel hooger liggen dan 300—600 M.K.S. Uit bovenstaande tabel blijkt nu, dat, indien de achterkant ongeveer 1400 M. K. S. krijgt, er negatieve krommingen kunnen optreden. Hier ongeveer moet dus het maximum van de groeivertragingskromme liggen. Dit zal nogal variabel zijn bij de verschillende individuen; als het iets hooger ligt, zal er nog een zwak positieve reactie mogelijk zijn; indien het op of onder 1400 M.K.S. ligt, zullen er negatieve krommingen kunnen optreden, dit hangt af van de grootte der helling van het dalende deel. Ook uit tabel II kan men door omrekening vinden, dat er nooit een negatieve kromming optreedt, als de achterkant minder dan 1400 M.K.S. krijgt. Zoo geven 1756 M.K.S. aan den voorkant en 1006 M.K.S. aan den achterkant nog een sterk positieve kromming; hier moet dus de y van 1756 M.K.S. grooter zijn dan de y van 1006 M.K.S. We mogen dus de ligging van het maximum van de groeivertragingskromme op ± 1400 M.K.S. stellen.

De achterkant zal bij eenzijdige belichting dan pas maximaal vertraagd worden, wanneer de voorkant $m \times 1400$ M.K.S. krijgt (productregel). Deze energie moet natuurlijk voorbij de drempelwaarde voor de negatieve kromming liggen, anders zou y_a nooit grooter dan y_v kunnen worden en zouden er geen negatieve krommingen kunnen optreden. Hieruit kan men de waarde van m benaderen.

Ik wil nog een derde manier aangeven, waarop men het verloop

van de groeivertragingskromme kan leeren kennen. Dit kan men doen door de grootte van de maximale kromming evenredig te stellen aan het groeivertragingsverschil van voor- en achterkant. Wanneer men de maximale krommingssterkte dan uitzet in een kromme, met als abscis de energie, zal dit de verschilkromme voorstellen van de groeivertragingen van voor- en achterkant, althans relatief. Door een eenvoudige wiskundige berekening kan men dan uit de verschilkromme de groeivertragingskromme van den voorkant berekenen, waarbij weer aangenomen is, dat de achterkant $\frac{1}{4}$ krijgt van de energie van den voorkant; hierbij stellen de grootten der groeivertragingen natuurlijk geen absolute waarden voor. De punten van de groeivertragingen aan den achterkant vindt men door van de voorkantkromme de verschilkromme af te trekken; men kan deze ook vinden, door de voorkantkromme op 4 × zoo groote abscissen uit te zetten. De sterkten van de maximale krommingen bij verschillende energie heb ik ontleend aan ARISZ tabel 1 en 3; de energie is hier steeds in 10 sec. toegediend. Daar de voorkant door de volle energie bestraald wordt[1]), hebben we hier weer den loop van de groeivertragingskromme geconstrueerd. Langs dezen weg komen we tot het volgende resultaat: van 0—100 M.K.S. is het verloop van de groeivertragingskromme ongeveer rechtlijnig, daarna neemt de helling af, zoodat ze van 300—700 M.K.S. vrijwel logarithmisch wordt, terwijl een maximum op ± 1600 M.K.S. gevonden wordt. Dit komt dus op voldoende wijze overeen met het reeds vroeger gevondene.

Tenslotte wil ik nog mededeelen, dat het mij gelukt is, ook het verdere verloop van de groeivertragingskromme theoretisch vast te stellen, waardoor èn de verschijnselen bij langere eenzijdige belichting èn die van eenzijdige belichting, voorafgegaan door langere alzijdige, duidelijk worden.

Hier is de groeivertraging niet als functie van de energie voorgesteld, doch als functie van den tijd, gedurende welken met eenzelfde intensiteit belicht is geworden. Daar bij een eenzijdige belichting, die volgt op een alzijdige voorbelichting, welke langer dan 5 min. duurde, weer een positieve kromming optreedt, moet de y_v dus weer grooter worden dan de y_a. Dit komt tot stand, doordat de groeivertragingskromme weer gaat stijgen, indien de plant langer dan 5 min. belicht wordt. Daar hier de helling toeneemt, zal de drempelwaarde voor de positieve kromming moeten dalen. Dit laatste feit komt overeen met dat, wat CLARK en ARISZ gevonden hebben nl. dat de drempelwaarde daalt, indien de planten langer dan 5 min.

[1]) Zie noot 2 p. 1431.

en korter dan 20 min. worden voorbelicht. Indien langer dan 20 min.

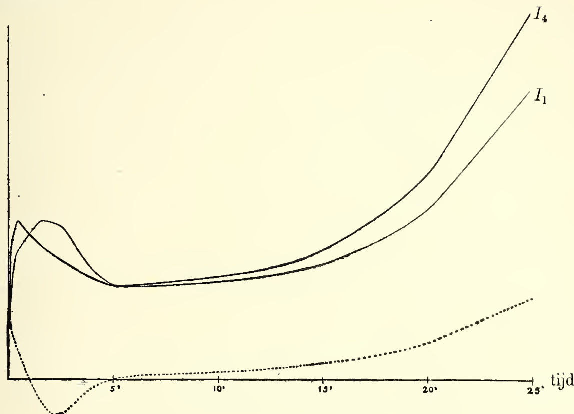


Fig. III. Schematische voorstelling van

______ de groeivertragingskromme voor een intensiteit 4.
______ de groeivertragingskromme voor een intensiteit 1.
.... de krommingssterkten, die optreden wanneer men eenzijdig belicht met een intensiteit 4.

voorbelicht wordt, is de groeivertragingskromme een rechte lijn geworden, daar de drempelwaarde nu constant blijft, hoelang men ook met die intensiteit voorbelicht; er is geen stemmingsverandering meer. Omgekeerd, zal er geen sprake zijn van „stemming", „verandering van gevoeligheid" bij een proces, waarvan het effect rechtlijnig stijgt met toenemende prikkelsterkte.

Daar nu bij eenzijdige belichting gedurende langer dan ± 5 min. ook weer een positieve[1]) kromming verkregen wordt, zal de groeivertragingskromme voor een intensiteit $m \times$ zoo groot, steiler loopen, dus voor dezelfde abscis (tijd) een grooter ordinaat (groeivertraging) hebben. Indien men echter de groeivertragingen van verschillende intensiteiten bij gelijken belichtingsduur neemt en deze in een kromme ten opzichte van de intensiteiten uitzet, zal van deze kromme bij hooger intensiteiten de helling natuurlijk sterk afnemen, gelijk een eenvoudige beschouwing leert. Hiermee stemmen twee feiten overeen:

[1]) Zie noot 2 p. 1430.

ten eerste, dat de drempelwaarde na langdurige voorbelichting met sterke intensiteiten hooger komt te liggen dan na langdurige belichting met zwakke intensiteiten; ten tweede, dat lange eenzijdige belichting met een sterke intensiteit een geringere kromming geeft dan belichting met een zwakke intensiteit gedurende dienzelfden tijd.

We zien dus, dat de fototropische kromming bepaald wordt door de reacties van de afzonderlijke lengtestrooken, resp. voor- en achterkant. Vroeger beschouwde men de kromming als het directe effect van één prikkelingstoestand, de fototropische, die als zoodanig geïnduceerd zou worden. Volgens het door BLAAUW en mij ingenomen standpunt moet men de kromming beschouwen als de resultante der effecten van de prikkelingstoestanden, die bestaan aan den kant, naar welken de latere kromming zal plaats hebben en aan den tegenovergestelden kant. Deze prikkelingstoestanden uiten zich in fotogroeireacties. Het verschil van beide reacties uit zich in de fototropische kromming.

De oorzaak van dat, wat men vroeger „stemming" noemde, is gelegen in eigenaardigheden van de groeivertragingskromme. Deze eigenaardigheden doen zich tendeele voor bij elk proces, waarbij de reactie niet rechtlijnig toeneemt met het agens. Ook een galvanometer of tangentenboussole wordt „ongevoeliger" bij grooter stroomsterkten.

De „stemming" op een bepaald punt van de groeivertragingskromme, hetzij men als abscis de energie, hetzij men den tijd neemt, is dus afhankelijk van de grootte en van het teeken (+ of —) van den hellingshoek en van de richting waarin ze verandert. Men kan dit teeken leeren kennen, door te maken dat x_v en x_a dicht bij elkaar komen te liggen; dan is aan de kromming te zien, of y_v—y_a positief (positieve kromming) of negatief (negatieve kromming) is. Bij eenzijdige belichtingen liggen x_v en x_a te ver uit elkaar en kunnen elk op een ongelijknamig deel van de kromme liggen, waardoor men deze zeer lastig kan construeeren. Hoe dichter men x_v en x_a bij elkaar brengt, des te nauwkeuriger kan men den hellingshoek leeren kennen. Daar we gevonden hebben, dat de groeivertragingskromme een stijgend, een dalend en daarna weer een stijgend deel vertoont, moet dus de „stemming" drie phasen doorloopen; tenslotte is na 20 min. door verdere belichting met die intensiteit geen „omstemming" meer mogelijk. Deze drie phasen zijn in de literatuur herhaaldelijk besproken en verklaard door stemmingsprocessen; men dacht hierbij aan een verandering der perceptiebasis. Door bovenstaande uiteenzetting blijkt echter, dat het begrip stemming niets specifieks heeft, doch eenvoudig een uiting is van eigenaardigheden van de groeivertragingskromme.

Elke groeivertragingskromme bezit een maximum op ± 1400 M.K.S. en een minimum op ongeveer 5 min. De groeivertragingskrommen van twee intensiteiten, die zich verhouden als 1 : *m* en waarmee 5000 M.K.S. binnen 5 min. kan worden toegediend, snijden elkaar op twee punten, het eerste snijpunt is de drempelwaarde voor de negatieve kromming (± 5000 M.K.S.), het tweede is de tijddrempel voor de tweede positieve kromming (5 min.). Men zal echter de groeivertragingskromme, de energiekromme zoowel als de tijdkromme gemakkelijker en juister kunnen construeeren uit getallen van fotogroeireacties dan uit interpolaties volgens bovengenoemde methode, die wel qualitatief, doch niet absoluut quantitatief is.

De fototropie blijft echter haar waarde behouden, daar de bestudeering der fotogroeireacties in zooverre moeilijkheden biedt, dat we hier zeker te maken hebben met prikkelgeleiding, terwijl we alleen de reactie van de geheele plant waarnemen. Doordat bij de fototropische kromming de verschillende zones na elkaar gaan krommen, krijgt men deze prikkelgeleiding hier uiteengelegd in haar opeenvolgende phasen. Ook het groeivertragingsverschil zal als fototropische kromming constanter zijn, dan wanneer dit gevonden wordt, door bij twee verschillende planten de fotogroeireacties, bij de eene voor een energie 1, bij de andere voor een energie *m*, te onderzoeken. Bij de eenzijdige belichting vinden de twee proeven n.l. in dezelfde plant plaats, een aan den voorkant, de andere aan den achterkant. Het verschil, de resultante der twee reacties, zal dus minder onderhevig zijn aan individueele variabiliteit.

Utrecht, April 1919.

Sterrenkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan van den Heer P. H. VAN CITTERT: „*De opbouw der zonnestraling*".

(Mede aangeboden door den Heer HAGA).

Zooals bekend is, neemt de lichtsterkte op de zonneschijf van het centrum naar den rand zeer merkbaar af, en wel voor verschillende kleuren in verschillende mate: de rand [1]) van de zonneschijf is duidelijk roodachtig tegenover het centrum.

Met behulp van een spectraalphotometer bepaalde VOGEL [2]) die intensiteitsverdeeling voor zes golflengtegebieden in het zichtbare gedeelte van het spectrum. De intensiteitsvermindering naar den rand bleek voor licht van kortere golflengte sterker te zijn dan voor licht van langere golflengte, de vermindering verloopt echter niet continu met de golflengte, maar vertoont in de omgeving van 5000 Å een anomalie: het contrast van den rand tegen het centrum is voor dat golflengtegebied geringer dan de contrasten voor de overige golflengtegebieden zouden doen verwachten.

De waarnemingen van VOGEL zijn in 1906 door ABBOT [3]) herhaald met behulp van een bolometer. ABBOT bepaalde de intensiteitsvermindering voor een groot aantal golflengtegebieden in het infrarood en het zichtbare spectrum. Ook hij vond een sterk uitgesproken golflengteëffect: het contrast naar den rand nam naar het violet zeer sterk toe. Ook zijn waarnemingen vertoonden in de omgeving van 5000 Å een anomalie, al is deze minder geprononceerd dan die in de waarnemingen van VOGEL. In fig. 1 is voor plaatsen, die op 0.65, 0.825 en 0.95 van den straal der zonneschijf van het centrum verwijderd zijn, als functie van de golflengte weergegeven, welke waarde aldaar de intensiteit heeft, wanneer zij in het midden voor alle kleuren gelijk 100 gesteld wordt. De gegevens zijn ontleend aan de tabellen van ABBOT. Men ziet, dat de intensiteit naar den

---

[1]) Waar gesproken wordt van den rand van de zonneschijf worden bedoeld gebieden in de buurt van den rand, bijz. $\frac{95}{100}$ van den straal der schijf van het centrum verwijderd. De verschijnselen vlak aan den rand laten wij buiten beschouwing.

[2]) H. C. VOGEL, Berl. Ber., 1877.

[3]) C. G. ABBOT. Ann. of the Obs. of the Smiths. Inst., **2**, 205, 1908; **3**, 153, 1913.

rand snel afneemt, en wel des te sterker, naarmate de golflengte kleiner is, maar tevens valt in het oog, dat in het gebied 6000–4000 Å deze intensiteitsvermindering een schommeling vertoont.

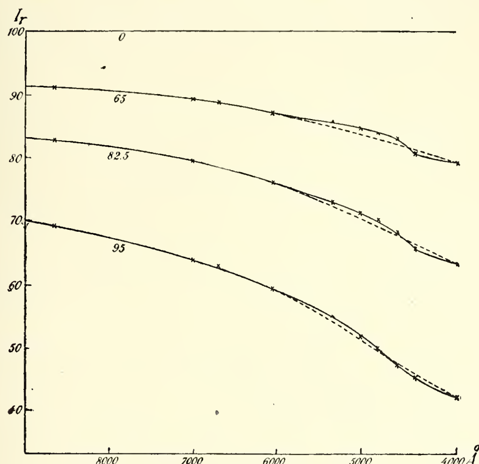


Fig. 1.

Opgemerkt dient te worden, dat op dezelfde plaats in het spectrum het energiemaximum der zonnestraling is gelegen. (De waarnemingen van ABBOT liepen van 21000 Å tot 3800 Å; het gedeelte van 21000--9000 Å is echter in de figuur weggelaten, omdat de kromme lijnen daar geen onregelmatigen gang vertoonen, maar naar 21000 Å toe de lijn $I_r = 100$ geleidelijk naderen.)

Om deze intensiteitsvermindering naar den rand te verklaren hebben vele onderzoekers de zon beschouwd als een zelflichtende, gelijkmatig stralende kern, omgeven door een sterk absorbeerende atmospheer. Nu moet natuurlijk de toestand in de zonneatmospheer gemiddeld stationnair zijn: de hoeveelheid energie, die de atmospheer absorbeert, moet, zij het in anderen vorm, weer uitgestraald worden, en wel voor de helft naar buiten. Nu is uit de waarnemingen bij de ringvormige eclips van 17 April 1912 [1]) overtuigend gebleken, dat van de totale hoeveelheid energie, die de aarde van de zon ontvangt, hoogstens het duizendste gedeelte afkomstig kan zijn van

[1]) W. H. JULIUS. Versl. Kon. Ak. v. Wet., 21, 1499, 1913.

de zonneatmospheer. Het is dus onmogelijk, dat absorptie de hoofdoorzaak is van de intensiteitsvermindering naar den rand.

Voortbouwende op de onderzoekingen van RAYLEIGH [1]), SCHUSTER [2]), KING [3]) en SCHWARZSCHILD [4]) over de moleculaire verstrooiing van het licht heeft SPIJKERBOER [5]) het vraagstuk behandeld, hoe de lichtverdeeling over de zonneschijf voor de verschillende kleuren zou zijn, indien uitsluitend moleculaire verstrooiing in een niet absorbeerende en niet zelflichtgevende atmospheer de oorzaak was, waardoor de in alle richtingen gelijkmatige straling van een zelflichtgevende zonnekern werd gewijzigd. Hij kwam daarbij tot een lichtverdeeling, die zeer veel overeenkomst vertoont met de verdeeling door ABBOT waargenomen.

De invloed der diffusie wordt bepaald door het product $H = s \cdot t$, waarin $t =$ de dikte der verstrooiende laag en $s = \frac{32\pi^3 (n-1)^2}{3N\lambda^4} =$ de verstrooiingscoëfficiënt van RAYLEIGH. Indien men nu aanneemt, dat t voor licht van verschillende golflengte dezelfde waarde heeft, dat dus „de kern" voor alle kleuren even diep ligt, wordt het golflengteëffect uitsluitend bepaald door de afhankelijkheid van s van λ^4, daar, indien men lichtsoorten in de nabijheid der eigenfrequenties buiten beschouwing laat, $(n-1)$ zeer weinig over het spectrum zal varieeren. Het blijkt echter, dat de waargenomen afhankelijkheid van de golflengte iets minder sterk is, dan de theorie doet verwachten. Dit kan het gevolg zijn van het feit, dat naast de diffusie nog een ander verschijnsel optreedt, dat een dergelijken invloed op de lichtverdeeling heeft als de diffusie, maar dat niet zoo sterk van de golflengte afhankelijk is, bijv. onregelmatige brekingsverstrooiing en mogelijk een zeer geringe absorptie.

Nu is het zeer waarschijnlijk, dat, voornamelijk in de diepere lagen der zonneatmospheer, onregelmatige breking een merkbare rol speelt. Immers aan het bestaan van een zeer ongelijkmatige dichtheidsverdeeling in de zonnegassen kan men niet twijfelen, de voortdurende veranderingen in de granulaties en flocculi op de zonneschijf wijzen in ieder geval op een ingewikkeld stelsel van stroomingen in die gasmassa, en deze zijn zonder drukverschillen en daarmee

[1]) RAYLEIGH, Phil. Mag., (5). **47**, 375, 1899.

[2]) SCHUSTER, Astrophys. Journ., **21**, 1, 1905.

[3]) KING, Phil. Trans. R.S., A (212), 375, 1912.

[4]) SCHWARZSCHILD, Berl. Ber., **47**. 1183, 1914.

[5]) J. SPIJKERBOER, Verstrooiing van licht en intensiteitsverdeeling over de zonneschijf. Proefschrift. Utrecht 1917. Arch. Néerl., (3 A), **5**, 1, 1918.

gepaard gaande onregelmatige dichtheidsgradiënten niet denkbaar. De gemiddelde grootte dier gradiënten, die gering is in de buitenste lagen der zon, moet, naarmate men dieper komt, aanvankelijk toenemen. Op zekere diepte zullen dan de onregelmatige dichtheidsgradiënten gemiddeld van dezelfde orde van grootte zijn als bijv. de verticale gradiënt van onzen aardschen dampkring. Een gasmassa nu, van de afmetingen der zonneatmospheer, geheel doortrokken met onregelmatige gradiënten van zoodanig bedrag, zou, gelijk door JULIUS[1]) is aangetoond, de lichtstralen, die haar doordringen, zoo sterk naar alle kanten buigen en verstrooien, dat het gas zich aan den verwijderden beschouwer zou vertoonen als een troebele middenstof; immers, de volumedeelen, waarin de dichtheid als constant en dus het licht als rechtlijnig beschouwd kan worden, zouden te klein zijn om op zoo'n grooten afstand afzonderlijk waargenomen te kunnen worden. Daar nu de grootte der brekingsverstrooiing bepaald wordt door $(n-1)$ en dus betrekkelijk langzaam met λ varieert, zal het optreden dezer verstrooiing het gemiddelde golflengteëffect verzwakken.

Tevens zal de vermindering van de intensiteit van het centrum naar den rand sterker zijn, dan het geval zou zijn, indien alleen diffusie de oorzaak dier vermindering was. Door het optreden der onregelmatige breking zal dus het verschil in de verzwakking voor de verschillende golflengten verminderd, daarentegen het contrast van het centrum naar den rand versterkt worden.

Als tweede mogelijke oorzaak van het feit, dat het waargenomen golflengteëffect geringer is dan het theoretische, noemt SPIJKERBOER de mogelijkheid, dat het licht van de langere golflengten, daar het minder sterk door diffusie verzwakt wordt, uit diepere lagen der zon tot ons zou kunnen komen dan het licht van kortere golflengte. Deze onderstelling breekt dus met de hypothese, dat de zon zou zijn op te vatten als een goedgedefinieerde kern, omgeven door een streng gescheiden atmospheer. De opvatting, dat licht van verschillende diepte tot ons kan komen is meer in overeenstemming met de voorstelling van de zon als te zijn een gloeiende gasmassa, waarvan de dichtheid en de temperatuur naar buiten toe geleidelijk afnemen. Daar nu het licht van grootere golflengte veel minder verzwakt wordt dan dat van kortere golflengte, zal dat dus uit diepere lagen van de zon tot ons komen. Het infraroode licht zal daardoor dus relatief sterker verzwakt worden, dan het geval zou zijn, indien het uit even diepe lagen tot ons kwam als het violette licht.

Uit welke diepte het licht tot ons komt, wordt echter niet alleen

---

[1]) W. H. JULIUS, Versl. Kon. Ak. v. Wet. **17**, 198, 1908; **18**, 182, 1909.

bepaald door de sterkte der diffusie, maar ook door de onregelmatige breking. Daar deze van de golflengte weinig afhankelijk is, zullen de verschillen in diepte voor de verschillende kleuren niet zoo groot zijn als in het geval, dat alleen diffusie een rol speelde. Indien, zooals zeer waarschijnlijk is, in de diepere lagen de onregelmatige breking de hoofdrol speelt, zal dus het verschil in diepte betrekkelijk gering moeten zijn.

Vragen wij ons nu eens af, hoe, uit dit oogpunt bezien, de straling, door de zon in een richting w (fig. 2) uitgezonden, moet zijn opgebouwd. De buitenste lagen der zon zullen zeer weinig energie uitstralen; naar binnen neemt de hoeveelheid uitgezonden energie toe, eerst langzaam, daarna sneller, ten gevolge van het toenemen van temperatuur en dichtheid. Onderstellen wij, dat $d\,e\,f$ de laag is,

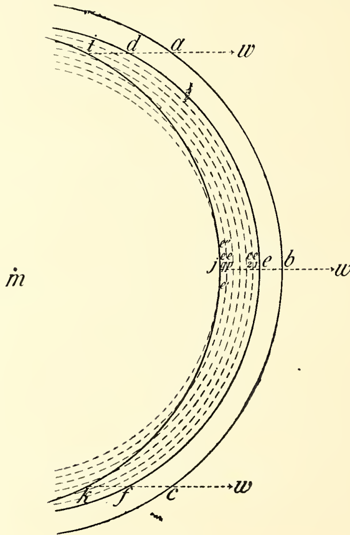


Fig. 2.

waarbuiten geen merkbare hoeveelheid energie wordt uitgestraald. Beschouwen wij nu eerst de straling, door het oppervlak $d\,e\,f$ in de richting w uitgezonden. De verstrooiing in de atmospheer buiten $d\,e\,f$ zullen wij dan naderhand in rekening brengen. Uit het gebied om e_1 in het centrum der zonneschijf ontvangt w een betrekkelijk

geringe hoeveelheid straling van betrekkelijk lage temperatuur, uit e_2 een grootere hoeveelheid van hoogere temperatuur, enz. Aanvankelijk zal de hoeveelheid energie, die w uit de verschillende diepten ontvangt, naar binnen toenemen; hoe dieper we echter komen, hoe meer de uitgezonden straling door absorptie, brekingsverstrooiing en diffusie verzwakt wordt. Uit e_p bijv. zal w weer minder straling ontvangen dan uit e_2, maar van hoogere temperatuur, uit e_q zeer weinig, enz. Onderstellen wij, dat w uit lagen dieper dan j gelegen geen merkbare hoeveelheid energie ontvangt. (Opgemerkt dient te worden, dat w uit e ook straling ontvangt afkomstig uit gebieden e' en e'' in de omgeving van den voerstraal je, welke straling door diffusie en onregelmatige breking ten slotte in de richting ew terecht is gekomen).

Beschouwen wij nu de energiekrommen van de stralingen, uit die verschillende gebieden afkomstig, als functie van de golflengte. Alle zullen ongeveer het karakter hebben van de stralingskromme van het absoluut zwarte lichaam: langzaam toenemen der energie van het infrarood tot een maximum, en dan betrekkelijk sterk afnemen aan de violette zijde van het maximum. De plaatsen der maxima van de verschillende krommen worden niet alleen door de temperatuur der bijbehoorende stralingen bepaald, maar ook door de relatieve grootte van de verstrooiing door diffusie tegen die door onregelmatige breking. Immers, daar het licht van kortere golflengte veel sterker door diffusie verzwakt wordt dan dat van langere golflengte, zal door de diffusie het maximum naar de zijde der langere golflengten verplaatst worden; de onregelmatige breking daarentegen verplaatst het maximum niet, omdat zij van de golflengte vrijwel onafhankelijk is. Bij de krommen behoorende bij de straling uit diepere lagen afkomstig, zou het maximum meer naar violet liggen dan bij de krommen behoorende bij de buitenste lagen, indien de hoogere temperatuur de eenige factor was, echter meer naar het rood, indien uitsluitend de diffusie invloed had. De grootte van het maximum wordt bepaald door de temperatuur van de straling, de dichtheid op de plaats van uitzending en de verzwakking, die de straling door de diffusie, onregelmatige breking en absorptie heeft ondergaan.

Als resultaat mogen wij dus aannemen, dat uit het centrum der zonneschijf in de richting w een hoeveelheid energie geëmitteerd wordt, wier energiekromme van het infrarood eerst langzaam, daarna sneller toeneemt tot een vlak maximum, en dan zeer steil naar het violet afvalt (fig. 3 I).

Niet ver van den rand van de schijf, bijv. bij c (fig. 2) zal men

tot een grootere diepte k ($ck > bj$) kunnen inkijken, echter tot een minder diepe laag. Aan den rand ontvangt men uit f dus slechts

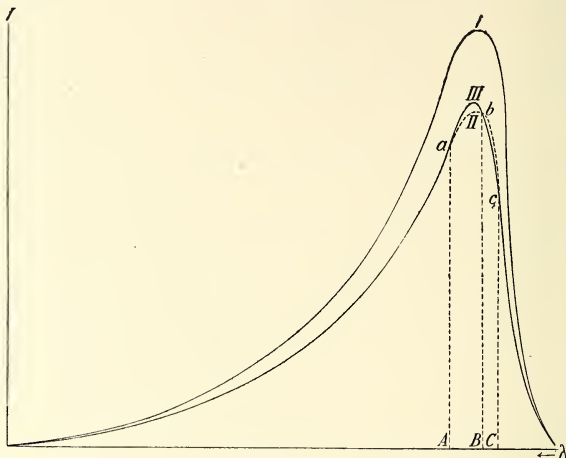


Fig. 3.

straling uit de meer naar buiten gelegen gebieden om kf. De hoeveelheid energie, die w van den rand der schijf ontvangt is dus voor alle kleuren geringer dan die welke w uit het centrum ontvangt. De energiekromme van den rand van de zon zal dus in haar geheel lager liggen dan die van het centrum. *Was het energieverschil voor alle kleuren hetzelfde,* dan zou de samenstelling van het licht aan den rand voorgesteld worden door een kromme, die hetzelfde verloop had als die van het centrum (fig. 3 II). Nu is direct in te zien, dat dit niet het geval kan zijn, immers, de straling aan den rand zal niet zoo'n verscheidenheid aan temperatuur, onregelmatige breking, diffusie, enz. vertoonen als die in het centrum, daar aan den rand slechts straling uit een geringer aantal lagen tot de totaalstraling bijdraagt. De randstraling zal dus tot energiekromme een kromme hebben met een maximum, dat niet zoo vlak is als dat bij de centrale straling, en dat, daar we slechts straling van lagere temperatuur ontvangen, iets meer naar de zijde der langere golflengten ligt (fig. 3 III)

Vergelijken we nu de krommen fig. 3 I, II en III, dan blijkt, dat in het golflengte gebied AB de randstraling een relatief sterkere, in BC een relatief geringere intensiteit zal hebben dan in de gebieden buiten AC, gerekend ten opzichte van de straling van het centrum.

Stelt men nu de centrale straling voor alle golflengten = 100, dan wordt deze graphisch voorgesteld door een rechte lijn C evenwijdig aan de golflengte-as. De randstraling zal dan voorgesteld kunnen worden door een vrijwel rechte lijn r, die ongeveer evenwijdig aan de golflengte-as verloopt, maar die in het gebied ABC een schommeling vertoont (fig. 4).

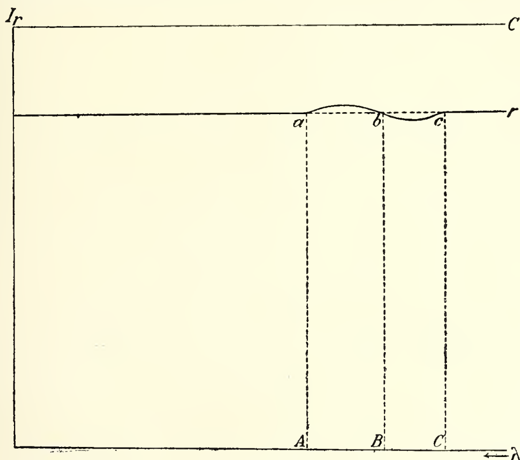


Fig. 4.

Deze stralingen zullen door de diffusie en de onregelmatige breking in de atmospheer buiten $d\,e\,f$ (fig. 2). verzwakt worden, en wel het licht van de kortste golflengten het meest. Stellen wij ook nu weer de resulteerende centrale straling voor alle kleuren = 100, dan zal de relatieve randstraling voorgesteld worden door de lijn r in fig. 5. Deze straling neemt dus continu naar het violet af, maar vertoont in het gebied ABC dezelfde schommeling.

In de buurt van het energiemaximum moet dus de relatieve intensiteitsverdeeling van het licht op de zonneschijf, ten opzichte van het centrum gerekend, een anomalie vertoonen. Deze anomalie draagt volkomen hetzelfde karakter en ligt op dezelfde plaats in het spectrum als de anomalie door Abbot waargenomen. (Verg. fig. 5 met fig. 1; het gedeelte der kromme r buiten C in fig. 5 is door Abbot niet waargenomen).

Resumeerende mogen wij dus zeggen, dat de lichtverdeeling over

de zonneschijf als functie van de plaats op de schijf en van de golflengte quantitatief vrij goed, qualitatief zoo goed als geheel te

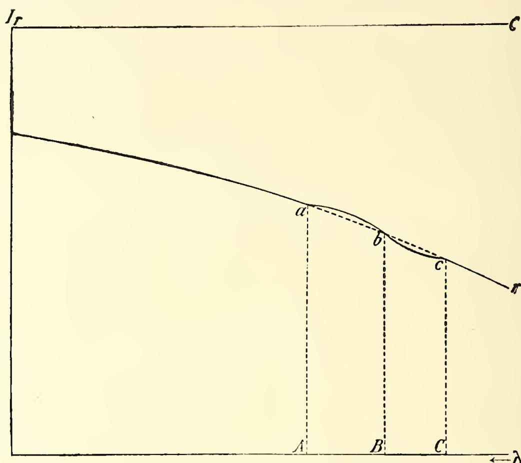


Fig. 5.

verklaren is uit de hypothese, dat de zon op te vatten is als een gloeiende gasvormige bol, waarvan de temperatuur en de dichtheid van binnen naar buiten geleidelijk afnemen, en waarvan de buitenste lagen bestaan uit weinig lichtgevende, weinig absorbeerende, maar sterk diffundeerende en onregelmatig brekende gasmassa's.

Natuurkunde. — De Heer ZEEMAN doet eene mededeeling over: *„De voortplanting van het licht in bewegende, doorschijnende vaste stoffen. I. Toestel voor de waarneming van het* FIZEAU-*effect in vaste stoffen".*

1. In verband met een proef van ARAGO met een *glazen* prisma werd in 1818 door FRESNEL zijne stoute gissing over den meesleepingscoefficient opgesteld. Toen FIZEAU in 1851 de onderstelling van FRESNEL op de proef wilde stellen heeft hij echter met *water* geëxperimenteerd en nagegaan of de snelheid van het licht in stilstaand water al of niet verschilt van de snelheid in stroomend water.

Vele gronden zijn er aan te voeren om een zoo uiterst moeilijke proef als die van FIZEAU in de eerste plaats met water te verrichten, het is echter interessant ook de lichtbeweging in *vaste*, doorschijnende, snelbewegende stoffen te onderzoeken. Proeven met snelbewegend kwarts en glas zijn in dit verband door Mej. SNETHLAGE en mij genomen. De beschrijving van den toestel waarmede die proeven zijn gedaan wil ik in deze mededeeling I geven. Voor de duidelijkheid herinner ik nog aan een paar punten, die op de proef van FIZEAU met water betrekking hebben.

Is c de snelheid van het licht in het vacuum, μ de brekingsindex van het water, w de snelheid van het water t.o.v. de buis, waarin het water stroomt, dan is volgens FRESNEL de snelheid van voortplanting van het licht t.o.v. de buis

$$\frac{c}{\mu} \pm \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hierbij moet het bovenste of het onderste teeken worden genomen indien het water en het licht in dezelfde of wel in tegengestelde richting bewegen.

LORENTZ heeft in 1895 aangetoond dat de eenvoudige formule voor den coefficient van FRESNEL in een medium met dispersie vervangen moet worden door

$$1 - \frac{1}{\mu^2} - \frac{\lambda}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$$

De formule (1) wordt daardoor

$$\frac{c}{\mu} \pm \left(1 - \frac{1}{\mu^2} - \frac{\lambda}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\right) w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De proeven door FIZEAU in 1851 genomen, pleitten voor de formule (1). MICHELSON en MORLEY's onderzoek van 1886, verricht met MICHELSON's interferometer in een der vele vormen waarin als een PROTEUS dit wonderbaarlijk instrument zich kan vertoonen, gaf met wit licht een waarde voor den meesleepingscoefficient, die uitstekend overeenstemde met den coefficient, die voor geel natrium licht uit formule (1) volgt.

Over proeven, die door mij zijn genomen met verschillende kleuren, zich uitstrekkend van violet naar rood, en waarbij de snelheid van het water in de as van de buis direct werd gemeten zijn door mij verschillende mededeelingen aan de Akademie gedaan [1]). De juistheid van de formule (2) met den dispersieterm kon met eene nauwkeurigheid die $^1/_2\,^0/_0$ overtreft, worden aangetoond. Het optisch effect dat bij deze proeven gemeten wordt, is eene verschuiving van interferentiestrepen, die in deelen van den afstand van twee strepen gegeven wordt door de formule

$$\frac{4l}{\lambda\,.\,c}\left(1-\frac{1}{\mu^2}-\frac{\lambda}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\right)\mu^2 w, \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waarin l de lengte van de geheele vloeistofkolom, die in beweging verkeert, voorstelt.

2. Het apparaat dat voor het onderzoek van de lichtbeweging in vaste stoffen gebruikt is, wordt in fig. 1 op een schaal van $^1/_{20}$ schematisch voorgesteld en zou met eenvoudige wijzigingen ook voor

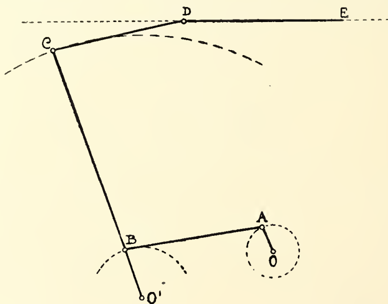


Fig. 1.

het onderzoek van kostbare vloeistoffen en samengeperste gassen gebezigd kunnen worden. De bewegende, doorschijnende stof is met

[1]) ZEEMAN. Deze Verslagen. **23**, 245, 1914; **24**, 18, 1915; **24**, 439, 1915; **24** 1366, 1916; **25**, 134, 1916.

een stuk DE vast verbonden en kan daardoor evenwijdig aan de stippellijn snel heen en weer bewegen, terwijl een lichtbundel evenwijdig aan DE de stof doorstraalt.

Het stuk DE wordt heen en weer bewogen, doordat het gekoppeld is met de stangen DC en $O'C$. Loodrecht op het vlak der teekening zijn assen in O en O' aangebracht, in een zeer sterk geconstrueerd frame, waarop het bed is bevestigd waarlangs DE zich beweegt. De as in O wordt door een 3 P.K. motor rondgedraaid, zoodat het punt A een cirkel doorloopt; B aan A verbonden door de stang AB, krijgt een heen en weer gaande beweging, die vergroot op C wordt overgebracht.

Van boven gezien is het stuk DE van Fig. 1 schematisch afgebeeld in Fig. 2 op een schaal van $\frac{1}{10}$. In A en B bevinden zich bronzen sleden, die langs stalen geleidingen kunnen glijden. Deze geleidingen zijn zeer nauwkeurig afgewerkt en de sleden eveneens, zoodat eene rechtlijnige, horizontale beweging van de sleden kan worden verkregen. In deze beweging wordt gedeeld door de staafjes der doorschijnende

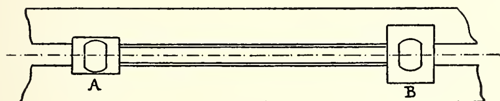


Fig. 2.

stof, die in een houten stuk rusten, dat met 4 schroeven aan A en B is verbonden.

Een algemeen overzicht van den bewegingstoestel wordt gegeven op de Plaat, die bij deze mededeeling is gevoegd. De dikte der geleidingen bedraagt 9 mM., de breedte 70 mM., de lengte 1,84 M. Zij rusten op zware rechthoekig omgebogen stukken, die de zijkanten van het bed uitmaken en voor meerdere stevigheid door tweemaal rechthoekig omgebogen, zeer zware, stukken van ongeveer een halven meter lengte zijn verbonden. Het tweemaal rechthoekig omgebogen stuk is, zooals op de Plaats te zien is, links aan den onderkant, rechts aan den bovenkant van het bed aangebracht. De geheele lengte van het bovendeel van den toestel bedraagt 2.30 M., de slaglengte ongeveer 1 M.

Ten einde de regelmatige beweging van den toestel te verzekeren bleek het noodig te zijn twee vliegwielen aan te brengen, een groot dat men aan de voorzijde van den toestel ziet en een kleiner dat aan het andere einde van de draaiingsas is aangebracht en op de Plaat juist even zichtbaar is. Het geheele toestel is met stevige

bouten vastgemaakt op een hardsteenen plaat, die gemetseld is op den grooten peiler van het laboratorium.

Zooals uit eene beschouwing van Fig. 1 volgt, is de snelheid van beweging van de slede veranderlijk, met 2, iets verschillende, maxima van snelheid, een bij den heengang en een bij den teruggang langs de geleidingen. Over een afstand van ongeveer 20 c.M. is de maximum snelheid praktisch konstant. Wanneer het vliegwiel 184 omwentelingen per minuut maakt, klimt de maximum snelheid tot iets meer dan 10 Meter per seconde. Dit is de hoogste waarde die bereikt kan worden.

Het bewegingsapparaat is geconstrueerd geworden door de fabriek Werkspoor te Amsterdam. De uitvoering der mechanische deelen moest in het laboratorium voor de optische eischen passend gemaakt worden.

Wat de optische inrichting der proef betreft kan worden verwezen naar mijne vroegere mededeelingen over het Fizeau-effect. De snel bewegende, doorschijnende, vaste stof, neemt de plaats in van het stroomende water bij de vroegere proeven. De lengte van de bewegende kolom kwarts of glas varieerde bij verschillende proeven tusschen 100 en 140 c.M. Na het successievelijk aanbrengen van talrijke verbeteringen was het mogelijk de lichtbundels door het bewegend kwarts of glas heen tot interferentie te brengen en zuivere interferentiestrepen te krijgen ook bij de grootste snelheid, die het toestel toelaat te bereiken.

De proef komt dan daarop neer, dat de interferentiestrepen tweemaal gephotographeerd worden, eerst bij een beweging van de kolom naar rechts, dan bij een beweging naar links. Die foto's moeten worden genomen door licht toe te laten gedurende een tijd van de orde van één honderdste seconde en op het oogenblik van de maximum snelheid.

Het te verwachten optisch effect is, als l de lengte van de bewegende doorschijnende stof voorstelt,

$$\frac{4l}{\lambda \cdot c}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu^2}-\frac{\lambda}{\mu^2}\frac{d\mu}{d\lambda}\right)\mu^2 w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Uit deze formule, die later (zie II) bewezen zal worden, blijkt dat het optisch effect bij benadering evenredig is aan $\mu-1$. Bij de proef van Fizeau is volgens (3) het optisch effect evenredig aan μ^2-1. Dit verschil hangt daarmee samen dat bij de proef van Fizeau in zijn gewonen vorm in een vast punt der ruimte de snelheid steeds dezelfde is, terwijl bij de nu beschouwde proef het licht de zich verplaatsende staaf moet inhalen.

Wat het optisch effect, dat wordt waargenomen, betreft, zal dus

de nu beschouwde methode, bij een waarde van $\mu = 1{,}5$, twee en een half maal ongunstiger dan de gewone methode van FIZEAU zijn, daar $\frac{\mu^2 - 1}{\mu - 1} = \mu + 1$ is. Daar staat een voordeel tegenover wat den dispersieterm betreft. Zooals uit de formules (3) en (4) volgt, is de verhouding van den dispersieterm tot den hoofdterm in het tweede geval 1,6 maal grooter dan in de eerstgenoemde proef.

We zullen nu nog enkele bijzonderheden over de inrichting en het gebruik van den toestel bespreken.

3. *Snelheidsbepaling.* Ten einde een overzicht te krijgen van het verloop van de snelheid bij de beweging langs de geleidingen werd voor 16 verschillende, equidistante, standen van het vliegwiel de overeenkomstige stand van DE (zie Fig. 1) bepaald. De lijn, die het verband tusschen de standen van het vliegwiel en de uitwijkingen weergeeft, heeft ongeveer den vorm van eene sinusoide, maar de beide helften der lijn zijn niet symmetrisch en in het bijzonder is het verloop der lijn in de nabijheid der twee grenswaarden niet volkomen hetzelfde, zooals ook uit eene beschouwing van Fig. 1 blijkt, als men A in gedachte den gestippelden cirkel laat doorloopen.

Uit de weg-tijd-lijn kan men graphisch de snelheid-tijd-lijn afleiden. Bij de maxima is over een afstand van 20 cM. de snelheid praktisch constant, waarvan slechts 10 cM. worden gebruikt. Zooals reeds werd opgemerkt bedraagt de maximum snelheid ongeveer 1000 $\frac{\text{cM.}}{\text{sec.}}$ bij een aantal omwentelingen van 184 per minuut. Door eene evenredigheid kan men bij een ander aantal omwentelingen de snelheid afleiden. Of werkelijk de maximumsnelheid in rekening moet worden gebracht, hangt verder nog af van de plaats waar de bewegende kolom zich bevindt op het oogenblik dat de onderbreker voor het objectief van den kijker licht doorlaat. In sommige gevallen was die plaats niet die van de maximumsnelheid, met welke omstandigheid dan natuurlijk bij de interpretatie der foto's rekening werd gehouden.

Bij de nauwkeurigste proeven werd de maximumsnelheid van de kolom direct gemeten (zie over de daarvoor gebezigde methode eene der volgende mededeelingen), waardoor men onafhankelijk wordt van de onderstelling dat het vliegwiel eene constante hoeksnelheid bezit.

Bij de proeven bleek dat de machine regelmatiger liep, wanneer het vliegwiel met het uurwerk meedraait, (gezien van den kant

waar zich het groote vliegwiel bevindt), dan bij de tegengestelde draaiingsrichting. Natuurlijk werd deze gunstige bewegingsrichting steeds gebruikt.

4. *Lichtafsluiter.* Alleen op het oogenblik, dat de machine haar grootste snelheid heeft, mag het licht tot de photographische plaat worden toegelaten. De volgende inrichting was daartoe geconstrueerd. Op de as van het vliegwiel is een tandrad aangebracht, dat in een tweede tandrad grijpt met het dubbele aantal tanden. Op dit tweede rad is aan weerskanten geisoleerd bevestigd een geel koperen ring met uitstekend nokje. De nokjes op beide ringen zijn diametraal geplaatst, zoodat zij na iedere geheele omwenteling van het vliegwiel, wat de hoogte betreft, elkaars plaats innemen en contact kunnen maken met een geschikt geplaatst sleepcontact.

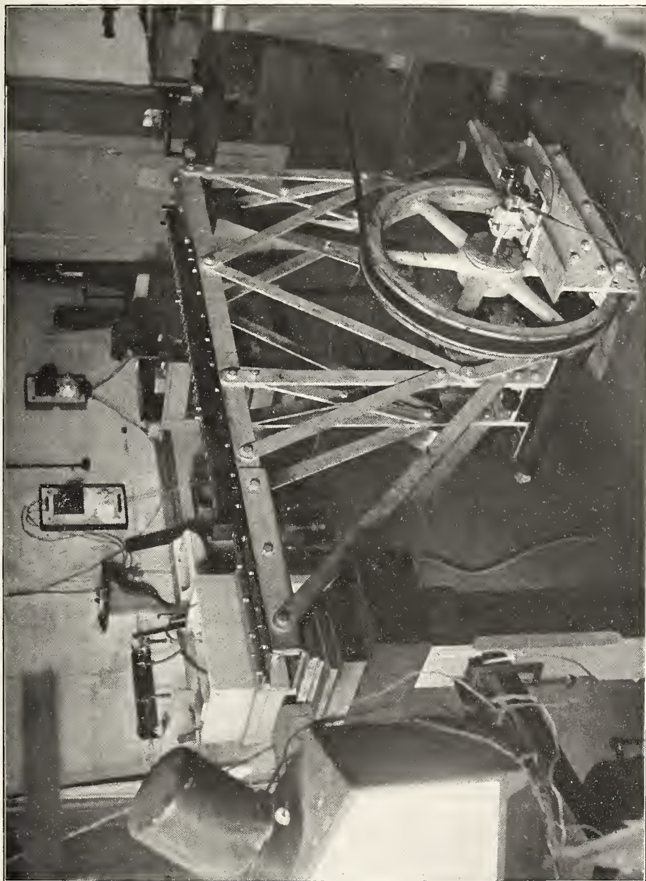
Door het nokje wordt dan een electrische stroom gesloten in een keten, waarin zich ook de windingen bevinden van een klos, die electromagnetisch op een lichtafsluiter of lichtonderbreker werkt. Wordt door het tweede nokje contact gemaakt, dan gaat de stroom door een tweeden klos, die den lichtafsluiter weer doet omklappen. Telkens wordt als het vliegwiel en daardoor de bewegende kolom *in denzelfden* stand is gekomen en *in dezelfde richting* beweegt, de lichtafsluiter omgeklapt, en dan wordt dus even licht doorgelaten. Daar de intensiteit der interferentiefiguur niet sterk genoeg is om met eenmaal toegelaten licht een voldoende foto te krijgen, wordt bijv. 30 maal over elkaar gephotografeerd. Dit neemt weinig tijd in beslag; daar het licht 3 maal per seconde door wordt gelaten, slechts 10 seconden.

Voor het maken van de tweede foto, dus bij beweging van de kolom kwarts in tegengestelden zin, is een duplicaat inrichting aangebracht, symmetrisch geplaatst t.o.v. de geschetste. Met een dubbelpoligen omschakelaar wordt het mogelijk, zonder tijdverlies en zonder de machine te laten stilstaan, onmiddellijk de eene reeks van opnamen op de andere te laten volgen. Slechts de photographische plaat moet even verschoven worden. Op de Plaat kan men rechts onderaan, in de nabijheid van het kussenblok, de twee groote en daartusschen het kleine tandrad onderscheiden.

Daar er eenige tijd verloopt tusschen het contactmaken van het nokje en het omklappen van den lichtafsluiter moet met dezen tijd rekening worden gehouden. Het is daartoe noodzakelijk eene

5. *Phasen bepaling* te verrichten, d.w.z. door eene afzonderlijke proef te controleeren of inderdaad op het oogenblik van grootste

P. ZEEMAN: „De voortplanting van het licht in bewegende, doorschijnende vaste stoffen. I. Toestel voor de waarneming van het Fizeau-effect in vaste stoffen."



snelheid het licht door den lichtonderbreker heenkomt. Daartoe wordt de onderbreker op de plaats van de grootste snelheid naast de geleiding geplaatst. De houten balk, waarin zich de doorschijnende stof bevindt, wordt voorzien van een zwart scherm met opening. In de lijn: lichtonderbreker — plaats van de grootste snelheid, een lijn die dus loodrecht op de lengterichting van den toestel staat, wordt een electrisch gloeilampje geplaatst. Loopt de machine en is de lichtonderbreker in werking, dan moet men door den onderbreker het lampje waarnemen. Werkt de onderbreker niet op het juiste oogenblik, dan blijft het gezichtsveld donker. De phase kan dan verbeterd en eindelijk juist gemaakt worden, door telkens eene verstelling van het grootere tandrad t.o.v. het kleine nit te voeren. Het contact wordt daardoor op een ander tijdstip gemaakt.

6. *Waarneming en Photographie der Interferentiestrepen.* De lichtafsluiter is geplaatst voor het objectief van den kijker, die ook vroeger voor de opname van het FIZEAU-effect werd gebruikt[1]). In het focale vlak van den kijker, die van een negatief achromatisch lenzensyteem is voorzien om den effectieven brandpuntsafstand te vergrooten, is een dradennet aangebracht dat te gelijk met het interferentiebeeld wordt gephotographeerd.

De stand der interferentiestrepen wordt t.o.v. dit dradennet bepaald. Vlak achter het dradenkruis wordt de photographische plaat op een, geheel onafhankelijk van den kijker met het dradennet opgestelden, plaathouder gebracht. Zonder den kijker aan te raken kan de photographische plaat op de gewenschte plaats worden gebracht en verschoven worden om de opeenvolgende foto's op te nemen.

De kijker, de plaathouder, de interferometer en het glazen rechthoekig prisma, waarin de interfereerende bundels worden teruggekaatst staan op afzonderlijke hardsteenen zuilen, die opgemetseld zijn op den grooten peiler. Dit laatstgenoemde prisma, dat ook bij de vroegere proeven dienst deed, is rechts op de plaat zichtbaar.

7. *Meting van den tijd, dien de afsluiter geopend is.* Deze tijd van de orde van 1 à 2 honderdsten van een seconde, is afhankelijk van den stroom in de draadklossen van de keten van den onderbreker, en kan daardoor en door het veranderen van de grootte van de opening in het bewegend schermpje van den onderbreker geregeld worden. Voor de tijdsbepaling wordt de onderbreker voor

[1]) Zie ZEEMAN deze Verslagen **24**, 20. 1915.

de lens van een camera geplaatst, waarmede een klein lampje wordt gephotographeerd, dat met een bekende snelheid op een schijf ronddraait. Gedurende den tijd, dat de onderbreker geopend is, beschrijft het lampje een deel van een cirkelboog, waarvan de grootte gemeten wordt.

8. *Contrôle en afregeling van het toestel.* Nadat de interferentiestrepen zoo duidelijk mogelijk zijn gemaakt, terwijl de bundels alleen door de lucht loopen, wordt in den eenen bundel een compensator geplaatst, bestaande uit een door HILGER vervaardigde planparallelle glasplaat van 7 m.m. dikte en 25 m.m. middellijn. Deze compensator is om een verticale en een horizontale as draaibaar en veroorlooft de helling en den afstand der interferentiestrepen op eenvoudige wijze te veranderen. In vele gevallen was de inschakeling van den compensator overbodig, doordat de gewenschte interferentiestrepen reeds met den interferometer alleen werden verkregen. Vervolgens wordt de kolom kwarts of glas in den eenen lichtbundel gebracht, waarbij voorzorgen worden genomen die in mededeeling II zijn genoemd. Het komt er nu op aan om te zien of het apparaat en wel in het bijzonder de geleidingen, aan de hooge eischen voldoen, waarop de bruikbaarheid van het geheel berust.

Bij een langzame beweging van de sleden met de kwartskolom langs de geleidingen, bleven de interferentiestrepen niet stilstaan, maar veranderden in afstand en helling. Toen de toestel voor het eerst in elkaar stond was deze beweging der strepen zeer groot. Het is duidelijk dat ze ook bij een volkomen homogene door evenwijdige vlakken begrensde kolom moet optreden, indien de beweging niet langs een volkomen rechte lijn geschiedt. Immers de geheele kolom van meer dan 100 cM. lengte werkt dan als een compensator van buitengewone dikte. Ten einde de omstandigheden zoo gunstig mogelijk te maken werden de stalen platen der geleidingen op de steunplaten gelegd ongeveer in den juisten stand. De bouten, die voor het vasthouden dienen werden dan aangedraaid, totdat een gevoelig niveau dat in langs- en dwars-richting kon worden geplaatst, één, zooveel mogelijk horizontaal, vlak aangaf bepaald door de bovenvlakken der stalen geleidingen. Dan werd nagegaan of de binnenranden der geleidingen zoo volkomen mogelijk recht en evenwijdig waren, en door navijlen en slijpen het gebrek verbeterd. Ten slotte werd de speling der bronzen sleden bij de beweging langs de geleidingen zooveel mogelijk weggenomen. Veel werd successivelijk in de genoemde richtingen aan den toestel verbeterd, zoodat draaiing en afstandsverandering der interferentiestrepen vrij gering

werden. Een werkelijk stilstaan der interferentiestrepen bij het langzaam bewegen van het apparaat kon echter niet bereikt worden. Dat is echter ook niet noodig, waar het ten slotte op aankomt is, dat dezelfde standen der interferentiestrepen terugkomen als de sleden op dezelfde plaats van de geleidingen zijn. De uitkomsten bewijzen dat zulks inderdaad het geval is, en dat de eventueele afwijkingen nu eens in den eenen, dan eens in den anderen zin vallen.

Reeds de scherpte der interferentiestrepen, opgenomen met het snel bewegend apparaat, bewijst, dat telkens weer ongeveer dezelfde stand der strepen wordt verkregen, omdat immers 20 of 30 opnamen over elkaar vallen (zie boven § 4) wat nooit een scherp beeld zou geven, als de enkele lichtindrukken niet bijna identiek waren. Soms bleek het strepensysteem gedraaid en dan moest de opname verworpen worden. Natuurlijk moest ook voor het goed invetten van de geleidingen worden gezorgd en dan is er nog eene *dynamische bijzonderheid,* waarop gelet dient te worden. Is de motor de eerste maal aangezet dan heeft de bewegingstoestel bijna nooit de maximumsnelheid, die met omstreeks 184 omwentelingen van het vliegwiel per minuut overeenstemt. Men krijgt den indruk dat er een weerstand op den toestel werkt, er worden bijv. slechts 140 omwentelingen gemaakt. Het aanzetten wordt dan eenige malen herhaald en bij de derde of vierde keer loopt de machine plotseling snel, zonder stooten en zeer regelmatig. Men is dan ook eenigszins gerustgesteld over de vervaarlijk snelle beweging van het groote apparaat zoo nabij de fijne optische deelen van den interferometer, en de eigenlijke proef kan beginnen. [1])

[1]) Geheel zonder gevaar is de proef niet. Toen begonnen zou worden met de proeven met glas waren 4 prachtig afgewerkte glazen cylinders van 20 c.M. lengte en 2,5 c.M. dikte in de houten slede aangebracht en optisch ingesteld. Bij de allereerste proef met deze glaskolom raakte een der glascylinders, die blijkbaar onvoldoende bevestigd was, los, terwijl het apparaat de volle snelheid bezat, verbrijzelde al de andere stukken en sloeg de koperen eindstukken van de slede af. De glascylinders waren geheel verbrijzeld, het werk van maanden vernietigd. Door een wonder bleven de interferometer en het glazen rechthoekig prisma ongedeerd.

Natuurkunde. — De Heer ZEEMAN biedt, mede namens Mej. DR. A. SNETHLAGE een mededeeling aan: *„De voortplanting van het licht in bewegende, doorschijnende, vaste stoffen. II. Metingen over het Fizeau-effect in kwarts"*.

1. In mededeeling I is de toestel beschreven, die voor het onderzoek van het Fizeau-effect in vaste stoffen geschikt is gebleken.

Wij hebben nu proeven met kwarts genomen, dat in de richting van de optische as door de lichtbundels werd doorloopen. Tot de keuze van deze stof werden wij geleid door de overweging dat in het algemeen kristallen de meest homogene lichamen zijn, die wij kennen en de verstrooiïng van licht in een kristal uiterst gering moet zijn wegens de regelmatige structuur van het kristal. [1])

Zooals ons echter later is gebleken is het beste optische glas voor ons doel in sommige opzichten gelijk te stellen met, in andere opzichten te verkiezen boven kwarts.

Bij eenige reeksen van proeven werden gebruikt 10 kwarts staafjes geleverd door de firma STEEG en REUTER met eindvlakken loodrecht op de optische as en van de afmetingen $10 \times 1{,}5 \times 1{,}5$ cM. Later werden nog daaraan toegevoegd 4 dergelijke staafjes door de firma A. HILGER, Ltd. geleverd. De staafjes werden voor een reeks van proeven vereenigd tot een kolom van 100 cM. lengte, in een tweede reeks tot een kolom van 140 cM. Zij werden achter elkaar geplaatst in een gleuf, die gefreesd was in een houten balk die aan het bewegingsapparaat met 4 zware schroeven was vastgemaakt. De verschillende staafjes zijn van elkaar gescheiden door een gummischijfje met een ronde opening van omstreeks 13 mM. middellijn. Ieder kwartsstaafje rust in de gleuf van 15 mM. diepte en wordt van boven gedrukt door 2 koperen plaatjes, die met schroeven in het bovenvlak van de houten balk zijn bevestigd, terwijl onder de plaatjes een stuk kurkblad is aangebracht. De aan de einden van de gleuf overblijvende ruimte wordt door een stuk koperen buis aangevuld. Stevige koperen platen die de balk omvatten sluiten aan de einden de gleuf af.

2. Bij het inbrengen van de kwartsstaafjes in de gleuf werd op de volgende wijze te werk gegaan. Nadat de interferentie-strepen op groote duidelijkheid waren ingesteld, en de balk op den toestel

[1]) LORENTZ. Théories statistiques en thermodynamique, p. 42.

was geplaatst, werd één kwartsstaafje in de gleuf gebracht en werden zoo noodig opnieuw de interferentie-strepen duidelijk gemaakt. Onderzocht werd vervolgens welke der vier standen, verkregen door om de lengte-as de staafjes te draaien, strepen geeft, die het minst veranderen, wanneer de machine in verschillende posities wordt gebracht. Vervolgens wordt het tweede staafje achter het eerste geplaatst, eveneens in vier standen enz. tot alle staafjes geplaatst zijn. Om geen gereflecteerd licht in den interferometer te krijgen wordt elk der staafjes iets hellend gesteld door onder een van de einden een stukje dun carton te leggen. Achtereenvolgens wordt weer voor 1, 2, 3, enz. staafjes geprobeerd of de juiste stand verkregen is.

Wij merken hierbij nog op dat de glascylinders, waarmede wij proeven hebben genomen (zie de volgende mededeeling), door de firma ZEISS zoo uitstekend zijn vervaardigd, dat bij draaiing om de lengteas in een cylindrische gleuf geen merkbare verandering, der interferentiestreepen optreedt. De optische controle wordt daardoor heel wat eenvoudiger dan bij kwarts. De ten slotte door de kwartskolom heen gephotographeerde interferentiestrepen zijn duidelijk minder mooi dan de interferentiestrepen die worden waargenomen als de kolom verwijderd is. De strepen zijn iets waziger geworden. Dit is niet het geval als de glascylinders van ZEISS zijn ingeschakeld. De diameter daarvan bedroeg 25 mM., bij een lengte van 20 cm. Daar er 6 glascylinders werden gebruikt, had men dus bij eene totale lengte glas van 120 cM., 12 reflecteerende vlakken. Bij de proeven met de kwartskolom van 140 cM. lengte, bedraagt het aantal reflecteerende vlakken 28. Hoewel dit groote aantal reflecteerende vlakken ongunstig moet werken op de duidelijkheid van het strepensysteem, zoo was er toch geen twijfel mogelijk dat het niet aan deze oorzaak was toe te schrijven dat de kwartskolom een ongunstiger invloed had dan de glaskolom. Wij hadden nog de reflecties op de tusschenvlakken kunnen wegnemen door een vloeistof van den gemiddelden brekingsindex van kwarts tusschen de opvolgende staafjes te brengen. De complicatie van den toestel, die dit met zich zou brengen en de ongunstige ervaring, die wij met bewegende vloeistoffen opdeden, liet ons besluiten de terugkaatsingen op den koop toe te nemen.

3. Als lichtbron werd een booglamp van 12 Ampère gebruikt, waarvan het licht door filters bij benadering homogeen werd gemaakt.

Proeven werden genomen met 3 verschillende kleuren, waarvan de effectieve golflengten bedroegen 6510, 5380, 4750 Å. E.

4. Wanneer wit licht door den toestel valt onderscheidt men gemakkelijk den centralen band. Het centrum van den centralen band is

het punt waarvan men de verplaatsing in een experiment met wit licht zou wenschen te meten. Ook bij invallend monochromatisch licht kan men van het centrum van den centralen band spreken. Het is het punt dat op zijn plaats blijft bij draaiing en bij nauwer en wijder worden van de interferentiestrepen, door alle oorzaken die niet van het FIZEAU-effect afhangen. De plaats van het centrum kan met behulp van den horizontalen en den beweegbaren verticalen kruisdraad in den kijker, worden bepaald, door intusschen met den compensator de interferentiestrepen eenige wijziging te laten ondergaan waardoor het centrum van zelf in het oog valt.

Is het centrum bepaald, dan wordt de beweegbare verticale draad een bepaald aantal strepen verschoven opdat op de foto deze draad niet storend zal kunnen zijn bij het uitmeten.

Op één photographisch plaatje worden nu een reeks opnamen gemaakt waarbij de bewegingsrichtingen van de kolom elkaar afwisselen.

Het waargenomen effect wordt uit de verplaatsing van het centrum afgeleid. Plaatjes, waarbij eene aanmerkelijke draaiing van de interferentiestrepen is opgetreden, werden verworpen.

5. De volgende kleine tabel kan als voorbeeld dienen van de uitkomsten verkregen door uitmeting van een plaatje opgenomen met:

Groen licht $\lambda = 5380$ Å. E.

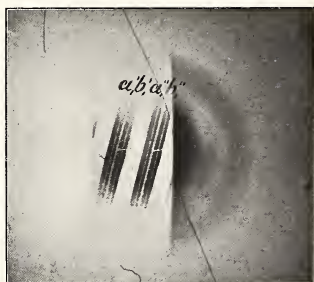
Nummer van het plaatje	Maximum snelheid in cM.	Lengte kolom kwarts in cM.	Waargenomen effect	Effect gered. op 1 M. kwarts en max. snelheid 10 M.	Middelwaarde voor het plaatje
48	750	100	92	123	
			137	183	
			118	157	152
			99	132	
			125	167	

De effecten zijn opgegeven in duizendsten van den streepafstand.

In het geheel werden voor groen licht, $\lambda = 5380$ Å. E., de waarnemingen van 11 plaatjes voor de berekening gebruikt. Te zamen worden daardoor 51 waarden voor het waargenomen effect gevonden, daar niet op alle plaatjes evenveel opnamen zijn genomen als op N°. 48. De gebezigde snelheden lagen tusschen 750 en 950 c.M., de lengte der kwartskolom was voor 9 plaatjes 100 en voor twee 140 c.M. De verkregen waarden kunnen nu op

P. ZEEMAN en A. SNETHLAGE: „De voortplanting van het licht in bewegende, doorschijnende, vaste stoffen. II. Metingen over het Fizeau-effect in kwarts".





Verslagen der Afdeeling Natuurkunde Dl. XXVIII. A^0. 1919/20.

tweeërlei wijzen worden gebruikt om er een einduitkomst uit af te leiden. Men kan voor elk plaatje een middelwaarde afleiden en van de 11 aldus verkregen waarden het rekenkundig gemiddelde nemen. Men verkrijgt op deze wijze als einduitkomst van het op een snelheid van 1000 c.M. en een kwartslengte van 100 c.M. gereduceerde effect

$$0{,}146 \pm 0{,}012,$$

waarbij achter het ± teeken de middelbare fout is opgegeven.

Een tweede wijze waarop men de getallen kan combineeren is door het rekenkundig gemiddelde der 51 waarden te nemen. Aldus vindt men

$$0{,}148 \pm 0{,}006.$$

Uit de formule (4), die in onze mededeeling I werd opgenomen en zoo aanstonds wordt bewezen volgt voor de theoretische waarde van het effect

$$0{,}143.$$

6. Met rood licht $\lambda = 6510$ Å. E. zijn op 6 plaatjes 27 waarden voor het effect verkregen. Bij 8 daarvan behoort een kwartskolom van 140 c.M., bij 19 een van 100 c.M. De snelheden liggen tusschen 750 en 960 c.M.

De uitkomst is bij het combineeren van de middelwaarden der verschillende plaatjes:

$$0{,}123 \pm 0.014.$$

Het rekenkundig gemiddelde der 27 afzonderlijke waarden levert:

$$0{,}125 \pm 0.007.$$

De berekening levert voor het te verwachten effect

$$0.115$$

7. De uitkomsten met violet licht $\lambda = 4750$ Å. E. moeten met eenige reserve worden aangenomen, daar het achteraf bleek dat het violette filter eenig rood licht doorliet, waarvan vroeger niets gemerkt was. Het is dus niet geheel onmogelijk dat in de latere reeksen daardoor een fout is ingeslopen. Intusschen valt in de waarden der latere reeksen niets van een verandering te constateeren.

De uitkomst bij combinatie van de 8 middelwaarden der verschillende plaatjes wordt:

$$0{,}156 \pm 0.008$$

Zeer weinig daarvan verschillend wordt het rekenkundig gemiddelde der 31 afzonderlijke waarden

$0{,}156 \pm 0.007$

De theoretische waarde is 0.166.

8. Wij stellen in een kleine tabel de uitkomsten samen.

λ	Δ_w	Δ_{th}
4750	0.156 ± 0.007	0.166
	0.156 ± 0.008	
5380	0.148 ± 0.006	0.143
	0.148 ± 0.012	
6510	0.125 ± 0.007	0.115
	0.123 ± 0.014	

De waargenomen strepenverschuiving is onder Δ_w aangegeven. De middelbare fout is op twee wijzen berekend, zooals boven werd meegedeeld. In de tweede plaats is telkens de waarde opgenomen, die uit de combinatie der afzonderlijke middelwaarden der plaatjes volgt.

Onder Δ_{th} is de theoretische waarde gegeven, berekend met behulp van de gegevens over den brekingsindex van den gewonen straal van kwarts, ontleend aan KOHLRAUSCH's opgaven.

Het is niet te ontkennen dat, de bijzondere moeilijkheden van de proeven in aanmerking genomen, de overeenstemming tusschen theorie en waarneming zeer bevredigend is.

Zoowel de verandering van het effect met de golflengte, als de absolute grootte ervan worden goed weergegeven. Bij bespreking van de proeven met glas, waarbij de dispersie grooter is dan bij kwarts, zal nog op den duidelijken invloed van den dispersieterm kunnen worden gewezen.

9. *De formule voor het optisch effect.* We beschouwen twee der stralen, die het interferentieverschijnsel teweeg brengen, en die tegengestelde wegen doorloopen hebben. Grootheden die op den eenen straal betrekking hebben zullen we met één accent voorzien, en die bij den tweeden straal behooren met een dubbel accent. Schematisch voorgesteld, bestaat ieder der doorloopen wegen uit drie stukken: 1°. een weg 1 in de lucht, 2°. een weg **2** in de kwartskolom, **3°**. een weg **3** in de lucht.

We noemen de tijden, in seconden uitgedrukt, die het licht noodig heeft om ieder dezer stukken te doorloopen respectievelijk t'_1, t'_2, t'_3, t''_1, enz.

Als het kwarts stilstaat is natuurlijk $t'_1 = t''_1$, enz. Beweegt echter het kwarts met de snelheid w dan is de tijd noodig om de kwartskolom (lengte l) te doorloopen in de richting van 1 naar 3:

$$t'_2 = \frac{l}{\frac{c}{\mu'} + \left(1 - \frac{1}{\mu'^2}\right) w - w} = \frac{l}{\frac{c}{\mu'} - \frac{w}{\mu'^2}} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

waarbij natuurlijk het verschil der snelheid van het licht in kwarts en van die van de kolom moet worden in rekening gebracht. Terwijl het licht door het kwarts heen loopt, schuift het kwarts verder en wordt dus t_2 veranderd met een bedrag

$$-\frac{lw}{\frac{c}{\mu'} - \frac{w}{\mu'^2}} \cdot \frac{1}{c} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Voor den straal in tegengestelde richting krijgen we

$$t''_2 = \frac{l}{\frac{c}{\mu''} - \frac{w}{\mu''^2}} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

en voor de andere grootheid

$$+\frac{lw}{\frac{c}{\mu''} + \frac{w}{\mu''^2}} \cdot \frac{1}{c} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Voor den eersten straal wordt dus het geheele tijdsverschil

$$\frac{l}{\frac{c}{\mu'} - \frac{w}{\mu'^2}} - \frac{lw}{\frac{c}{\mu'} - \frac{w}{\mu'^2}} \cdot \frac{1}{c}$$

Of in trillingstijden uitgedrukt

$$\frac{l}{\lambda}\left(\mu' + \frac{w}{c} - \frac{w}{c}\mu'\right) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

voor den eenen straal, en

$$\frac{l}{\lambda}\left(\mu'' - \frac{w}{c} + \frac{w}{c}\mu''\right) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

voor den anderen.

Overweegt men nu dat

$$\mu' = \mu + \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{w}{c} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

en

$$\mu'' = \mu - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{w}{c} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

dan vindt men na substitutie daarvan in de formules (5) en (6) en na aftrekking voor het geheele phaseverschil der twee stralen

$$\Delta = \frac{2\,lw}{c\lambda}\left(-\lambda \frac{d\mu}{d\lambda} - 1 + \mu\right)$$

of bij omkeering van de bewegingsrichting een optisch effect

$$\Delta = \frac{4lw}{c\lambda}\left(\mu - 1 - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Bij de formules (7) en (8) verdient het nog opmerking dat daarin $\frac{w}{c}$ voorkomt, omdat het licht van uit de lucht direct in het kwarts overgaat. Bij de proef van FIZEAU met water gaat het licht uit stilstaand *water*, naar bewegend *water*, en moet in de formules $\frac{w}{c/\mu}$ in plaats van $\frac{w}{c}$ staan.

10. *Afleiding der formule* (9) *uit de relativiteitstheorie.*

Nadat wij bovenstaande formule (9) aan Prof. LORENTZ hadden meegedeeld heeft deze de vriendelijkheid gehad ons eene strenge afleiding uit de relativiteitstheorie te geven, welke wij hier laten volgen.

Zij x', t' een coördinatenstelsel waarin de staaf AB rust; lengte der staaf l'.

Lichtbeweging links van A

$$\alpha_1 \cos n'\left(t' - \frac{x'}{c} + p'_1\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

In de staaf

$$\alpha_2 \cos n'\left(t' - \frac{x'}{v'} + p'_2\right)$$

Rechts van B

$$\alpha_3 \cos n'\left(t' - \frac{x'}{c} + p'_3\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

v' voortplantingssnelheid, behoorende bij n'

Men vindt gemakkelijk

$$n'(p'_3 - p'_1) = n' l' \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{v'}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Door de relativiteitstransformatie

$$x' = ax - bct \quad , \quad t' = at - \frac{b}{c}x \qquad a^2 - b^2 = 1 \quad . \; . \quad (4)$$

en

$$x = ax' + bct' \quad , \quad t = at' + \frac{b}{c}x'$$

kan men tot een stelsel overgaan, waarin de staaf zich beweegt, en wel met de snelheid

$$w = \frac{bc}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Uit (1) en (2) ontstaan

$$a_1 \cos\left[n\left(t-\frac{x}{c}\right)+n'p'_1\right] \text{ en } a_3 \cos\left[n\left(t-\frac{x}{c}\right)+n'p'_3\right] \quad . \quad (6)$$

$$n=(a+b)\,n' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Het phaseverschil tusschen (1) en (2), d. w. z. de phaseverandering die de aanwezigheid der staaf teweegbrengt, wordt door (3) in boekmaat gegeven, en ditzelfde phaseverschil bestaat ook nog tusschen de uitdrukkingen (6).

In golflengten of perioden uitgedrukt, is het

$$\Delta=\frac{n'l'}{2\pi}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{v'}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Wij moeten hier nu echter n' en v' uitdrukken in n en de daarbij behoorende v. Uit (4) en (5), als wij termen van de tweede orde verwaarloozen, volgt

$$a=1 \ , \ b=\frac{w}{c} \, ,$$

dus volgens (7)

$$n=\left(1+\frac{w}{c}\right)n' \ , \ n'=\left(1-\frac{w}{c}\right)n$$

$$v'=v+(n'-n)\frac{dv}{dn}=v-\frac{w}{c}n\frac{dv}{dn}$$

$$l'=l$$

Na substitutie in (8) vindt men voor het deel van Δ, dat van w afhangt,

$$\frac{nl}{2\pi}\cdot\frac{w}{c}\left\{\frac{1}{v}-\frac{1}{c}-\frac{n}{v^2}\frac{dv}{dn}\right\},$$

of, na invoering van $n=\dfrac{2\pi c}{\lambda}, v=\dfrac{c}{\mu}$

$$\frac{l}{\lambda c}\left(\mu-1-\lambda\frac{d\mu}{d\lambda}\right)w$$

met behulp waarvan dadelijk (9) van § 9 volgt.

(*Wordt vervolgd*).

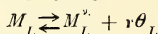
Scheikunde. De Heer P. ZEEMAN biedt namens den Heer A. SMITS een mededeeling aan over: „*Metalen en Niet-metalen*".

(Mede aangeboden door den Heer S. HOOGEWERFF).

Inleiding.

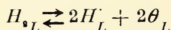
In een paar vroegere mededeelingen besprak [1]) ik reeds de onaantastbare electroden en hun bruikbaarheid als gas-electroden. In het bijzonder werd echter alleen gesproken over de waterstof-electrode. Er werd op gewezen, dat de onaantastbare electroden tot de allertraagste metalen behooren, daar zij zóó traag zijn, dat zij zelfs in contact met een electrolyt zich niet in innerlijk evenwicht stellen, zoodat zij bijna altijd in verstoorden toestand verkeeren, en de potentiaal van het werkelijk unaire metaal ons zelfs niet bekend is.

Wordt zoo'n metaal in de waterige oplossing van een zuur gedompeld, terwijl waterstof wordt doorgeleid, dan wordt de electronen-concentratie van het metaalevenwicht in den electrolyt, dat wij voorstellen door de vergelijking:



$$M_L \rightleftarrows M_L^{\nu\cdot} + \nu\theta_L$$

gelijk aan de electronen-concentratie van het waterstof-evenwicht:



$$H_{2L} \rightleftarrows 2H_L^{\cdot} + 2\theta_L$$

overeenkomstig den druk van de doorgevoerde waterstof, hetgeen zeggen wil, dat de waterstof-phase en de waterstofhoudende metaalphase den zelfden potentiaal bezitten, daar de electromotorische kracht van den keten metaal-electrolyt-waterstof gegeven wordt door de vergelijking:

$$E = -\frac{RT}{F} \ln \frac{(\theta_L)_M}{(\theta_L)_{H_2}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

De waterstof-electrode geeft dus de potentiaal aan, die behoort bij het driephasen-evenwicht metaalphase + waterstofphase + electrolyt, overeenkomstig den heerschenden druk, temperatuur en totaal-ionen-concentratie $(H^{\cdot}) + (M^{\nu\cdot})$. Daar nu echter, zooals reeds bij de bespreking der E,X-fig. werd opgemerkt, genoemde electrolyt een geheel verwaarloosbare concentratie aan ionen van de zoogenaamde onaantastbare electrode bevat, kunnen wij de woorden „totale-ionen-concentratie vervangen door waterstof-ionen-concentratie."

[1]) Kon. Akad. v. Wet. **26**, blz. 1398 (1918).
„ „ „ „ **27**, blz. 152 (1918).

Beschouwen wij nu het geval, dat een onaantastbare electrode geplaatst wordt in een electrolyt, terwijl chloor wordt doorgeleid, dan krijgt men in zoo verre weer hetzelfde, dat de electronen-concentratie van het metaal-evenwicht in den electrolyt zich geheel regelt naar de electronen-concentratie van het chloor-evenwicht:

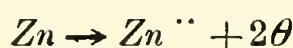


$$Cl_2 + 2\theta \rightleftarrows 2Cl' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

overeenkomstig den druk van het doorstrijkende chloor, waaruit volgt, dat de chloorgas-phase en de chloorhoudende metaal-phase den zelfden potentiaal t. o. v. den electrolyt zullen bezitten. Onze nieuwe beschouwingen omtrent de electromotorische evenwichten voeren tot de aanname van een electro-ionisatie-evenwicht in chloorgas, al is dan ook de concentratie aan ionen en electronen in deze gasphase uiterst gering. Dat er zoo'n electro-ionisatie bij chloor bestaat bewijst het uiterst kleine electrisch geleïdingsvermogen. Nu kunnen wij echter niet volstaan met het hier boven aangeduide evenwicht (2), want in electrisch neutraal-chloor kan dit evenwicht niet *alleen* voorkomen, daar hier slechts sprake is van negatief electrisch geladen deeltjes. Buitendien zou de chloor-electrode t. o. v. den electrolyt geen positieve lading kunnen aannemen.

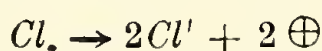
Ongetwijfeld is deze moeilijkheid ook bij de vroegere opvatting omtrent het electromotorische evenwicht gevoeld. De negatieve lading, die het zink bij dompeling in een electrolyt vertoont, verklaarde men als volgt: Het zink streeft er naar als zinkion in oplossing te gaan en men heeft zich blijkbaar steeds voorgesteld, dat dit geschiedde door een *gelijktijdige* splitsing van het zinkatoom in zinkion + electronen, waarbij echter de zinkionen alleen in oplossing gingen en de negatief geladen electronen op het metaal terug bleven.

Wil men nu op analoge wijze de positieve lading, die de chloor-electrode t. o. v. een electrolyt aanneemt, verklaren, dan geraakt men in groote moeilijkheden, die er toe hebben geleid, dat sommigen hebben aangenomen, dat er behalve de vrije negatief geladen electronen ook nog vrije positief geladen electronen bestaan, en deze konden dan als redders in den nood bij de chloor-electrode, en bij de andere niet-metaal-electroden gewichtige diensten verrichten. Want zooals men bij het in oplossing gaan van zink de splitsing



$$Zn \rightarrow Zn^{\cdot\cdot} + 2\theta$$

aannam, liet men bij het in oplossing gaan van chloor aan de chloor-electrode het proces



$$Cl_2 \rightarrow 2Cl' + 2\oplus$$

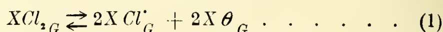
verloopen. De gevormde Chloor-ionen gaan in oplossing en de positieve electronen zouden in de chloor-electrode terug blijven.

Aan deze oplossing moet echter alle beteekenis worden ontzegd, omdat tot heden vrije positieve ionen nog nooit zijn aangetroffen en alles er op wijst, dat er slechts één soort van electronen bestaat n.l. de negatieve.

De moeilijkheid stond dus, ondanks een wanhopige poging, nog zéér belemmerend in den weg.

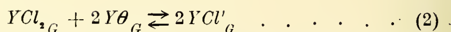
De chloor-electrode.

Bij overweging van de zooeven besproken moeilijkheid ben ik tot de conclusie gekomen, dat men noodzakelijkerwijs moet aannemen, dat het chloor-atoom het vermogen bezit electronen af te splitsen en op te nemen, en dat beide processen naast elkaar verloopen, hetgeen wij door de volgende vergelijkingen kunnen voorstellen. [1]



$$XCl_{2\,G} \rightleftarrows 2X\,Cl^{\cdot}_{G} + 2X\,\theta_{G} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en



$$YCl_{2\,G} + 2Y\theta_{G} \rightleftarrows 2YCl'_{G} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waarin X en Y de fracties van het oorspronkelijk aantal mol. Cl_2 aangeven, die een positieve resp. negatieve ionisatie hebben ondergaan.

Daar nu de electronen, die volgens verg. (2) worden opgenomen afkomstig zijn van de electron-ionisatie (1) is het duidelijk, dat

$$Y \leqq X.$$

In het limiet-geval $Y = X$ zou het chloor een gelijk aantal positieve en negatieve ionen bevatten, en in het geheel geen electronen. Daar wij hier te doen hebben met een niet-metaal zullen X en Y uiterst klein zijn.

Het is nu de vraag, hoe men het tot stand komen van de positieve lading der chloor-electrode moet verklaren. Het is duidelijk, dat wij daartoe moeten aannemen, dat bij het niet-metaal, chloor, het de negatieve-ionen zijn, die practisch uitsluitend in oplossing gaan, en dus een zéér veel grootere oplosbaarheid bezitten dan de positieve.

Metalen en Niet-metalen.

Deze beschouwingen omtrent het niet-metaal, chloor, die noodzakelijkerwijs voortvloeien uit de consequente toepassing van de beginselen van de theorie der allotropie op de electromotorische evenwichten voeren ons tot een gezichtspunt, waarvan uit wij de metalen en niet-metalen op zéér bevredigende wijze kunnen overzien.

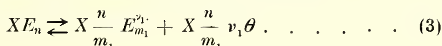
Het is toch duidelijk dat, daar de metallische en niet-metallische

[1]) Wij nemen hier eenvoudigheidshalve aan, dat de positieve ionen ook eenwaardig zijn.

eigenschappen in het periodiek systeem der elementen geleidelijk in elkaar overgaan, de theorie zal moeten doen inzien, dat er tusschen den metallischen en den niet-metallischen toestand slechts quantitatieve verschillen bestaan, en dat er dus allerlei tusschen-toestanden mogelijk zijn.

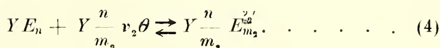
Aan dezen eisch is inderdaad te voldoen door een alleszins plausibele uitbreiding.

Wij moeten daartoe aannemen, dat de atomen van alle elementen, dus metalen zoowel als niet-metalen, electronen kunnen afsplitsen en opnemen, zoodat naast elkaar verloopen de reacties:



$$XE_n \rightleftarrows X\frac{n}{m_1} E_{m_1}^{\nu_1\cdot} + X\frac{n}{m_1} \nu_1\theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

en



$$YE_n + Y\frac{n}{m_2} \nu_2\theta \rightleftarrows Y\frac{n}{m_2} E_{m_2}^{\nu_2'} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

waarin E_n het molecuul van een element, en

$E_{m_1}^{\nu_1\cdot}$ en $E_{m_2}^{\nu_2'}$ de ionen beteekenen.

Bij metalen is zooals bekend m_1 meestal $= 1$ en zal vermoedelijk m_2 ook wel in den regel $= 1$ zijn. Bij niet-metalen is m dikwijls $= 1$, maar daarnaast ook meerdere malen grooter dan 1 gevonden. Van den factor m_1 zal hier dan ook wel hetzelfde verwacht kunnen worden.

Met volkomen zekerheid is echter alleen dit te zeggen, dat

$$Y\frac{n}{m_2}\nu_2 \leqq X\frac{n}{m_1}\nu_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

waaruit volgt, dat wanneer

$$\nu_1 = \nu_2$$

en

$$\nu_1 = \nu_2$$

het aantal positieve ionen grooter zal zijn dan het aantal negatieve.

Wanneer men nu de vraag stelt, in welke opzichten metalen en niet-metalen zullen verschillen, dan is het antwoord het volgende:

In de eerste plaats is de factor X voor metalen betrekkelijk groot en voor niet-metalen uiterst klein, zoodat voor niet-metalen ook de factor Y uiterst klein is.

Dit is in overeenstemming o.a. met het groote electrisch-geleidingsvermogen van metalen en het uiterst kleine van niet-metalen.

In de tweede plaats bezitten bij de metalen de positieve en bij de niet-metalen de negatieve ionen de grootste oplosbaarheid. Dit verklaart o.a. het verschil in electromotorisch gedrag tusschen metalen en niet-metalen. Hierbij moet dan nog worden opgemerkt, dat het

verschil in oplosbaarheid tusschen de positieve- en negatieve-ionen, bij de elementen met uitsluitend metallische resp. uitsluitend niet-metallische eigenschappen, zóó groot is, dat men in de koëxisteerende oplossing slechts met de positieve resp. negatieve-ionen behoeft rekening te houden.

Bij de tusschen liggende, twee-slachtige-elementen, zooals Jodium, Zwavel, Seleen, Telluur, Arseen en Antimoon moet echter ter verkrijging van een dieper inzicht wel degelijk met het bestaan van positieve en negatieve-ionen, ook in oplossing, rekening worden gehouden, en zoo ligt hier nog een omvangrijk terrein, ter nadere studie aan de hand der nieuwere beschouwingen omtrent de electromotorische evenwichten.

Polarisatie bij niet-metalen.

Geven wij het niet-metaal aan met N, dan kunnen wij de vorming van negatieve-ionen voorstellen door de verg.



$$N_n + n\nu\theta \rightleftarrows nN^{\nu'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Passen wij nu de bekende thermodynamische afleiding voor den potentiaalsprong toe, dan krijgen wij:

$$\Delta = \frac{RT}{\nu F} \ln \frac{K'_{N^{\nu'}} N_P^{\nu'}}{(N_L^{\nu'})} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

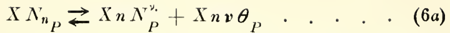
waarin $(N_P^{\nu'})$ voorstelt de concentratie van de negatieve-ionen in de phase, waaruit de electrode bestaat, dit kan dus zoowel een gas, een vloeistof of een vaste phase zijn. Gaan wij uit van de electronen formule

$$\Delta = \frac{RT}{F} \ln \frac{K'_\theta (\theta_P)}{(\theta_L)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

die algemeen is, omdat het elektron het gemeenschappelijk bestanddeel van alle materie is, dan kunnen wij voor (θ_L) de waarde substitueeren, die uit (6) volgt voor de vloeistofphase, bij toepassing van de wet van de chemische massawerking, waarbij men komt tot de reeds bekende vergelijking:

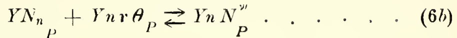
$$\Delta = \frac{RT}{n\nu F} \ln \frac{K'(N_{n_L})}{(N_L^{\nu'})^n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Om nu het polarisatie-verschijnsel na te gaan kunnen wij ons niet bedienen van verg. (9) maar wel van de nieuwere verg. (7). Voor het goede begrip is het nu gewenscht, dat wij de evenwichten in de electrode volledig aangeven; wij moeten dus ook nog de afsplitsing van electronen weergeven en schrijven derhalve:



$$XN_{n_P} \rightleftarrows XnN_P^{\nu\cdot} + Xn\nu\theta_P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6a)$$

en

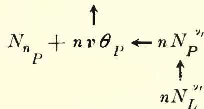


$$YN_{n_P} + Yn\nu\theta_P \rightleftarrows YnN_P^{\nu\prime} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6b)$$

Maken wij nu de niet-metaal-electrode N tot anode, dan onttrekken wij de electronen. Hadden wij met een metaal te doen, en was dus N een metaal, dan zou de electrode haar potentiaal kunnen handhaven, doordat de onttrokken electronen door de reactie (6a) tijdig worden nageleverd, terwijl de daarbij gevormde positieve-ionen in oplossing gaan. Nu N echter een niet metaal is en de positieve-ionen $N^{\nu\cdot}$ practisch niet in oplossing gaan, zal de reactie (6a) ook niet noemenswaard kunnen plaats vinden,

De eenige manier waarop het niet-metaal N zijn potentiaal in het hier onderstelde geval kan handhaven is dan ook deze, dat uit den electrolyt negatieve-ionen $N^{\nu\prime}$ op de electrode neerslaan en daar, door afsplitsing van electronen, het tekort aan electronen weder aanvullen.

De plaatsgrijpende processen zijn dus voor te stellen als volgt:



Daar nu het heterogene evenwicht in de grenslaag tusschen de negatieve-ionen in de electrode en in den electrolyt zich met zéér groote snelheid moet instellen is het duidelijk, dat het van de snelheid der electronen-afsplitsing van de negatieve-ionen zal afhangen, of de electrode haar potentiaal handhaaft of niet. Boven een bepaalde stroomdichtheid d. w. z. boven een bepaalde snelheid van electronen-onttrekking zal dit niet meer het geval zijn, en een gevolg hiervan zal wezen, dat de electrode te weinig electronen en te veel negatieve-ionen zal bevatten.

Uit verg. (7) volgt voor dit geval, dat de potentiaalsprong sterker positief worden zal.

Dit polarisatieverschijnsel noemt men bij gassen „*overspanning*", doch is niet essentieel verschillend van het verschijnsel van anodische polarisatie bij metalen.

Het is duidelijk, dat, wanneer wij thans overgaan tot de kathodische polarisatie bij niet-metalen dit verschijnsel daaraan moet worden toegeschreven, dat de toegevoegde electronen niet snel genoeg door de ongeladen moleculen of atomen worden opgenomen, zoodat de electronen een te hooge concentratie aan electronen en een te geringe

aan negatieve-ionen bezit. Volgens onze verg. (7) geeft dit aanleiding tot een minder positieve waarde van den potentiaalsprong.

Daar wij niet den potentiaalsprong, doch de experimenteele electrische potentiaal meten is het aangewezen, de polarisatie-verschijnselen te bespreken aan de hand van de formule, die voor de „exp. electrische potentiaal" geldt voor het geval men met een niet-metaal te doen heeft [1]). Deze formule luidt:

$$E = \frac{0.058}{r} \log \frac{Q_N}{(N_L^{\nu\prime\prime})} + 2{,}8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

waarin

$$Q = \frac{(N_L^{\nu\prime})}{(\theta_L)^{\nu}}.$$

Nu volgt uit (7) en (8)

$$\frac{(N_L^{\nu\prime\prime})\,(\theta_P)^{\nu}}{(N_P^{\nu\prime\prime})\,(\theta_L)^{\nu}} = K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Verder is zooeven aangetoond, dat bij anodische polarisatie (θ_P) af en $(N_P^{\nu\prime})$ toeneemt; hieruit volgt dus, dat in dit geval het *oplosbaarheidsquotient* moet *toenemen*, en de exp. electrische potentiaal van het niet-metaal dus sterker positief zal worden.

Bij kathodische polarisatie neemt het oplosbaarheidsquotient af en wordt dus de exp. electrische potentiaal van het niet-metaal minder sterk positief.

Tweeslachtige elementen.

De tweeslachtige elementen zijn, zooals reeds gezegd, daardoor gekarakteriseerd, dat zij zoowel positieve als negatieve ionen in oplossing zenden.

Wordt zoo'n element tot anode gemaakt, dan kunnen dus positieve-ionen in oplossing gaan, of er kunnen negatieve-ionen uit den electrolyt op de anode neerslaan of beide processen kunnen gelijktijdig verloopen.

Maakt men het element tot kathode, dan kunnen positieve-ionen op de electrode neerslaan of negatieve-ionen in oplossing gaan of beide processen verloopen naast elkaar.

De verdere studie van deze tweeslachtige elementen, die wij spoedig hopen aan te vangen, zal aan de hand der nieuwe theorie omtrent de electromotorische evenwichten vermoedelijk een dieper inzicht geven in het karakter van deze zoo merkwaardige elementen.

Amsterdam, 10 April 1919. *Laboratorium voor algemeene en anorganische chemie der Universiteit.*

[1]) Versl. Kon. Akad. v. Wet.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van de Heeren L. S. ORNSTEIN EN F. ZERNIKE over: *„De hysteresis-kromme voor kristal-aggregaten".*

(Mede aangeboden door den Heer JULIUS)

WEISS[1]) heeft de hysteresis-kromme van ijzer theoretisch afgeleid door het als een aggregaat van kleine kristallen op te vatten. Aan de elementaire kristallen heeft hij daarbij de eigenschappen van pyrrothine toegekend. Dat wil zeggen: hij heeft ondersteld dat zij een „magnetisch vlak" bezitten, waarin twee onderling loodrechte richtingen voor de magnetisatie liggen, van welke richtingen de een de andere verre in magnetiseerbaarheid overtreft. In de richting loodrecht op dit vlak gedraagt het kristal zich niet ferromagnetisch. De hysteresis-krommen die WEISS aldus vindt voor de aggregaten, vertoonen overeenstemming met de waargenomene, doch zij vertoonen knikken. Het komt ons voor dat deze afleiding verbetering behoeft door de ontmagnetiseerende kracht in aanmerking te nemen.

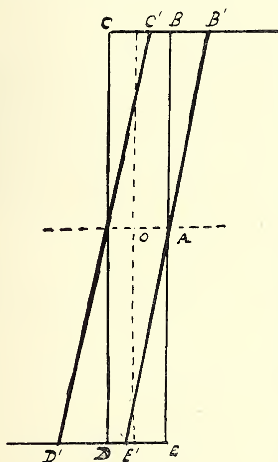


Fig. 1.

Wij zullen de hysteresis-kromme voor een kristal-aggregaat afleiden. Daarbij zullen wij ons bepalen tot het geval dat de elementaire kristallen slechts één richting van magnetiseerbaarheid bezitten; op andere gevallen is intusschen de beschouwing gemakkelijk uit te breiden. Wij onderstellen dat de hysteresis-kromme voor lange staafjes (waarvan de lengterichting in de voorkeurrichting ligt, rechthoekig is (fig. 1). De verzadigingsmagnetisatie zij M_0, de correctief kracht H_c. Nu kan men zich voorstellen dat de stof niet uit staafjes bestaat, doch uit kristallen,

[1]) Journal de Physique 4 Série Tome VI.

b.v. uit rhombendodekaeders. Inplaats van dezen vorm aan de elementaire kristallen toe te kennen, kunnen wij ze bolvormig denken.

In deze bolletjes kan nu de hysteresis-kromme gemakkelijk geconstrueerd worden, als men bedenkt dat er een ontmagnetiseerende kracht $-\frac{1}{3} M$ in werkt (waarin M de magnetisatie voorstelt).

Stellen wij nu de magnetische kracht waarin het bolletje geplaatst is H_b, dan is de kracht binnen in het bolletje $H_b - \frac{1}{3} M$, en dan zal de magnetische kracht H_s, die wij voor een staafje moeten nemen om het verband tusschen H_b en M te vinden, zijn

$$H_s = H_b - \tfrac{1}{3} M.$$

Men ziet dus onmiddellijk dat de magnetisatie-kromme voor de bol een scheefstaand p.g. wordt, zoodat de afstand BB' $\frac{1}{3} M_0$ bedraagt (fig. 1).

Het beschouwde lichaam bestaat nu uit bolletjes die de gevonden magnetisatie-kromme bezitten en waarvan de voorkeurrichtingen naar het toeval over alle hoeken verdeeld zijn.

Wij denken ons nu het lichaam uitwendig door een bol begrensd, en bepalen de hysteresis-kromme. Is deze gevonden, dan is het gemakkelijk haar te bepalen voor het geval dat de stof een langgerekten staafvorm heeft.

Wij beginnen met den teruggloopenden tak van de hysteresis kromme, nemen dus $H = \infty$, en verminderen nu H gaandeweg. Indien de voorkeurrichting voor een deeltje met de magnetische kracht een hoek ϑ vormt, is de magnetische kracht in de voorkeurrichting $H \cos \vartheta$. Zoolang $H \cos \vartheta$ grooter is dan $\frac{1}{3} M_0 - H_c$, blijft het beschouwde deeltje verzadigd gemagnetiseerd. Is $H \cos \vartheta$ kleiner, dan is de magnetisatie kleiner dan M_0; wij bevinden ons dan op den tak $C'D'$ van de magnetisatiekromme en hebben

$$\frac{M}{3} = H \cos \vartheta + H_c.$$

Onverzadigd zijn dus de deeltjes, waarvoor ϑ grooter is dan ϑ_0, waarbij ϑ_0 gegeven is door

$$M_0 = 3H_c + 3H \cos \vartheta_0.$$

Het resulteerend moment in de veldrichting is voor deze deeltjes

$$M \cos \vartheta = 3H_c \cos \vartheta + 3H \cos^2 \vartheta,$$

terwijl het voor de verzadigd gemagnetiseerde deeltjes $M_0 \cos \vartheta$ bedraagt.

De fractie van het aantal voorkeurrichtingen waarvoor ϑ tusschen ϑ en $\vartheta + d\vartheta$ ligt bedraagt

$\sin \vartheta \, d\vartheta$.

De bijdrage der onverzadigde deeltjes is dus

$$\int_{\vartheta_0}^{\pi/2} 3 \sin \vartheta \, (H_c \cos \vartheta + H \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta = \tfrac{3}{2} H_c \cos^2 \vartheta_0 + H \cos^3 \vartheta_0,$$

en voor de deeltjes die verzadigd gemagnetiseerd zijn

$$\frac{M_0}{2} \sin^2 \vartheta_0.$$

Voegen wij deze beide stukken te samen en gebruiken wij de voor $\cos \vartheta_0$ gevonden waarde, dan vinden wij voor het magnetisch moment

$$M = \frac{M_0}{2} - \frac{(M_0 - 3H_c)^3}{54 \, H^2}$$

Deze betrekking geldt nu van af $H \infty$ tot $H = \frac{1}{3} M_0 - H_c$. Immers indien H kleiner dan deze waarde is, zijn alle magneetjes onverzadigd gemagnetiseerd. De berekening van de magnetisatie kan dan geschieden door $M \cos \vartheta$ van 0 tot $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{in plaats van van } \vartheta_0 \text{ tot } \frac{\pi}{2}\right)$ te integreeren. Men vindt op deze wijze voor de magnetisatie

$$M = \frac{3}{2} H_c + H.$$

De $H \, . \, M$ kromme is in dit gebied dus een rechte lijn. De betrekking die wij zooeven hebben afgeleid geldt ook nog voor negatieve waarden van H en wel tot dat $-H = \frac{1}{3} M_0 + H_c$ geworden is Dan toch bevinden zich een aantal magneetjes in zoo sterke negatieve velden, dat zij verzadigd gemagnetiseerd worden. De totale magnetisatie is dan weder uit twee stukken op te maken, die op de verzadigde en de onverzadigde magneetjes betrekking hebben, en die door integralen voorgesteld worden welke de grenzen $o \ldots \vartheta_1$ en $\vartheta_1 \ldots \pi/2$ bezitten. De hoek ϑ_1 is daarbij gegeven door de betrekking $\cos \vartheta_1 = \dfrac{M_0 + 3H_c}{|H|}$.

Men vindt op deze wijze voor M:

$$M = -\frac{1}{2} M_0 + \frac{(M_0 + 3H_c)^3}{54 \, H^2}$$

De heenloopende tak van de hysteresis-kromme kan op analoge wijze bepaald worden.

Opmerking verdient dat het rechte en het kromme deel van de hysteresis kromme wat de richting betreft continu aan elkaar sluiten. De richting der kromme is n.l. gegeven door

$$\frac{dM}{dH}=\frac{(M_0-3H_c)^3}{27\,H^3}.$$

In het punt $H=\frac{M_0-3\,H_c}{3}$, waar het rechte en het kromme stuk aaneensluiten, is dit één, terwijl de tg van den hoek van de rechte met de abscis ook één is. Hetzelfde is in het tweede punt het geval.

Om nu uit de gevonden hysteresis-kromme voor den bol die voor een lange staaf in het veld H af te leiden, moet men in de formules H door $H+\frac{1}{3}M$ vervangen. Wij krijgen dan voor het rechte stuk

$$M=H_c+\frac{3}{2}\,H.$$

Voor de kromme stukken

$$M=\frac{1}{2}\,M_0-\frac{(M_0-3H_c)^3}{54\,(H+\frac{1}{3}M)^2}$$

en

$$M=-\frac{1}{2}\,M_0+\frac{(M_0+3H_c)^3}{54\,(H+\frac{1}{3}M)^2}.$$

De rechte stukken raken nog steeds aan de kromme. De coercitiefkracht is $\frac{2}{3}\,H_c$ de verzadigingsmagnetisatie $\frac{1}{2}\,M_0$.

Het is niet moeilijk ook voor enkele andere vormen der korrels, en voor andere onderstellingen omtrent hunne magnetische eigen-

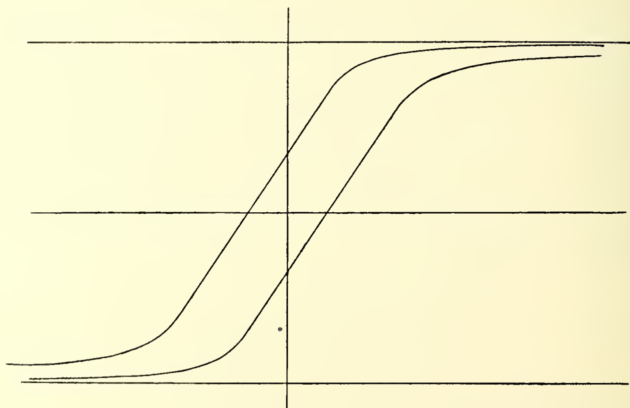


Fig. 2.

schappen, deze beschouwing door te voeren. De nevensgaande figuur geeft een voorstelling van de verkregen hysteresis-kromme.

Natuurkunde. — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan van den Heer J. A. SCHOUTEN: „*Over reeksontwikkelingen van algebraische vormen met verschillende rijen van variabelen van verschillenden graad* [1])".

(Mede aangeboden door den Heer H. A. LORENTZ).

Notaties.

Wij leggen het systeem S_n^l [2]) ten grondslag met de kovariante en kontravariante grondeenheden e_λ resp. e'_λ, $\lambda = a_1, \ldots, a_n$, en de grondvermenigvuldigingen $\wedge$ (uitwendige verm.), $\circ$ (algemeene verm.), $\frown$ (alterneerende verm.) en $\smile$ (symmetrische verm.)

$$\mathrm{e}_\lambda \wedge \mathrm{e}'_\mu = \begin{cases} \varkappa = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} & \text{voor} \quad \lambda = \mu \\ 0 & \quad ,, \quad \lambda \neq \mu \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{e}_{\lambda_1} \overset{\wedge}{\ldots} \mathrm{e}_{\lambda_i} = \mathrm{e}_{\lambda_1} \overset{\frown}{\ldots} \mathrm{e}_{\lambda_i} = \text{kovariante grootheid v.d. } i\text{-den trap } (i\text{-vector}) \\ \mathrm{e}'_{\lambda_1} \overset{\wedge}{\ldots} \mathrm{e}'_{\lambda_i} = \mathrm{e}'_{\lambda_1} \overset{\frown}{\ldots} \mathrm{e}'_{\lambda_i} = \text{kontravariante} \;\; ,, \;\; ,, \;\; ,, \;\; ,, \;\; ,, \;\; ,, \end{array}\right\} i < n$$

$$\mathrm{e}_{a_1} \overset{\frown}{\ldots} \mathrm{e}_{a_n} = \mathrm{E} = \text{kovariante scalar; } \mathrm{e}'_{a_1} \overset{\frown}{\ldots} \mathrm{e}'_{a_n} = \mathrm{E}' = \text{kontravariante scalar}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa^n \, \mathrm{e}_{a_2} \ldots \overset{\frown}{\mathrm{e}_{a_n}} \mathrm{E}' = \mathrm{e}'_{a_1} \\ \varkappa^n \, \mathrm{e}'_{a_2} \ldots \overset{\frown}{\mathrm{e}'_{a_n}} \mathrm{E} = \mathrm{e}_{a_1} \end{array}\right\} cycl.$$

Onder *i-de* (*meeloopende*) *overschuiving* van $\overset{P}{\mathbf{m}} = \mathbf{m}_1 \overset{\circ}{\ldots} \mathbf{m}_P = \mathbf{m}_1 \ldots \mathbf{m}_P$ en $\overset{Q}{\mathbf{r}'} = \mathbf{r}'_1 \ldots \mathbf{r}'_q$ worde verstaan

---

[1]) Zie ook: „Over reeksontwikkelingen van ko- en kontra-variante grootheden van hoogeren graad enz.", Versl. der Kon. v. Wet. Dl. XXVI, bldz. 1272—1292, hier verder geciteerd als R_I, waarvan deze mededeeling een vervolg en een toepassing is.

[2]) S_n^l ontstaat uit R_n^e door weglating van alle grootheden die alleen bij de orthogonale groep bestaan. Zie voor deze stelsels: Over de direkte analyses der lineaire grootheden bij de rotationeele groep enz., Versl. der Kon. Akad. v. Wet. Dl. XXVI, bldz. 567—580; Ueber die Zahlensysteme der rotationalen Gruppe, Nieuw Arch. voor Wisk. Dl. XIII, 1919; Die direkte Analysis der neueren Relativitätstheorie, Verh. der Kon. Akad. v. Wet. Dl. XII N⁰. 6 blz. 29.

$$\overset{P}{\mathbf{m}} \underset{i}{.} \overset{Q}{\mathbf{r}'} = (\mathbf{m}_1 \wedge \mathbf{r}_1') \ldots (\mathbf{m}_i \wedge \mathbf{r}_i') \, \mathbf{m}_{i+1} \ldots \mathbf{m}_P \, \mathbf{r}'_{i+1} \ldots \mathbf{r}'_Q \; ^{1)}$$

Bijgevolg is, indien vrijgemakshalve . schrijven voor $\underset{1}{.}$:

$$\mathbf{m} . \mathbf{r}' = \mathbf{m} \underset{1}{.} \mathbf{r}' = \mathbf{m} \wedge \mathbf{r}' = \varkappa \left(m_{a_1} r'_{a_1} + \ldots + m_{a_n} r'_{a_n} \right)$$

Onder *i-de uitwendige overschuiving* $\underset{i}{\diamond}$ van m affinoren $\overset{p}{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_p$, $\overset{q}{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_q$, enz. worde de grootheid verstaan die uit $\overset{p}{\mathbf{u}}\overset{q}{\mathbf{v}} \ldots$ ontstaat door de ideale vectoren $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \ldots$, vervolgens $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \ldots$, enz. tot $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \ldots$ *ter plaatse* te vervangen door de ideale factoren van hun alterneerend product. Worden de overige factoren tegelijkertijd *ter plaatse* vervangen door de ideale factoren van hun alterneerend resp. symmetrisch product, dan ontstaat de *i-de uitwendige alterneerende overschuiving* $\underset{i}{\wedge}$, resp. *de i-de uitwendige symmetrische* $\underset{i}{\vee}$.

Affinoren en algebraische vormen. Wordt van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ de P-de overschuiving gevormd met een product $\overset{P}{\mathbf{r}'}$ van P verschillende kontravariante grondelementen $\mathbf{r}'_1, \ldots, \mathbf{r}'_P$, dan ontstaat de vorm:

$$F \overset{P}{\mathbf{m}} = \overset{P}{\mathbf{m}} \underset{P}{.} \mathbf{r}'_1 \ldots \mathbf{r}'_P = (\mathbf{m}_1 \, . \, \mathbf{r}'_1) \ldots (\mathbf{m}_P \, . \, \mathbf{r}'_P) =$$

$$= \varkappa^P \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_P}^{a_1 \ldots a_n P} m_{\lambda_1 \ldots \lambda_P} \, r'_{1\lambda_1} \ldots r_{P\lambda_P}.$$

Een bijzonder geval is, dat $\mathbf{r}'_1 \ldots \mathbf{r}'_P$ alle reaal zijn, $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ is dan een vorm in P rijen van n reale variabelen. De kentallen van een kovarianten affinor (en dus ook van een kontravarianten) kunnen dus altijd worden opgevat als de koefficienten van een dergelijken algebraischen vorm. Zijn de rijen $\mathbf{r}'_1, \ldots, \mathbf{r}'_P$ gegeven en is hunne volgorde vastgelegd, dan is $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ eenduidig bepaald door $\overset{P}{\mathbf{m}}$. Zijn alle rijen verschillend, dan is ook $\overset{P}{\mathbf{m}}$ eenduidig bepaald door $F\overset{P}{\mathbf{m}}$, in het andere geval niet, daar $\overset{P}{\mathbf{m}} + \overset{P}{\mathbf{n}}$, waarin $\overset{P}{\mathbf{n}}$ een willekeurig affinor is, alterneerend in twee factoren, die correspondeeren met twee gelijke variabelenrijen, met $\overset{P}{\mathbf{r}'}$ overschoven eveneens $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ vormt.

In het algemeene geval zijn $\mathbf{r}'_1, \ldots, \mathbf{r}'_P$ ideaal, $\overset{P}{\mathbf{r}'}$ is echter gelijk aan $\overset{p}{\mathbf{x}'}_\rho \, \overset{q}{\mathbf{y}'}_\sigma \ldots$, waarbij $p\varrho + q\sigma + \ldots = P$, en waarin $\overset{p}{\mathbf{x}'}, \overset{q}{\mathbf{y}'}, \ldots$ reaal zijn.

[1]) Het teeken $\underset{i}{.}$ is ter vervanging van $(\,,)^i$ voor de overschuivingen der invariantentheorie het eerst ingevoerd door Waelsch.

$F\overset{P}{\mathbf{m}}$ is dan een vorm van de graden $\varrho, \sigma, \ldots.$ in variabelenrijen, die zelf als koefficienten van variabele vormen in $p, q, \ldots$ rijen van n kovariante variabelen kunnen worden opgevat. Zulke variabelen noemen we *variabelen van de graden* $p, q, \ldots$ Zijn de rijen $\overset{p}{\mathbf{x}}{}', \overset{q}{\mathbf{y}}{}', \ldots$ en de volgorde hunner ideale factoren gegeven, dan is $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ eenduidig bepaald door $\overset{P}{\mathbf{m}}$. Gemakshalve kiezen wij de volgorde zoo, dat $\overset{P}{\mathbf{r}}{}' = \overset{p}{\mathbf{x}}{}' \overset{q}{\mathbf{y}}{}' \ldots.$ Teneinde ook omgekeerd $\overset{P}{\mathbf{m}}$ eenduidig te kunnen vastleggen, bewijzen we eerst de volgende stelling:

Hoofdstelling A. Iedere algebraïsche vorm van den totalen graad P, *homogeen en van de graden* $\varrho, \sigma, \ldots$ *in verschillende rijen van variabelen* $\overset{p}{\mathbf{x}}{}', \overset{q}{\mathbf{y}}{}', \ldots$ *die elk zelf als koëfficienten van variabele vormen* $F\overset{p}{\mathbf{x}}{}', F\overset{q}{\mathbf{y}}{}', \ldots,$ *lineair en van de graden* $p, q, \ldots$ *in rijen van* n *verschillende kovariante variabelen kunnen worden opgevat, kan geschreven worden als een product van* P *ideale lineaire vormen. Is voor de variabelenrijen* $\overset{p}{\mathbf{x}}{}', \overset{q}{\mathbf{y}}{}', \ldots$ *voorgeschreven, dat* $\overset{p}{\mathbf{x}}{}', \overset{q}{\mathbf{y}}{}', \ldots$ *elk door bepaald aangewezen geordende elementaire operatoren òf van de eerste òf van de tweede soort*[1]) *geannulleerd worden, terwijl de variabelen overigens alle waarden kunnen aannemen, dan behoort bij den gegeven vorm bij een bepaalde keuze der volgorde der rijen één enkele bepaalde affinor van den graad* P.

Zijn de kentallen der rijen $x'_1, \ldots., x'_\alpha;\ y'_1, \ldots., y'_\beta; \ldots.$, waarbij $\alpha = n^p, \beta = n^q, \ldots.$ dan heeft iedere term van den vorm F de gedaante:

$$\overset{P}{n}_{\rho_1 \ldots. \rho_\alpha, \sigma_1 \ldots. \sigma_\alpha, \ldots.} x'^{\rho_1}_1 \ldots. x'^{\rho_\alpha}_\alpha\, y'^{\sigma_1}_1 \ldots. y'^{\sigma_\beta}_\beta \ldots$$

$$\varrho_1 + \ldots. + \varrho_\alpha = \varrho$$
$$\sigma_1 + \ldots. + \sigma_\beta = \sigma.$$
$$\vdots$$

Zijn nu

$$\overset{p}{\mathbf{e}}{}_1', \ldots., \overset{p}{\mathbf{e}}{}_\alpha' \,;\, \overset{q}{\mathbf{e}}{}_1', \ldots., \overset{q}{\mathbf{e}}{}_\beta' \,; \ldots.$$

de producten van $p, q, \ldots.$ der grondeenheden $\mathbf{e}'_{a_1}, \ldots., \mathbf{e}'_{a_n}$, behoorende bij de kentallen van $\overset{p}{\mathbf{x}}{}', \overset{q}{\mathbf{y}}{}', \ldots.$ en

$$\overset{p}{\mathbf{e}}_1, \ldots., \overset{p}{\mathbf{e}}_\alpha \,;\, \overset{q}{\mathbf{e}}_1, \ldots., \overset{q}{\mathbf{e}}_\beta \,; \ldots.$$

[1]) Zie R_I bldz. 1288.

de op dezelfde wijze uit $e_{a_1}, \ldots, e_{a_n}$ gevormde producten, dan vorme men den affinor:

$$\overset{P}{\mathfrak{n}} = \varkappa^P \Sigma \overset{P}{n}_{\rho_1 \ldots \rho_\alpha, \rho_1 \ldots \sigma_\alpha, \ldots} \overset{p}{e}_1^{\rho_1} \ldots \overset{p}{e}_\alpha^{\rho_\alpha} \overset{q}{e}_1^{\sigma_1} \ldots \overset{q}{e}_\beta^{\sigma_\beta} \ldots$$

Daar de overschuiving

$$e_{i_1} \ldots e_{i_P} \underset{P}{\cdot} e'_{j_1} \ldots e'_{j_P} \qquad \begin{array}{l} i_1, \ldots, i_P = a_1, \ldots, a_n \\ j_1, \ldots, j_P = a_1, \ldots, a_n \end{array}$$

gelijk is aan $\varkappa^P$ voor het geval dat $i_e = j_e, e = 1, \ldots, P$ en nul in ieder ander geval, volgt dan:

$$F = \overset{P}{\mathfrak{n}} \underset{P}{\cdot} \overset{p}{\mathfrak{x}}' \overset{q}{\mathfrak{y}}' \ldots$$

Worden nu eenerzijds $\overset{P}{\mathfrak{n}}$, anderzijds $\overset{p}{\mathfrak{x}}', \overset{q}{\mathfrak{y}}'$ als produkten van ideale grondelementen geschreven, dan is inderdaad F tot een product van P ideale lineaire vormen herleid. Ten einde uit $\overset{P}{\mathfrak{n}}$ den affinor $\overset{P}{\mathfrak{m}}$ af te leiden, die eenduidig bij F behoort, bewijzen we eerst de stelling:

Stelling I.

Is $\overset{P}{\mathfrak{q}}$ *een geordende elementaire affinor van de eerste (tweede) soort en* $\overset{P}{\mathfrak{r}}'$ *een dito van de tweede (eerste) soort*[1]*, dan is de P-de overschuiving van beiden nul, indien de beide geordende elementaire operatoren* $\varepsilon_{ij} A_i^{(\alpha)} M_j^{(\alpha)}, \varepsilon_{lm} M_l^{(\beta)} A_m^{(\beta)}$, *waardoor* $\overset{P}{\mathfrak{q}}$ *en* $\overset{P}{\mathfrak{r}}'$ ($\overset{P}{\mathfrak{r}}'$ *en* $\overset{P}{\mathfrak{q}}$) *ontstaan kunnen, niet toegevoegd zijn,* d. w. z. indien niet $l = j$, $m = i$ en $\alpha = \beta$.

Daar:

$$\overset{P}{\mathfrak{q}} = \varepsilon_{ij} A_i^{(\alpha)} M_j^{(\alpha)} \overset{P}{\mathfrak{q}}; \quad \overset{P}{\mathfrak{r}}' = \varepsilon_{lm} M_l^{(\beta)} A_m^{(\beta)} \overset{P}{\mathfrak{r}}',$$

is:

$$\overset{P}{\mathfrak{q}} \underset{P}{\cdot} \overset{P}{\mathfrak{r}}' = \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{lm} \left(A_i^{(\alpha)} M_j^{(\alpha)} \overset{P}{\mathfrak{q}}\right) \underset{P}{\cdot} M_l^{(\beta)} A_m^{(\beta)} \overset{P}{\mathfrak{r}}' =$$

$$= \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{lm} \left(M_l^{(\beta)} A_i^{(\alpha)} M_j^{(\alpha)} \overset{P}{\mathfrak{q}}\right) \underset{P}{\cdot} A_m^{(\beta)} \overset{P}{\mathfrak{r}}' =$$

$$= \varepsilon_{ij}\, \varepsilon_{lm} \left(A_m^{(\beta)} M_l^{(\beta)} A_i^{(\alpha)} M_j^{(\alpha)} \overset{P}{\mathfrak{q}}\right) \underset{P}{\cdot} \overset{P}{\mathfrak{r}}'.$$

De overschuiving is dus inderdaad nul, indien niet $l = j$ (dus ook $m = i$) en $\alpha = \beta$. Hetzelfde bewijs geldt m.m. bij verwisseling van eerste en tweede soort.

Zijn nu de sommen der geordende elementaire operatoren der

[1]) Zie R_I blz. 1288.

eerste soort, die $\overset{p}{\mathbf{x}}'$, $\overset{q}{\mathbf{y}}'$, ... niet annulleeren, ${}_xL, {}_yL$, ... en de sommen der toegevoegde operatoren ${}^xL$, ${}^yL$, ... enz. In het bijzondere geval, dat ${}_xL$ een som is van elementaire operatoren, is blijkbaar ${}_xL = {}^xL$. Uit $\overset{P}{\mathbf{n}}$ vormen we nu eerst een affinor $\overset{P}{\mathbf{n}}_1$ door de ϱ gebieden van p factoren, correspondeerende met $\overset{p}{\mathbf{x}}'^{\varrho}$, evenzoo de σ gebieden van q factoren, correspondeerende met $\overset{q}{\mathbf{y}}'^{\sigma}$ enz. op alle $\varrho!\,\sigma!$ .... wijzen te permuteeren, op te tellen en te deelen door $\varrho!\,\sigma!$ .... Dan laat zich $\overset{P}{\mathbf{n}}_1$ schrijven:

$$\overset{P}{\mathbf{n}}_1 = \overset{p_\varrho}{\mathbf{n}_x}\,\overset{q_\sigma}{\mathbf{n}_y} \ldots,$$

waarin bij de machtsverheffingen op de uit de invariantensymboliek bekende wijze ϱ, σ, ... verschillende gelijkgerechtigde grootheden $\overset{p}{\mathbf{n}}_x$, $\overset{q}{\mathbf{n}}_y$ .... in te voeren zijn om dubbelzinnigheid te vermijden [1]). De gegeven vorm wordt dan ook verkregen door $\overset{P}{\mathbf{n}}_1$ met $\overset{P}{\mathbf{r}}'$ te overschuiven:

$$F = \overset{P}{\mathbf{n}}_1 \underset{P}{.} \overset{P}{\mathbf{r}}' = \left(\overset{p}{\mathbf{n}}_x \underset{p}{.} \overset{p}{\mathbf{x}}'\right)^{\varrho} \left(\overset{q}{\mathbf{n}}_y \underset{q}{.} \overset{q}{\mathbf{y}}\right)^{\sigma} \ldots$$

Tengevolge van stelling II is nu:

$$F = (\overset{p}{\mathbf{n}}_x \underset{p}{.}\, {}_xL\, \overset{p}{\mathbf{x}}')\;(\overset{q}{\mathbf{n}}_y \underset{q}{.}\, {}_yL\, \overset{q}{\mathbf{y}}') \ldots =$$

$$= ({}^xL\, \overset{p}{\mathbf{n}}_x \underset{p}{.} \overset{p}{\mathbf{x}}')\;({}^yL\, \overset{q}{\mathbf{n}}_y \underset{q}{.} \overset{q}{\mathbf{y}}') \ldots$$

Schrijven we ${}^xL\overset{p}{\mathbf{n}}_x = \overset{p}{\mathbf{u}}$, ${}^yL\overset{q}{\mathbf{n}}_y = \overset{q}{\mathbf{v}}$, enz. en $\overset{P}{\mathbf{m}} = \overset{p}{\mathbf{u}}\,\overset{q}{\mathbf{v}} \ldots$, dan is:

$$F = \overset{P}{\mathbf{m}} \underset{P}{.} \overset{P}{\mathbf{r}}' = (\overset{p}{\mathbf{u}} \underset{p}{.} \overset{p}{\mathbf{x}}')\;(\overset{q}{\mathbf{v}} \underset{q}{} \overset{q}{\mathbf{y}}') \ldots$$

$\overset{P}{\mathbf{m}}$ is de eenige affinor van dezen vorm, die met $\overset{P}{\mathbf{r}}'$ overschoven $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ geeft. Inderdaad is iedere affinor $\overset{P}{\mathbf{m}}_1$, die in den vorm

$$\overset{P}{\mathbf{m}}_1 = ({}^xL\, \overset{p}{\mathbf{m}}_x)\;({}^yL\, \overset{q}{\mathbf{m}}_y) \ldots$$

geschreven kan worden en met $\overset{P}{\mathbf{r}}'$ overschoven nul geeft, identiek nul. Daar toch krachtens onderstelling $\overset{p}{\mathbf{x}}'$ alle waarden kan aannemen, die aan de vergelijking ${}_xL\overset{p}{\mathbf{x}}' = \overset{p}{\mathbf{x}}'$ voldoen, kunnen we voor

---

[1]) Verg. Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, blz. 11, 17.

$\overset{p}{\mathbf{x}}'$ nemen :

$$\overset{p}{\mathbf{x}}' = {}_xL\, \mathbf{s}'_1 \ldots \mathbf{s}_p',$$

waarin $\mathbf{s}'_1 \ldots, \mathbf{s}'_p$ reale *verschillende* variabelenrijen zijn, en het overeenkomstige verrichten voor $\overset{q}{\mathbf{y}}'$, enz. Dan is:

$$0 = \overset{P}{\mathbf{m}}_1 \underset{P}{\cdot} \overset{P}{\mathbf{r}}' = \{({}^xL\, \overset{p}{\mathbf{m}}_x) \underset{p}{\cdot} {}_xL\, \mathbf{s}_1' \ldots \mathbf{s}_p'\}^\rho \{({}^yL\, \overset{q}{\mathbf{m}}_y) \underset{q}{\cdot} {}_yL\, \mathbf{t}_1' \ldots \mathbf{t}_q'\}^\sigma \ldots$$

$$= \{({}^xL\, \overset{p}{\mathbf{m}}_x) \underset{p}{\cdot} \mathbf{s}_1' \ldots \mathbf{s}_p'\}^\rho \{({}^yL\, \overset{q}{\mathbf{m}}_y) \underset{q}{\cdot} \mathbf{t}_1' \ldots \mathbf{t}_q'\}^\sigma$$

$$= \overset{P}{\mathbf{m}}_1 \underset{P}{\cdot} (\mathbf{s}_1' \ldots \mathbf{s}_p')^\rho (\mathbf{t}_1' \ldots \mathbf{t}_q')^\sigma \ldots$$

Vult men hierin voor de $\mathbf{s}, \mathbf{t}, \ldots$ alle mogelijke combinaties van $\mathbf{e}'_{a_1}, \ldots, \mathbf{e}'_{a_n}$ in, dan volgt, dat ieder kental van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ nul is.

We maken van de bewezen eigenschap gebruik door een algebraischen vorm te noemen *niet bijzonder, alterneerend, symmetrisch, plaatselijk alterneerend, symmetrisch* of *permuteerbaar*, een *elementaire vorm* of *een geordende elementaire vorm* van de *eerste of tweede soort* indien overeenkomstige aanduidingen gelden voor den correspondeerenden affinor. Verder worde onder toepassing van een operator $K, A, M, \overset{m}{A}, \overset{a}{M}, \overline{A}, \overline{M}, \overset{m}{\overline{A}}, \overset{a}{\overline{M}}, {}^k_jI, {}^k_{\alpha j}I$, of ${}^{\alpha k}_{j}I$ toepassing van dien operator op den correspondeerenden affinor van den vorm verstaan. Met behulp van den correspondeerenden affinor is men nu in staat een groot deel der eigenschappen van vormen terug te voeren op de in R_I behandelde formeele eigenschappen der operatoren K, A, enz., waardoor een belangrijke vereenvoudiging van de behandeling van vormen bereikt wordt.

De in de lineaire factoren optredende kentallen zijn identiek met de symbolen van ARONHOLD en CLEBSCH. Is een der rijen bijv. $\overset{p}{\mathbf{x}}'$ symmetrisch, dan is ook $\overset{p}{\mathbf{u}}$ symmetrisch en beide kunnen als p-de macht van een ideaal grondelement geschreven worden:

$$^p\mathbf{u} \underset{p}{\cdot} {}^p\mathbf{x}' = \mathbf{u}^p \underset{p}{\cdot} \mathbf{x}'^p = (\mathbf{u} \cdot_{\mathbf{x}'})^p.$$

Ook in dit geval zijn de optredende kentallen symbolen van ARONHOLD en CLEBSCH. Is $\overset{p}{\mathbf{x}}'$ alterneerend, dan is ook $\overset{p}{\mathbf{u}}$ alterneerend en beide kunnen ook in dat geval als p-de machten geschreven worden:

$${}_p\mathbf{u} \underset{p}{\cdot} {}_p\mathbf{x}' = \mathbf{u}^p \underset{p}{\cdot} \mathbf{x}'^p = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}')^p.$$

De optredende kentallen zijn nu echter identiek met de door WAELSCH en WEITZENBÖCK ingevoerde komplexsymbolen, welker vermenigvuldiging anticommutatief is. Is $\overset{p}{\mathbf{x}}'$ en dus ook $\overset{p}{\mathbf{u}}$ meer algemeen, dan blijft de schrijfwijze als machten soms bruikbaar, de ideale wortels $\mathbf{x}'$ en $\mathbf{u}$ bepalen dan echter niet meer de isomeren van $\overset{p}{\mathbf{x}}'$ en $\overset{p}{\mathbf{u}}$. Beide kentallen zijn ideale getallen van gecompliceerderen aard, in wier produkten commutatie op geene wijze meer geoorloofd is.

Met behulp der komplexsymbolen heeft WEITZENBÖCK[1]) het eerste gedeelte van hoofdstelling A bewezen voor vormen in variabelenrijen, die alle alterneerend zijn. Het hier gegeven bewijs is hiervan een uitbreiding voor vormen met variabelenrijen van meer algemeenen aard.

Pooloperatoren. Zij $p = q \ldots = 1$. Daar:

$$\left(\mathrm{y}' \cdot \frac{d}{d\mathbf{x}'}\right)\mathbf{x}' = \varkappa\, \mathrm{y}',$$

is:

$$\left(\mathrm{y}' \cdot \frac{d}{d}\right)\mathbf{x}'^{\rho}\, \mathrm{y}'^{\sigma} \ldots = \varkappa\, \rho\, (\mathbf{x}'^{\rho-1} \smile \mathrm{y}')\, \mathrm{y}'^{\sigma} \ldots$$

en

$$\varkappa^{i} \frac{(\rho - i)!}{\rho!}\left(\mathrm{y}' \cdot \frac{d}{d\mathrm{x}'}\right)^{i} \underset{P}{\overset{P}{\mathrm{m}}} \,.\, \mathrm{x}'^{\rho}\, \mathrm{y}'^{\sigma} \ldots = \underset{P}{\overset{P}{\mathrm{m}}} \,.\, (\mathbf{x}'^{\rho-i} \smile \mathrm{y}'^{i})\, \mathrm{y}'^{\sigma} =$$

$$= \underset{P}{\overset{P}{\mathrm{m}}} \,.\, \mathbf{x}'^{\rho-i}\, \mathrm{y}'^{\sigma+i} \ldots$$

$\varkappa i \frac{\rho - i!}{\rho!}\left(\mathrm{y}' \cdot \frac{d}{d\mathbf{x}'}\right)^{i}$ is dus i-de *pooloperator* van $\mathbf{x}'$ naar $\mathbf{y}'$. Door toepassing van dezen operator gaat de vorm $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ over in een vorm met de rijen van variabelen $\mathbf{x}'^{\rho-i}$, $\mathrm{y}'^{\sigma+i}$. De correspondeerende affinor van dezen vorm is niet meer $\overset{P}{\mathbf{m}}$, maar ontstaat uit $\overset{P}{\mathbf{m}}$ door toepassing van een operator ${}_{\sigma+i}M$, waarvan het permutatiegebied de met $\mathbf{y}'^{\sigma+i}$ correspondeerende ideale factoren van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ omvat. Toepassing van dezen operator staat dus gelijk met toepassing van ${}^{\sigma+i}M$, gecombineerd met een verandering der rijen van variabelen.

De CAPELLI'*sche operatoren* $H^{(s)}$. Is weer $p = q = \ldots 1$ en noemen we de variabelenrijen van $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ $\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_m$ en de bijbehoorende expo-

---

[1]) Beweis des ersten Fundamentalsatzes der symbolischen Methode. Sitzungsber. der Wiener Akad. 122 (13) 153—168, blz. 155 e.v.

nenten $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$, zoodat dus $\varrho_1 + \ldots + \varrho_m = P$, dan is de door CAPELLI ingevoerde differentiaaloperator $H^{(s)}$ in onze schrijfwijze:

$$H^{(s)} = \varkappa^s s! \, \Sigma \, (\mathbf{x}_{i_1} \frown \ldots \mathbf{x}_{i_s}) \underset{s}{.} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{i_1}'} \frown \ldots \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{i_s}'} \right),$$

waarbij de sommatie uit te voeren is over alle $\binom{m}{s}$ kombinaties van s der cijfers van $1, \ldots, m$. Bij toepassing van $H^{(s)}$ op $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ ontstaat:

$$H^{(s)} \overset{P}{\mathbf{m}} \underset{P}{.} \overset{P}{\mathbf{r}'} = H^{(s)} (\mathbf{u}_1 \, . \, \mathbf{x}_1')^{\varrho_1} \ldots (\mathbf{u}_m \, . \, \mathbf{x}'_m)^{\varrho_m} - \varkappa^s s! \, \Sigma \, (\mathbf{x}'_{i_1} \frown \ldots \mathbf{x}'_{i_s}) \underset{s}{.}$$

$$\underset{s}{.} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{i_1}'} (\mathbf{u}_{i_1} \, . \, \mathbf{x}_{i_1}')^{\varrho_{i_1}} \ldots \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{i_s}'} (\mathbf{u}_{i_s} \, . \, \mathbf{x}_{i_s}')^{\varrho_{i_s}} \right\} (\mathbf{u}_{j_1} \, . \mathbf{x}_{j_1}')^{\varrho_{j_1}} \ldots (\mathbf{u}_{j_{m-s}} \, . \, \mathbf{x}'_{j_{m-s}})^{\varrho_{j_{m-s}}}$$

waarin $j_1, \ldots, j_{m-s}$ de niet tot $i_1, \ldots, i_s$ behoorende indices van $1, \ldots, m$ zijn en de sommatie over alle $\binom{m}{s}$ mogelijke kombinaties is uit te voeren.

Daar:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i'} (\mathbf{u}_i \, . \, \mathbf{x}_i') = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i'} \mathbf{x}_i' \right) \underset{1}{.} \, \mathbf{u}_i = \varkappa \mathbf{u}_i,$$

is:

$$H_s \, F \overset{P}{\mathbf{m}} = s! \, \varrho_{i_1} \ldots \varrho_{i_s} \Sigma \, (\mathbf{x}'_{i_1} \frown \ldots \mathbf{x}'_{i_s}) \underset{s}{.} (\mathbf{u}_{i_1} \frown \ldots \mathbf{u}_{i_s}) (\mathbf{u}_{i_1} \underset{1}{.} \mathbf{x}'_{i_1})^{\varrho_{i_1} - 1} \ldots$$

$$(\mathbf{u}_{i_s} \, . \, \mathbf{x}'_{i_s})^{\varrho_{i_s} - 1} (\mathbf{u}_{j_1} \, . \, \mathbf{x}'_{j_1})^{\varrho_{j_1}} \ldots (\mathbf{u}_{j_{m-s}} \, . \, \mathbf{x}'_{j_{m-s}})^{\varrho_{j_{m-s}}} .$$

Daar verder:

$${}_s A \overset{P}{\mathbf{m}} = \mathbf{u}_1^{\varrho_1} \ldots \mathbf{u}_{i_1 - 1}^{\varrho_{i_1} - 1} \, \mathbf{u}_{i_1}^{\varrho_{i_1} - 1} \, \mathbf{v}_1 \, \mathbf{u}_{i_1 + 1}^{\varrho_{i_1} + 1} \ldots \mathbf{u}_m^{\varrho_m},$$

waarin

$$\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_s = \mathbf{u}_{i_1} \frown \ldots \mathbf{u}_{i_s},$$

wanneer het permutatiegebied van ${}_sA$ juist van $\mathbf{u}_{i_1}^{\varrho_{i_1}}, \ldots, \mathbf{u}_{i_s}^{\varrho_{i_s}}$ elk den laatsten factor bevat, is:

$${}_s\bar{A} \overset{P}{\mathbf{m}} = \frac{\varrho_{i_1} \ldots \varrho_{i_s}}{\binom{P}{s}} \Sigma_s A \overset{P}{\mathbf{m}}$$

waarbij de sommatie over alle $\binom{m}{s}$ wezenlijke verschillende permutatiegebieden is uit te voeren. Daaruit volgt:

$$H^{(s)} F \overset{P}{\mathbf{m}} = \binom{P}{s} s! \, {}_s\bar{A} \, F \, . \overset{P}{}$$

d. w. z. de CAPELLI'sche operator $H^{(s)}$ is identiek met den opera or

$\binom{P}{s} s!\,{}_s\bar{A}$. De door CAPELLI ontdekte lineaire onafhankelijkheid der operatoren $H^{(s)}$ en hunne commutativiteit onderling en met andere uit pooloperatoren samenstelbare operatoren ligt dus als bijzonder geval opgesloten in de in R_{I} bewezen lineaire onafhankelijkheid der operatoren $\bar{A}$ en hunne commutativiteit onderling en met alle operatoren $\bar{M}$, A, M, K en P. Daar de operatoren $\bar{A}$, $\bar{M}$, $\overset{m}{\bar{A}}$, $\overset{a}{\bar{M}}$, $\overset{i}{\underset{j}{I}}$, K alle als veelvoudensommen van producten van operatoren ${}_s\bar{A}$, $s=1,\ldots,n$ en den identischen operator I geschreven kunnen worden, hebben deze operatoren voor een vorm de beteekenis van bepaalde differentiaaloperatoren. Zijn de variabelenrijen van hoogeren graad, dan hebben deze operatoren de beteekenis van differentiaaloperatoren van meer gecompliceerden aard. De verschillende op blz. 1486 opgenoemde soorten van vormen onderscheiden zich dus, doordat zij kunnen ontstaan door toepassing van bepaalde differentiaaloperatoren, en door toepassing van bepaalde differentiaaloperatoren worden geannuleerd.

De Operator Ω. Voor $m=n$ is

$$n!\,\varkappa^n\,\mathrm{E}'_n\left(\frac{d}{d\mathbf{x}_1{}'}\frown\cdots\frac{d}{d\mathbf{x}_n{}'}\right)$$

de bekende operator Ω (Ω-proces). Blijkens het voorgaande is

$$\Omega=\frac{\mathrm{E}'}{(\mathbf{x}_1{}'\frown\ldots\mathbf{x}_n{}')}H^{(n)}$$

en de uitoefening van Ω staat dus gelijk met uitoefening van $n!\binom{P}{n}{}_n\bar{A}$ gecombineerd met deeling door de determinant der variabelenrijen, Men kan dus ook zeggen, dat een niet reduceerbare vorm in n rijen van n variabelen een vorm is, die geannulleerd wordt door Ω [1]). Een vorm in n rijen van n variabelen, die een factor $\frac{\mathbf{x}'_1\frown\ldots\mathbf{x}'_n}{\mathrm{E}'}$ bevat, kan nooit nietreduceerbaar zijn. De korrespondeerbare affinor $\overset{P}{\mathbf{m}}$ toch bezit een lineare kovariante van den graad $P-n$. Een dergelijke vorm wordt dus door den operator Ω niet geannulleerd. [2])

Reeksontwikkeling van een vorm in rijen van twee variabelen.

Zij $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ een vorm in m rijen van 2 variabelen en $\overset{P}{\mathbf{m}}$ de corres-

---

1) Verg. R_{I} blz. 1290.

2) Verg. blz. 1492.

pondeerende affinor. Daar $n = 2$, is de reeksontwikkeling van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ naar elementaire affinoren identiek met die naar nietreduceerbare kovarianten [1]). Passen we deze ontwikkeling toe, dan resulteert voor $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ een ontwikkeling:

$$F\overset{P}{\mathbf{m}} = \sum_{\alpha}^{0,\ldots,m'} \frac{\binom{P}{2\alpha}^2 \binom{2\alpha}{\alpha}^2}{\binom{P-\alpha+1}{\alpha}^2} \, {}_{\alpha.2}\overset{m}{\bar{A}}\, \overset{P}{\mathbf{m}} \underset{P}{\cdot} \mathbf{x}'^{\rho}\, \mathbf{y}'^{\sigma} \ldots \ldots ; \quad m' = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{voor } m \text{ even} \\ \dfrac{m-1}{2} & \text{,, ,, oneven,} \end{cases}$$

waarin elke term een som is van producten van één enkelen niet-reduceerbaren vorm met een zeker voor dien term karakteristiek aantal determinanten van den vorm $x'_a\, y'_b - x'_b\, y'_a$, kort geschreven $(x'\, y')$, als gebruikelijk (Klammerfactoren). De mogelijkheid en eenduidigheid eener dergelijke ontwikkeling is het eerst aangetoond door GORDAN. Voor het speciale geval, dat er slechts twee variabelenrijen zijn, leert toepassing van permutatieregels:

$${}_{\alpha.2}\overset{m}{\bar{A}}\; \mathbf{u}^{\rho}\, \mathbf{v}^{\sigma} = \frac{\binom{\rho}{\alpha}\binom{\sigma}{\alpha}}{\binom{P}{2\alpha}\binom{2\alpha}{\alpha}}\, 2^{\alpha}\, (\mathbf{u}^{\rho} \underset{\alpha}{\vee} \mathbf{v}^{\sigma}),$$

zoodat de reeksontwikkeling voor dit speciale geval wordt:

$$F\overset{P}{\mathbf{m}} = \sum_{\alpha}^{0,\ldots,m'} \frac{\binom{\rho}{\alpha}\binom{\sigma}{\alpha}}{\binom{P-\alpha+1}{\alpha}^2}\, 2^{\alpha} \binom{P}{2\alpha}\binom{2\alpha}{\alpha} (\mathbf{u}^{\rho} \underset{\alpha}{\vee} \mathbf{v}^{\sigma}) \underset{P}{\cdot}\, \mathbf{x}'^{\rho}\, \mathbf{y}'^{\sigma}.$$

Deze ontwikkeling van $F\mathbf{u}^{\rho}\,\mathbf{v}^{\sigma}$ blijft gelden voor $n > 2$, daar, tengevolge van het feit, dat er slechts twee rijen variabelen zijn ook hier alleen alternaties van den vorm ${}_{\alpha.2}A$ niet identiek nul geven. Dit is de zoogenaamde tweede reeksontwikkeling van GORDAN [2]).

De termen der ontwikkeling naar niet-reduceerbare kovarianten kunnen nu op verschillende wijzen verder gesplitst worden. Ten eerste kan iedere operator ${}_{\alpha.2}\overset{m}{\bar{A}}$ gesplitst worden in eenvoudige gemengde alternaties. Er ontstaat dan een ontwikkeling van $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ naar plaatselijk alterneerende vormen, voor welke in elken term de macht van een determinant der variabelen *dezelfde* is als de in dienzelfden term voorkomende macht van den determinant der met die varia-

1) Verg. RI blz. 1291.

2) STUDY, Methoden zur Theorie der ternären Formen § 3 en § 4. De zoogenaamde eerste reeksontwikkeling van GORDAN correspondeert met een reeksontwikkeling van een *gemengden* affinor en wordt hier niet besproken.

belenrijen correspondeerende ideale factoren van $\overset{P}{\mathbf{m}}$. De mogelijkheid en eenduidigheid eener dergelijke ontwikkeling is het eerst aangetoond door A. REISSINGER[1]).

In de tweede plaats kan iedere elementaire affinor gesplitst worden in geordende elementaire affinoren van de eerste soort. Daarmede correspondeert een ontwikkeling van den vorm:

$$F\overset{P}{\mathbf{m}} = \sum_{\alpha}^{0,..,m'} \sum_{\lambda}^{1,..,\delta_\alpha} 2^{\alpha} \frac{P-2\alpha+1}{P-\alpha+1} {}_{\alpha.2}\overset{m}{A}{}^{(\lambda)}{}_{p-\alpha,\alpha}\overset{\alpha}{M}{}^{(\lambda)} \overset{P}{\mathbf{m}} \underset{P}{.} \mathbf{x}'^{\rho} \mathbf{y}'^{\sigma} \ldots \text{ [2])}$$

De in elken term optredende factoren van den vorm $(x' y')$ voldoen dan aan de voorwaarde, dat zij behooren tot de permutatiegebieden van een bepaalde voor dien term karakteristieke *geordende* alternatie ${}_{\alpha.2}A$, werkende op $\mathbf{x}'^{\sigma}\mathbf{y}'^{\rho}$. De mogelijkheid en eenduidigheid eener dergelijke ontwikkeling is het eerst aangetoond door W. GODT[3]).

In de derde plaats is het mogelijk iederen elementairen affinor te splitsen in geordende elementaire affinoren van de tweede soort. Daarmede korrespondeert dan de eenduidige ontwikkeling:

$$F\overset{P}{\mathbf{m}} = \sum_{i} \varepsilon_{ij} \sum_{\lambda}^{1,..,\delta_{ij}} M_j^{(\lambda)} A_i^{(\lambda)} \overset{P}{\mathbf{m}} \underset{P}{.} \mathbf{x}'^{\rho} \mathbf{y}'^{\sigma} \ldots$$

E. WAELSCH[4]) heeft een andere, eveneens eenduidige, ontwikkeling aangegeven, die correspondeert met een ontwikkeling van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ in termen van den vorm

$$\{(\mathbf{u}^{\rho} \underset{\alpha_2}{\vee} \mathbf{v}^{\sigma}) \underset{\alpha_3}{\vee} \mathbf{w}^{\tau}\} \underset{\alpha_4}{\vee} \ldots$$

met coefficienten, die bij een bepaald gekozen volgorde van $\mathbf{u}^{\rho}, \mathbf{v}^{\sigma}, \ldots$ functies van $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ zijn. Het is opmerkelijk dat het aantal termen dezer ontwikkeling voor een P-lineairen vorm gelijk is aan dat van de ontwikkeling naar geordende elementaire affinoren van de eerste soort, dus bijv. $1+5+9+5=20$ voor $P=6$.

---

[1]) Ausgezeichnete Form der Polaren-Entwicklung eines symbolischen Produktes. Progr. Realsch. Kempten 1906–07.

[2]) Zie R1 bldz. 1289.

[3]) W. GODT leidt deze ontwikkeling af langs een geheel anderen weg, en daaraan is wel toe te schrijven dat hem het verband met de groepkarakters van FROBENIUS en de mogelijkheid van een overeenkomstige ontwikkeling voor $n > 2$ ontgaan is. „Ueber die Entwicklung binärer Formen mit mehreren Variabelen", Arch. f. Math. u. Phys. 13 (08) 1—12.

[4]) Ueber Reihenentwicklungen mehrfachbinärer Formen. Sitz.ber. der Wiener Akad. 113 (04) 1209—1217. WAELSCH heeft voor het eerst de reeksontwikkelingen der binaire invarianten-theorie gebruikt ter splitsing van gerichte grootheden in bij de *orthogonale* groep kovariante deelen, (bijv. de splitsing van den affinor der vormverandering in skalar, vector en deviator), „Ueber höhere Vectorgröszen der Kristallphysik etc." Wien- Ber. 113(04) 1107—1119; Extension de l'algèbre vectorielle etc., Comptes Rendus 143(06) 204—207.

Reeksontwikkeling van een vorm in m rijen van n variabelen.

Zij

$$F\overset{P}{\mathbf{m}} = u^{\rho} v^{\sigma} \ldots \underset{P}{.} \; x'^{\rho} y'^{\sigma} \ldots$$

een vorm in de m variabelenrijen $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$,... en $\overset{P}{\mathbf{m}} = \mathbf{u}^{\rho}\mathbf{v}^{\sigma}\ldots$ de correspondeerende affinor. Men kan $\overset{P}{\mathbf{m}}$ ontwikkelen naar nietreduceerbare kovarianten. Iedere term is dan een som van geordende alternaties, die ieder bestaan uit een doordringend product van een voor dien term karakteristiek aantal α factoren $\mathbf{E}$ met een lineair homogeen nietreduceerbaren affinor van den graad $P-\alpha n$. Daarmede correspondeert een ontwikkeling van den vorm $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ in een aantal termen, waarvan ieder een som is van producten van een nietreduceerbaren vorm met een zeker voor dien term karakteristiek aantal determinanten gevormd uit n der variabelenrijen.

Voor $m = n$ is deze ontwikkeling het eerst aangegeven door Capelli [1]) en voor het algemeene geval door J. Deruyts [2]) en K. Petr [3]) [4]). Zoowel Capelli als Petr leggen aan hun bewijs de op blz. 1489 vermelde eigenschap ten grondslag, dat een vorm in n rijen van n variabalen, die den determinant der variabelen als factor bevat, niet door Ω geannulleerd wordt. De afleiding van Capelli, die aan de hier aangegevene het meest verwant is, berust op de theorie der differentiaaloperatoren H [5]). Deruyts gebruikt zijn theorie der semi-invarianten en -kovarianten en Petr maakt gebruik van differentiaal-operatoren, die met behulp van hulpvariabelen worden samengesteld.

De termen der ontwikkeling naar nietreduceerbare kovarianten kunnen weer op verschillende wijzen gesplitst worden. Ten eerste kan iedere term van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ gesplitst worden in algemeene gemengde alternaties, en deze weer in eenvoudige. Daarmede correspondeert een ontwikkeling van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ in een som van termen, die elk bestaan

---

[1]) Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche, Mem. dei Lincei (82) § 74; Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques, Math. Ann. 37 (90) 1—37.

[2]) Essai d'une théorie générale des formes algébriques. Mém. de Liège. 2. 17 (92) 4. 1—156; Détermination des fonctions invariantes de formes a plusieurs séries de variables. Mém. couronnés et mém des sav. étr. de Bruxelles 53 (90—93) 2. 1—23.

[3]) Ueber eine Reihenentwicklung für algebraische Formen, Bull. Intern. de Prague 12 (07) 163—191.

[4]) De vormen, die hier niet-reduceerbaar genoemd zijn, heeten bij Capelli: „formes impropres" en bij Deruyts: „covariants de formes primaires".

uit een som van producten van een aantal $s_1, \ldots, s_t$ rijige determinanten, gevormd uit kentallen der rijen $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \ldots$ met één enkelen symmetrischen vorm. Alle termen zijn kovarianten, de ondertermen alleen dan, wanneer $s_1 = s_2 = \ldots = n$.

In elken onderterm is de macht van een determinant der kentallen der variabelen dezelfde als de macht van de determinant der kentallen der correspondeerende ideale factoren van $\overset{P}{\mathbf{m}}$. Onder deze voorwaarden is die ontwikkeling eenduidig en een uitbreiding van die welke door Reissinger voor $n = 2$ aangegeven werd.

In de tweede plaats kan iedere term van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ gesplitst worden in geordende alternaties van den vorm ${}_{\alpha.n}A$. De in elken onderterm optredende determinanten voldoen dan aan de voorwaarde, dat zij behooren tot de permutatiegebieden van een bepaalde voor dien onderterm karakteristieke geordende alternatie ${}_{\alpha.n}A$, werkende op $\mathbf{x}'^{\rho}\,\mathbf{y}'^{\sigma}$. Deze ontwikkeling is eenduidig, daar de correspondeerende ontwikkeling van $\overset{P}{\mathbf{m}}$ eenduidig is[1], en een uitbreiding van die welke door Godt voor $n = 2$ aangegeven werd. Wij hebben dus de stelling verkregen:

Hoofdstelling B. Iedere algebraische vorm, homogeen en van de graden $\rho, \sigma, \ldots$ *in m rijen van n variabelen* $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \ldots$, *kan op éene en slechts éene wijze worden ontwikkeld in een reeks van termen, die ieder bestaan uit een product van een voor een bepaalde groep dier termen karakteristiek aantal α determinanten, elk gevormd uit de variabelen van n der rijen met een niet reduceerbaren vorm van den graad P—αn, zoodanig, dat de determinanten in elken term behooren tot de permutatiegebieden van een bepaalde voor dien term karakteristieke geordende alternatie* ${}_{\alpha.n}A$, *werkende op den affinor* $\mathbf{x}'^{\rho}\,\mathbf{y}'^{\sigma}\ldots$

In de derde plaats kan men de splitsing zoover voortzetten, dat $\overset{P}{\mathbf{m}}$ een som wordt van geordende elementaire affinoren van de eerste of ook van de tweede soort. Daarmede correspondeert een ontwikkeling van $F\overset{P}{\mathbf{m}}$ naar geordende elementaire vormen van de eerste resp. van de tweede soort, die als volgt kan worden gekarakteriseerd:

Hoofdstelling C. Iedere algebraische vorm, homogeen en van de graden $\rho, \sigma, \ldots$ *in m rijen van n variabelen* $\mathbf{x}', \mathbf{y}', \ldots$, *kan op éene en slechts éene wijze in een reeks van geordende elementaire vormen van de eerste resp. tweede soort worden ontwikkeld.*

[1]) *RI* blz. 1291

Voorbeelden:

De 6-lineaire vorm

$$\overset{6}{F}\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 \ldots \mathbf{m}_6 \underset{6}{.} \mathbf{x}'_1 \ldots \mathbf{x}_6$$

kan gesplitst worden in 76 geordende elementaire vormen van de eerste soort, correspondeerende met de affinoren.

1)	${}_6A_{11}\ {}^0M^1\ \overset{6}{\mathbf{m}}$	
2, ..., 6)	${}_5A_{10}^{(\lambda)}\ {}^2M_2^{(\lambda)}\ \overset{6}{\mathbf{m}},$	$\lambda = 1, \ldots, 5$
7, ..., 15)	${}_{4,2}A_9^{(\lambda)}\ {}^{2,2}M^{3(\lambda)}\ \overset{6}{\mathbf{m}},$	$\lambda = 1, \ldots, 9$
16, ..., 25)	${}_4A_8^{(\lambda)}\ {}^3M_5^{(\lambda)}\ \overset{6}{\mathbf{m}},$	$\lambda = 1, \ldots, 10$
26, ..., 30)	${}_{2.3}A_7^{(\lambda)}\ {}^{3\,2}M_4^{(\lambda)}\ \overset{6}{\mathbf{m}},$	$\lambda = 1, \ldots, 5$
31, ..., 46)	${}_{3,2}A_6^{(\lambda)}\ {}^{3,2}M_6^{(\lambda)}\ \overset{6}{\mathbf{m}},$	$\lambda = 1, \ldots, 16$
47, ..., 56)	${}_3A_5^{(\lambda)}\ {}^4M_8^{(\lambda)}\ \overset{6}{\mathbf{m}},$	$\lambda = 1, \ldots, 10$
57, ..., 61)	${}_{3.2}A_4^{(\lambda)}\ {}^{2.3}M_7^{(\lambda)}\ \overset{6}{\mathbf{m}}$	$\lambda = 1, \ldots, 5$
62, ..., 70)	${}_{2,2}A_3^{(\lambda)}\ {}^{4,2}M_9^{(\lambda)}\ \overset{6}{\mathbf{m}},$	$\lambda = 1, \ldots, 9$
71, ..., 75)	${}_2A_2^{(\lambda)}\ {}^5M_{10}^{(\lambda)}\ \overset{6}{\mathbf{m}},$	
76)	${}_0A_1\ {}^6M_{11}\ \overset{6}{\mathbf{m}},$	

voor $n = 5$ wordt 1 nul, voor $n = 4$: 1, ..., 6, voor $n = 3$: 1, ..., 25 en voor $n = 2$: 1, ..., 56. De ontwikkeling naar elementaire vormen correspondeert met een ontwikkeling van $\overset{6}{\mathbf{m}}$, die uit de vorige ontstaat door samenvatting der horizontale rijen 1 ; 2, ..., 6; 7 .... 15; enz. Uit deze ontstaat weer de ontwikkeling naar niet-reduceerbare kovarianten. Voor $n > 6$: 1 ...., 76; voor $n = 6$: 1 ; 2, ..., 76; voor $n = 5$: 2, ..., 6; 7, ..., 76; voor $n = 4$: 7, ... 25 ; 26, ..., 76; voor $n = 3$: 26, ..., 30; 31, ..., 56; 57, ..., 76, en voor $n = 2$: 57, ..., 61; 62, ..., 70; 71, ..., 75; 76. Ter ontwikkeling van een vorm van den zesden graad in een aantal rijen van variabelen, minder dan 6, bijv.

$$\overset{6}{F}\mathbf{n} = \mathbf{n}_1^2\ \mathbf{n}_2^2\ \mathbf{n}_3^2 \underset{6}{.}\ \mathbf{x}'^2_1\ \mathbf{x}'^2_2\ \mathbf{x}'^2_3$$

merke men op, dat $\mathbf{x}'^2_1\ \mathbf{x}'^2_2\ \mathbf{x}'^2_3$ ontstaan kan door een bepaalde eenvoudige menging ${}^{3.2}M_3^{(\alpha)}$. In de ontwikkeling van $\overset{6}{\mathbf{n}}$ vervallen dus alle geordende elementaire operatoren van de eerste soort, welke

een alternatie als eersten factor hebben, die door ${}^{3.2}M_3^{(\alpha)}$ wordt geannulleerd. In de eerste plaats dus 1, ..., 25. Van 26—30 blijft één term over, van 31—46 blijven negen termen, waaronder drie verschillende, van 47—56 vier gelijke termen, van 57—61 twee gelijke termen, van 61—69 zes termen waaronder drie verschillende, van 70—75 vier termen, waaronder twee verschillende, terwijl 76 blijft. Totaal blijven er dus voor $n \geq 3$ twaalf termen, en voor $n = 2$ zeven termen. Dit laatste cijfer geeft ook het aantal termen aan in de ontwikkeling volgens WAELSCH[1]).

Reeksontwikkeling van een vorm in m rijen van n variabelen van willekeurigen graad.

Hoofdstelling D. Iedere algebraische vorm $F\overset{p}{\mathbf{m}}$, *homogeen en van de graden* $\varrho, \sigma, \ldots$ *in m verschillende rijen van variabelen* $\overset{p}{\mathbf{x}}', \overset{q}{\mathbf{y}}', \ldots$ *kan op éene en slechts éene wijze worden ontwikkeld in een reeks van geordende elementaire vormen van de eerste resp. tweede soort.*

De ontwikkeling wordt verkregen door $\overset{p}{\mathbf{m}}$ te ontwikkelen in geordende elementaire affinoren.

Ook de ontwikkeling naar niet-reduceerbare kovariante vormen (Hoofdstelling B) kan voor dit algemeenste geval verkregen worden door ontwikkeling van $\overset{p}{\mathbf{m}}$ naar niet-reduceerbare kovarianten. De in de ontwikkeling van den vorm optredende n-rijige determinanten hebben dan echter in het algemeen niet elk voor zich reale beteekenis, en dientengevolge hebben ook de in elken term optredende niet reduceerbare vormen slechts ideale beteekenis. De termen zelf behouden echter hun reale beteekenis en ontstaan door samenvatting van bepaalde groepen van termen uit de ontwikkeling naar geordende elementaire vormen van de eerste soort.

[1]) T. a. p. blz. 1216.

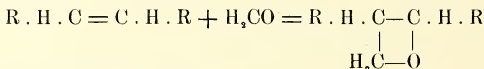
Scheikunde. — De heer BÖESEKEN biedt een mededeeling aan van den heer H. J. PRINS: *„Over de condensatie van formaldehyde met eenige onverzadigde verbindingen"*.

(Mede aangeboden door den Heer A. F. HOLLEMAN).

Eenigen tijd geleden [1]) heb ik de onderlinge condensatie van onverzadigde verbindingen besproken; onderzocht is de condensatie van formaldehyde met styrol, anethol, isosafrol, pineen, d. limoneen, campheen en cedreen. De condensatie werd teweeggebracht, hetzij door verhitten van de componenten in azijnzure oplossing, hetzij door zwavelzuur in waterige of azijnzure oplossing, Voor de waterige oplossingen werd gebruik gemaakt van de 40 °/₀ oplossing uit den handel, de azijnzure oplossing werd verkregen door trioxymethyleen met azijnzuur al of niet in tegenwoordigheid van zwavelzuur te verwarmen.

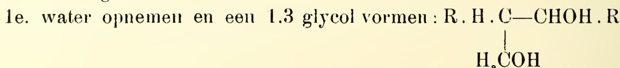
De waterige en azijnzure oplossingen van zwavelzuur en formaldehyde gedragen zich verschillend ten opzichte van sommige verbindingen, styrol, campheen en cedreen reageeren niet of zeer langzaam met de waterige oplossing, terwijl anethol en isosafrol wel reageeren. Safrol werkt in tegenstelling met isosafrol op een waterige, zwavelzure formaldehyde oplossing niet in.

Men kan aannemen, dat de reactie begint met een additie van de C O groep aan de C = C groep, zoodat primair een vierring wordt gevormd.

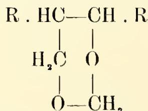


De vierring kan nu:

1e. water opnemen en een 1.3 glycol vormen:

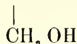


2e. formaldehyde opnemen en een methyleenaether vormen:



[1]) Chem. Weekbl. **10**, 1003. (1913).
ibid. **14**, 932. (1917).

3e. hetzij direct, door isomerisatie of indirect via het glycol overgaan in een onverzadigden primairen alcohol: R . C = CH . R



Indien tevens azijnzuur aanwezig is kunnen zich acetaten vormen hetzij van het glycol, hetzij van den primairen onverzadigden alcohol.

In waterige oplossing vindt bij anethol en isosafrol vrijwel uitsluitend en bijna quantitatief vorming van den methyleenaether plaats.

In azijnzure oplossing in tegenwoordigheid van zwavelzuur wordt uit styrol zoowel een diacetaat gevormd als een methyleenaether, cedreen en campheen geven onder deze omstandigheden een acetaat van een onverzadigden primairen alcohol.

Campheen, d. limoneen, en pineen geven in azijnzure oplossing bij het kookpunt van azijnzuur eveneens een acetaat van een onverzadigden alcohol naast andere hooger kokende verbindingen.

De reactie tusschen formaldehyde, pineen en limoneen onder vormin gvan een onverzadigden primairen alcohol is reeds geconstateerd door KRIEWITZ [1]), die de componenten door verhitten in tegenwoordigheid van alcohol op hooge temperatuur tot reactie bracht.

Daarvóór is de vorming van een primairen onverzadigden alcohol door LADENBURG [2]) geconstateerd bij de reactie tusschen formaldehyde en een tetrahydropyridine-derivaat.

Behalve bij de terpenen geeft de condensatie goede opbrengsten, deze varieeren tusschen 70°/₀ en 90°/₀ van de theoretisch mogelijke; bij de terpenen ontstaan verschillende producten, vermoedelijk, doordat de ontstane onverzadigde alcohol opnieuw formaldehyde opneemt, bovendien is er, doordat de terpenen meer dan één C = C groep bevatten, van te voren mogelijkheid tot het opnemen van meer dan één molecuul formaldehyde.

Het intreden van dergelijke reacties heb ik verder nog geconstateerd bij amyleen, citronellol, methylheptenon, citronellal, undecyleenzuur, kaneelzure aethylester.

Experimenteel gedeelte.

Styrol en formaldehyde.

Aan een mengsel van 33 gr. trioxymethyleen en 320 gr. ijsazijn wordt toegevoegd 32 gr. sterk zwavelzuur en het trioxymethyleen door verwarmen tot oplossing gebracht, daarna wordt afgekoeld tot 40° en onder schudden en nu en dan koelen bij kleine hoeveelheden 104 gr. styrol toegevoegd. Laat men de temperatuur boven 50 gr. stijgen, dan treedt polymerisatie van het styrol op. Men laat

[1]) Ber. d. deutsch. chem. Ges. 32, 57. (1899).

[2]) ibid, 31, 288, 2699 (1898).

het mengsel gedurende den nacht staan, giet dan uit in water, neemt op in aether en wascht met soda-oplossing. Na drogen en verdampen van den aether kan men het diacetaatgehalte bepalen door verzeepen. Dit bleek 40 °/₀ te bedragen. Men verzeept dan de olie met iets meer dan de theoretische hoeveelheid alcoholische kali en distilleert in vacuum. Door fractionatie zijn af te scheiden:

Methyleenaether van 2.phenylpropylglycol. 1.3.

Kleurlooze olie, kpt. 128°—130° bij 13 mm. $D.\frac{20^0}{4^0} = 1{,}1111$. $N_d^{18^0} = 1{,}53063$.

Mol. refr. 45,64. (form. van LORENZ—LORENTZ). Berekend 45.87. (atoom refr. volgens EISENLOHR [1]).

Mol. gew. bepaling in benzol gaf: 162 en 156. Ber. voor $C_{10}H_{12}O_2$: 164.

Elementair analyse: °/₀ C gev. 71,6 en 71,1. Ber. voor $C_{10}H_{12}O_2$ 73.2.
°/₀ H gev. 8,3 en 7,9. Ber. 7,3.

2. Phenylpropylglycol. 1.3.

Kleurlooze, visceuse vloeistof, kpt. 176° bij 13 mm. $D\frac{19^0}{4^0} = 1.1161$. $N_d^{19^0} = 1.54267$. Mol. refr. 42,92. Ber. 43,21.

Geeft quantitatief een diacetaat kpt. 162°—164° bij 13 mm. (gebonden azijnzuur bepaald door verzeepen met alcoholische kali). Mol. gew. van het glycol: in benzol 257 en 189. Ber. 152. Het is dus daarin zeer sterk geassocieerd; bij zeer sterke verdunning krijgt men een normaal mol. gew. [2])

Elementair analyse: Gev. °/₀ C 70,6 en 70,9. Ber. voor $C_9H_{12}O_2$ 71,0.
°/₀ H 9.2 en 8,9. Ber. 7,9.

De methyleenaether zoowel als het glycol zijn verzadigd ten opzichte van een oplossing van broom in CCl_4, terwijl echter de methyleen aether niet reageert met een oplossing van aethylmagnesiumbromide in aether bij gewone temperatuur, reageert het glycol onmiddellijk, voegt men toluol toe en brengt de temperatuur op 100° dan reageert de methyleenaether uiterst heftig met de GRIGNARD-oplossing. Het feit, dat het glycol een diacetaat geeft door koken met azijnzuuranhydride en natriumacetaat is een bewijs voor zijn twee *primaire* alcoholgroepen, het isomere glycol, dat mogelijk zou kunnen ontstaan door additie van formaldehyde aan de C = C groep van het styrol, zou een secundair-primair glycol zijn met de phenylgroep aan het secundaire koolstofatoom en onder de bovengenoemde

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **75**, 585. (1910).
2) Chem. Weekblad **16**, 929. (1919).

omstandigheden zeker water verliezen en het acetaat van kaneel-alcohol geven, dit kon echter niet gevonden worden.

Anethol en formaldehyde.

Een grammol. anethol wordt geroerd met een oplossing van twee grammol formaldehyde in 30 °/₀ zwavelzuur gedurende drie dagen, het op de gewone wijze afgescheiden product geeft bij distillatie in vacuum:

Methyleenaether van p. methoxyphenylbutylglycol.

Kleurlooze, viscense vloeistof, kpt. 168°—170° bij 13 mm. $D_{4^0}^{16^0} =$ 1.1197, $N_d^{16^0} = 1.53438$. Mol. refr. 57.78 Ber. 56,74.

Reageert niet met GRIGNARD-oplossing bij gewone temperatuur, ontkleurt geen broomoplossing.

Verschillende pogingen gedaan om den methyleenaether te verzeepen tot het overeenkomstige glycol hadden geen resultaat, er trad altijd of verharsing op of de aether bleef onveranderd. Door den aether gedurende veertien dagen te laten staan met 85 °/₀ mierenzuur werd een olie verkregen, waarin zooveel mierenzuur gebonden was als overeenkwam met 35 °/₀ di-formiaat, verzeeping en distillatie gaf echter een inconstant kokende vloeistof.

Oxydatie van den methyleenaether.

Ten einde aan te toonen, dat bij het anethol het formaldehyde werkelijk met de C = C groep uit de keten had gereageerd, werd de methyleenaether geoxydeerd met kaliumpermanganaat; verkregen werd een zuur, smeltpunt 182°—183° dat met anijszuur gemengd geen depressie vertoonde.

Daaruit blijkt dus, dat de kern niet door formaldehyde onder deze omstandigheden wordt aangetast.

Elementair analyse van den methyleenaether:

Gev. °/₀ C 70,1, 68,2 en 69,2. Ber. voor $C_{12}H_{16}O_3$ 69,2.
°/₀ H 7,4, 7,8 Ber. 7,7.

Mol.gew. in benzol: gev. 203 en 208. Ber. voor $C_{12}H_{16}O_3$ 208.

Isosafrol en formaldehyde.

De condensatie wordt bewerkt zooals bij het anethol is aangegeven. Verkregen wordt:

Methyleenaether van 3,4 dioxymethyleenphenylbutylglycol.

Kleurlooze, visceuse vloeistof, kpt. 182°—184° bij 13 mm. $D_{4^0}^{17^0} =$ $= 1,2272$. $N_d^{17^0} = 1,54078$.

Mol.refr. 56,84. Ber. 56,18.

Mol.gew. in benzol: gev. 220 en 213. Ber. voor $C_{12}H_{14}O_4$ 222.

Elementair analyse:

Gev. $^{0}/_{0}$ C 64,5 en 64,8. Ber. voor $C_{12}H_{14}O_4$ 64,8.

$^{0}/_{0}$ H 6,9 en 7,7. Ber. 6,3.

Campheen en formaldehyde.

Een mengsel van 30 gr. trioxymethyleen, 130 gr. campheen en 136 gr. ijsazijn wordt gedurende drie dagen aan een terugvloeikoeler gekookt, de door water afgescheiden olie wordt na drogen, door koken met een gelijk gewicht azijnzuuranhydride in een acetaat omgezet, dat, omdat het afgeleid is van een homo-campheen homo-camphenolacetaat genoemd wordt:

Homo-camphenolacetaat.

Kleurlooze olie, kpt. 124°—128° bij 13 mm. $D\frac{19^0}{4^0} = 1{,}0013$. $N_d^{19^0} = 1{,}48209$.

Mol. refr. 59,23. Ber. voor een stof $C_{13}H_{20}O_2$ met een $C = C$ groep: 59,02.

Homo-pinenol.

Door koken van pineen met tryoxymethyleen en azijnzuur op de wijze als bij campheen is aangegeven verkrijgt men een olie, die veel gebonden azijnzuur bevat en na verzeepen en fractioneeren geeft:

Kleurlooze olie, kpt. 113°—116° bij 13 mm. $D\frac{19^0}{4^0} = 0{,}9720$. $N_d^{19} = 1{,}48616$.

Mol. refr. 49,05. Ber. voor $C_{11}H_{18}O$ met een $C = C$ groep 49,66, voor $C_{11}H_{18}O$ met twee $C = C$ groepen: 51, 39.

Mol. gew. in benzol: gev. 188 en 190. Ber. 166.

Homo-limonenol.

Limoneen wordt met formaldehyde in reactie gebracht op de wijze als bij campheen beschreven, en de alcohol afgescheiden als bij het pineen aangegeven.

Kleurlooze vloeistof kpt. 122°—126° bij 13 mm. $D\frac{19^0}{4^0} = 0{,}9757$. $N_d^{19^0} = 1.50261$.

Mol. refr. 50,26. Ber. voor $C_{11}H_{18}O$ met twee $C{=}C$ groepen 51, 39. Elementair analyse.

Gev. $^{0}/_{0}$ C 78,1 en 77,7. Ber. voor $C_{11}H_{18}O$ $^{0}/_{0}$ C 79,5.

$^{0}/_{0}$ H 11.6 en 11,7. Ber. $^{0}/_{0}$ H 10,9.

Deze resultaten zijn in overeenstemming met die van KRIEWITZ, l.c.

Cedreen. en formaldehyde.

Een mengsel van cedreen met de aequivalente hoeveelheid formaldehyde in azijnzuur, waarin tevens 10 $^{0}/_{0}$ zwavelzuur is opgelost, wordt gedurende drie dagen geroerd. Het reactieproduct wordt ver-

zeept en in vacuum gedistilleerd. Behalve veel hooger kokende producten wordt door fractionatie verkregen: Homo-cedrenol.

Kleurlooze visceuze vloeistof kpt. 168°—171° bij 13 mm. $D_{4^0}^{19^0} =$ 1,0270. $N_d^{19^0} = 1,51826$.

Mol. refr. 69,08. Ber. voor $C_{16}H_{26}O$ met een $C = C$ groep 70,55. Als alcohol reageert het onmiddellijk met een GRIGNARD-oplossing en met acetylchloride, het ontkleurt een broomoplossing.

Elementair analyse.

Gev. $^0/_0$ C 81,6 en 80,7. Ber. voor $C_{16}H_{26}O$ $^0/_0$ C 82,0.
$^0/_0$ H 12,0 en 11,3. $^0/_0$ H 11,1.

Het hoofddoel van dit onderzoek was: aan te toonen, dat formaldehyde met een $C = C$ groep reageert op de wijze als door mij in het algemeene schema voor de reacties tusschen onverzadigde verbindingen is aangegeven.

Hilversum, April 1919.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan eene Mededeeling van den Heer G. NORDSTRÖM: „*Opmerking over het niet uitstralen van een overeenkomstig kwantenvoorwaarden bewegende elektrische lading*". (Supplement N°. 44 van de Mededeeling uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden).

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt mede namens den Heer G. HETTERSCHY eene mededeeling aan over: „*Toetsing der wet van* BRAUN *langs electrischen weg*".

Scheikunde. — De Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan over: „*De onverzadigde alkohol uit de aetherische olie van versch gefermenteerde theeblâren*".

Scheikunde. — De Heer ERNST COHEN biedt mede namens den Heer A. L. TH. MOESVELD eene mededeeling aan over: „*De invloed van druk op de oplosbaarheid van stoffen*". V.

Natuurkunde. — De Heer KUENEN biedt een mededeeling aan van den Heer P. EHRENFEST over: „*Opmerkingen omtrent de electronen-theorie der metalen*".

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer L. S. ORNSTEIN: „*Over de verbreeding der spectraallijnen*".

(Deze mededeelingen zullen in een volgend Zittingsverslag worden opgenomen).

De Heer F. A. F. C. WENT biedt voor de boekerij ten geschenke aan een exemplaar van de dissertatie van den Heer H. J. LAM „*The Verbenaceae of the Malayan Archipelago together with those from the Malayan Peninsula, the Philippines, the Bismarck-Archipelago and the Palau-, Marianne- and Caroline-Island*".

De vergadering wordt gesloten.

30 September 1919.

REGISTER.
